

文章编号: 1001-0920(2004)07-0732-05

## 具有饱和执行器线性系统的综合 PLC/VSC 控制

胡剑波<sup>1</sup>, 褚健<sup>2</sup>, 苏宏业<sup>2</sup>

(1. 空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038; 2. 浙江大学 先进控制研究所, 浙江 杭州 310027)

**摘要:** 基于LQ理论和变结构方法, 导出一种带有饱和执行机构和不确定性线性系统的混合 PLC/VSC 控制律。引入一组嵌套的Lyapunov级集, 并根据分段Lyapunov函数导出控制律。该控制律含有不连续控制项和趋近率项。利用Lyapunov函数方法分析了闭环系统的稳定性。结合简化单摆系统验证了设计方法的有效性。在抗干扰能力和减少超调量上反映出所提出的控制器具有比PLC和PLC/LHG更佳的性能。

**关键词:** PLC; VSC; Lyapunov级集

**中图分类号:** TP237 **文献标识码:** A

## Combined PLC/VSC for linear systems with saturating actuators

HU Jian-bo<sup>1</sup>, CHU Jian<sup>2</sup>, SU Hong-ye<sup>2</sup>

(1. College Engineering, Air Force University of Engineering, Xi'an 710038 China; 2. Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China. Correspondent: HU Jian-bo, E-mail: autosys@vip.sina.com)

**Abstract:** A combined PLC/VSC law, based on LQ theory and VSC method, is derived for systems with saturating actuators and uncertainties. The nested Lyapunov level sets are introduced such that control may be proposed based on the derivative of the piecewise Lyapunov functions. The derived control law contains discontinuous term and tendency-rate term. The stability of the closed-loop system is analyzed using Lyapunov function method. The PLC/VSC scheme is demonstrated for the linearized dynamics of the simple pendulum. The simulation results of PLC/VSC are much better than those of PLC or PLC/LHG in the sense of disturbance rejecting, transition and overshoot.

**Key words:** PLC; VSC; Lyapunov level sets

### 1 引言

任何物理执行器都受到饱和制约。若在设计控制器时, 忽视控制输入的制约, 则控制系统性能将受到严重影响。所以, 近年来许多学者对具有饱和输入执行器的线性系统提出了多种控制器设计方法。如文献[1]采用分段LQ控制得到PLC控制器, 这种控制器实际上是一种根据系统所处状态进行LQ控制器分段切换的控制器; 文献[2]在[1]的基础上, 引入低增益控制和高增益控制, 并进行迭加, 得到LHG

(低高增益)控制器。可通过对LHG控制器参数的适当选择, 使得闭环系统对输入干扰和不确定性具有一定的抑制能力; 文献[3]结合了[1]和[2]的优点, 得到了综合PLC/LHG设计方法, 分析了闭环系统的稳定性, 并将其推广到具有执行器速度制约的线性系统有效控制器设计。

PLC方法是针对具有饱和输入的确定性线性系统而提出的控制器设计方法, 可避免控制输入的饱和, 但其鲁棒性较差<sup>[1,2]</sup>。LHG设计方法考虑了输

收稿日期: 2003-07-23; 修回日期: 2003-10-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69934030); 国防预研项目“飞机实时与远程故障诊断技术”(41327030103)。

作者简介: 胡剑波(1965—), 男, 浙江慈溪人, 博士, 从事装备信息化、控制理论及其应用的研究; 褚健(1963—), 男, 浙江淳安人, 教授, 博士生导师, 从事企业综合自动化、控制理论和应用的研究。

入附加干扰和不确定性,从而提高了系统的控制性能,但其控制增益参数的确定比较困难,尤其在综合 PLC/LHG 算法的实现上,控制器的参数确定更为复杂 VSC 是一种对输入附加干扰和不确定性具有极强鲁棒性的设计方法<sup>[4]</sup>,而由 PLC 设计,可得到相应的分段 Lyapunov 函数级集,并且级集是依次嵌套的 这样,只要在原有 PLC 控制器的基础上,迭加一个由 VSC 趋近控制项与继电控制项组成的控制项,即可克服输入干扰和不确定性的影响 VSC 的趋近控制项相当于 LHG 控制律中的高增益项,可提高控制性能;而 VSC 的继电控制项可提高闭环系统的鲁棒性

本文给出了 PLC 设计算法,分析 PLC 相应的分段 Lyapunov 函数级集,迭加 VSC 控制项,得到综合 PLC/VSC 控制器设计算法,并进行稳定性分析 结合单摆控制问题,验证了本文控制器设计算法的有效性

## 2 问题的描述

考虑具有执行器位置饱和、输入干扰和不确定性的线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B \text{Sat}_\Delta(u + f(x) + d), \\ x(0) &\in X \subset R^n, u \in R^m, \end{aligned} \quad (1)$$

其中饱和函数  $\text{Sat}_\Delta(\bullet)$  见定义 1. 局部 Lipschitz 函数  $f: R^n \rightarrow R^m$  表示输入附加不确定性,  $d$  为输入附加干扰

**定义 1** 对  $v = [v_1, \dots, v_m]$ ,  $\Delta = [\Delta_1, \dots, \Delta_m]$ ,  $\Delta_i > 0, i = 1, \dots, m$ ,  $\text{Sat}_\Delta(v)$  定义为

$$\begin{cases} \text{Sat}_\Delta(v) = [\text{Sat}_{\Delta_1}(v_1), \dots, \text{Sat}_{\Delta_m}(v_m)], \\ \text{Sat}_{\Delta_i}(v_i) = \min\{\Delta_i, |v_i|\} \text{sgn}(v_i). \end{cases} \quad (2)$$

对系统(1)引入如下定义和假设:

**假设 1** 矩阵对  $(A, B)$  为可控对

**假设 2** 干扰  $d$  和不确定性  $f(x)$  满足

$$f(x) + d \leq g_0 + g_1 \|x\| \quad (3)$$

的范数有界条件,且非负参数  $(g_0, g_1)$  已知

**定义 2** 称

$$\dot{x} = Ax + B \text{Sat}_\Delta(u), x(0) \in X \subset R^n, u \in R^m \quad (4)$$

为系统(1)的标称系统

**定义 3** 称数据集  $(g_0, g_1, \mathcal{G}_v)$  为状态反馈可允许的,如果  $g_0, g_1$  为非负实数,则  $Z$  为包含原点的内部点  $R^n$  子集

本文的设计任务是:基于 PLC 及 VSC,设计状态反馈综合 PLC/VSC 控制器,在执行器受到制约

的情况下,使系统(1)从初始状态集合  $x(0) \in X$  的任意位置出发,在有限时间内到达  $R^n$  子集  $\mathcal{G}_v$ . 一旦进入  $\mathcal{G}_v$ ,将保留在该子集中,并渐近地趋向于系统原点

## 3 控制器的设计

### 3.1 PLC 设计算法

考虑系统(1)的标称系统(4),首先给出系统(4)的 PLC 控制器设计算法 该算法基于 LQ Riccati 方程

$$A^T P + PA + PAR^{-1}B^T P + I = 0 \quad (5)$$

其中:  $R = \text{diag}(\Gamma) = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_m)$ ,  $\tau_i > 0, i = 1, \dots, m$ , 这些参数的数值将在下面的算法中确定 PLC 设计的关键是有关 Lyapunov 函数级集的结论,即:

**引理 1**<sup>[1]</sup> 对于由系统(4)及 LQ 控制律:  $u = -R^{-1}B^T P x$  所组成的闭环系统, Lyapunov 级集

$$\mathcal{E}(P, \rho) = \{x: x^T P x \leq \rho, \forall \rho > 0\} \quad (6)$$

是不变集,在  $x \in \mathcal{E}(P, \rho)$  时,控制输入量不出现输入饱和

**注 1** 为了保证不出现输入饱和,需要合理地选择参数  $\epsilon, \rho$ ,其目标是通过分段地改变状态反馈增益,保证在任何状态下不出现输入饱和的前提下,使轨迹逐步达到稳定原点,具体参见文献[1]

根据文献[1]中的研究结果,可按以下迭代算法:

$$\begin{cases} \Gamma_{n+1} = \sqrt{\rho} \mathcal{Q}(\Gamma_n), \\ \mathcal{Q}(\Gamma_n) = (\mathcal{Q}_1(\Gamma_n), \dots, \mathcal{Q}_m(\Gamma_n)), \\ \mathcal{Q}_i(\Gamma_n) = \frac{1}{\Delta_i} (b_i^T P b_i)^{\frac{1}{2}}, i = 1, \dots, m, \\ A^T P(\Gamma_n) + P(\Gamma_n)A - \\ P(\Gamma_n)B R^{-1}(\Gamma_n)B^T P(\Gamma_n) + I = 0, \\ R = \text{diag}(\Gamma_n) = \text{diag}(\tau_{1n}, \dots, \tau_{mn}). \end{cases} \quad (7)$$

得到保证不出现执行器饱和的控制律:  $u = -R^{-1}(\Gamma)B^T P(\Gamma)x$ ,并可确定  $\rho$  所对应的  $\Gamma = \lim_n \Gamma_n$ ,以及矩阵  $P$ .

**注 2** 可以看出,对于给定的状态,为了保证控制输入不出现饱和,  $\rho$  越大,其反馈增益应越小 设定合理的  $\epsilon, \rho_0$  是该控制方法的基础,文献[1]给出了一种“验算 .. ARE 求解 ... 有效确认”的循环算法 根据迭代公式,首先预设一个  $\rho_0$ ,并确定相应的固定点  $\Gamma(\rho_0)$ ;求解对应的 ARE 方程,得到  $P(\rho_0)$  和  $\mathcal{G}_v: x^T P(\rho_0)x \leq \rho_0$ ;根据初始条件计算  $x_0^T P(\rho_0)x_0 - \rho_0$ ,如果  $x_0^T P(\rho_0)x_0 - \rho_0 > 0$ ,则增加  $\rho_0$ ,重新计算

$\mathcal{G}$ ; 如果  $x_0^T P(\rho_0)x_0 - \rho_0 < 0$ , 则减少  $\rho_0$ , 重新计算  $\mathcal{G}$ , 最终得到合理的  $\mathcal{G}$  和  $\rho_0$

有关上述迭代算法的收敛性和固定点的唯一性, 可参见文献[1]. 研究表明, 当  $\rho$  分别取  $\rho_1, \rho_2$  时, 如果  $\rho_1 > \rho_2$ , 那么其对应矩阵  $P_1, P_2$  满足:  $P_2/\rho_2 - P_1/\rho_1 > 0$ , 可进一步得出  $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_1$ . 如果选择  $\rho_i = \rho_0(\Delta\rho)^i, \Delta\rho_i < 1, i = 1, \dots, N$ , 将式(7) 根据  $\rho_i$  得到的  $P$  和  $\mathcal{E}$  分别记为:  $P_i$  和  $\mathcal{E}_i$ , 并可得出  $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_{N-1} \subset \dots \subset \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{G}$ . 因此系统(4) 的 PLC 设计算法如下:

**Step1** 对于给定的初始条件  $x(0) \in X \subset R^n$ , 选择初始级集

$$\mathcal{G}_0 = \inf_{\rho} \{ \mathcal{E}(P, \rho) : X \subset \mathcal{E}(P, \rho) \}. \quad (8)$$

式(8) 所对应的  $\rho$  即为  $\rho_0$ , 相应的  $P$  和  $\Gamma$  分别记为  $P_0 = P(\Gamma_0), \Gamma_0$ , 使得对于  $x \in \mathcal{G}_0$ , 有

$$\begin{cases} x^T P(\Gamma_0)x \leq \rho_0, \\ A^T P(\Gamma_0) + P(\Gamma_0)A - \\ P(\Gamma_0)BR^{-1}(\Gamma_0)B^T P(\Gamma_0) + I = 0, \\ R_0 = \text{diag}(\Gamma_0). \end{cases} \quad (9)$$

由文献[1], 此时保证了在  $\mathcal{G}_0: x^T P(\rho_0)x = \rho_0$  时, 控制输入不会出现饱和现象

**Step2** 令  $\rho_1 = \rho_0\Delta\rho, \Delta\rho \in (0, 1)$ , 利用迭代算法(7), 确定相应的  $\Gamma_1, P_1 = P(\Gamma_1)$ , 使得对于  $x \in \mathcal{E}_1$ , 有

$$\begin{cases} x^T P(\Gamma_1)x \leq \rho_1, \\ A^T P(\Gamma_1) + P(\Gamma_1)A - \\ P(\Gamma_1)BR^{-1}(\Gamma_1)B^T P(\Gamma_1) + I = 0, \\ R(\Gamma_1) = \text{diag}(\Gamma_1), \\ \mathcal{E}_1 = \{x : x^T P(\Gamma_1)x \leq \rho_1\}, \\ \vdots \end{cases} \quad (10)$$

由文献[1] 可知, 此时得到的  $\mathcal{E}_1$  和  $\rho_1$  保证了控制输入在  $\mathcal{E}_1: x^T P(\rho_1)x = \rho_1$  时不会出现饱和现象

**StepN** 令  $\rho_N = \rho_0(\Delta\rho)^N, \Delta\rho \in (0, 1)$ , 利用迭代算法(7), 确定相应的  $\Gamma_N, P_N = P(\Gamma_N)$ , 使得对于  $x \in \mathcal{G}_N$ , 有

$$\begin{cases} x^T P(\Gamma_N)x \leq \rho_N, \\ A^T P(\Gamma_N) + P(\Gamma_N)A - \\ P(\Gamma_N)BR^{-1}(\Gamma_N)B^T P(\Gamma_N) + I = 0, \\ R(\Gamma_N) = \text{diag}(\Gamma_N), \\ \mathcal{G}_N = \{x : x^T P(\Gamma_N)x \leq \rho_N\}, \end{cases} \quad (11)$$

最后, 根据上述结果, 构造 PLC 控制律为

$$u_{\text{PLC}} = \begin{cases} -R^{-1}(\Gamma_i)B^T P(\Gamma_i)x, & x \in \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1}; \\ -R^{-1}(\Gamma_N)B^T P(\Gamma_N)x, & x \in \mathcal{G}_N. \end{cases} \quad (12)$$

**注3**  $N$  的确定与系统的控制要求有关, 对于

步骤  $N$ , 要求在保证控制输入不出现饱和的前提下, 确保  $\mathcal{G}_N = \{x : x^T P(\Gamma_N)x \leq \rho_N\}$ . 对于实际系统, 因干扰的影响, 而得不到及时的控制输入补偿, 可导致状态  $x$  偏离  $\mathcal{G}_N$ ,  $x$  要逐步再回到区域  $\mathcal{G}_N$  中. 大量的计算表明, 在初始条件确定的前提下, 选择较大的  $N$  可保证控制信号的缓慢变化, 从而提高控制效益和控制精度. 但当  $N$  选择较大时, 将导致控制器的复杂性, 一般  $N$  选取范围为  $5 \sim 100$ .

**注4**  $x \in \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1}$ , 即  $x$  位于区域  $\mathcal{E}_i \sim \mathcal{E}_{i+1}$ .

### 3.2 具有饱和和执行器确定性线性系统的综合 PLC/VSC 控制律设计算法

**定理1** 考虑系统(4), 在利用算法1 构造 Lyapunov 函数级集的同时, 控制律可采用如下形式:

$$\begin{aligned} u_j^i &= \Delta_j \text{sgn}(u_{\text{PLC}}^i), \\ u &= \begin{cases} u^i, & x \in \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1}; \\ u^N, & x \in \mathcal{G}_N. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} u_{\text{PLC}}^i &= -R^{-1}(\Gamma_i)B^T P(\Gamma_i)x = (u_{\text{PLC}}^i, \dots, u_{\text{PLC}}^i), \\ u^i &= [u^i, \dots, u^i]. \end{aligned}$$

闭环系统状态将在有限时间内到达区域  $\mathcal{G}_N$ , 并且一旦进入该区域将使闭环系统状态渐近地趋向于零.

**证明** 因为  $u_j^i = \Delta_j \text{sgn}(u_{\text{PLC}}^i)$ , 控制输入不会出现饱和现象. 根据 PLC 设计算法, 可得出  $\mathcal{G}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{G}_N$  是嵌套的, 即

$$\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \dots \subset \mathcal{E}_N \subset \mathcal{G}_N$$

现在设  $x \in \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1}$ , 选取 Lyapunov 函数

$$V_i = x^T P(\Gamma_i)x,$$

可得出上述 Lyapunov 函数沿着闭环系统(4) 和(13) 轨迹的时间导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= -x^T x - x^T P(\Gamma_i)BR^{-1}(\Gamma_i)B^T P(\Gamma_i)x + \\ & 2x^T P(\Gamma_i)B(\text{Sat}_{\Delta}(u^i) - u_{\text{PLC}}^i) = \\ & -x^T x - x^T P(\Gamma_i)BR^{-1}(\Gamma_i)B^T P(\Gamma_i)x - \\ & \sum_{j=1}^m \Gamma_j u_{\text{PLC}}^i (\Delta_j \text{sgn}(u_{\text{PLC}}^i) - u_{\text{PLC}}^i). \end{aligned}$$

考虑到  $x \in \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1}$  时,  $|u_{\text{PLC}}^i| \leq \Delta_j$ , 则有

$$\dot{V}_i = -x^T x - x^T P(\Gamma_i)B^T P(\Gamma_i)x \leq 0$$

由文献[1], 在控制律(13) 的作用下, 系统(4) 将从初始位置, 依次进入嵌套级集  $\mathcal{G}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{G}_N$ . 一旦引入  $\mathcal{G}_N$ , 按相同的方法可证明

$$\dot{V}_N = -x^T x - x^T P(\Gamma_N)B^T P(\Gamma_N)x \leq 0$$

当且仅当  $x = 0$  时, 等式成立

### 3.3 具有输入附加不确定性和干扰且执行器饱和的线性系统综合 PLC/VSC 控制算法

当系统(4) 受到输入干扰和不确定性时, 控制律(12) 不具有干扰抑制能力, 从而闭环系统的鲁棒性较差 为此, 本文进一步研究系统(1), 在上述  $u_{PLC}$  的基础上, 迭加 VSC 控制项, 以抵消干扰及不确定性对系统运行性能的影响

**定理 2** 对于系统(1), 当满足假设 1 和假设 2 时, 引入基于 PLC 的下列改进控制律:

$$u = \begin{cases} -R^{-1}(\Gamma_i)B P(\Gamma_i)x - k_{i0}(g_0 + g_1 x) \times \\ \text{sgn}(R^{-1}(\Gamma_i)B P(\Gamma_i)x) - k_{i1}R^{-1}(\Gamma_i)B P(\Gamma_i)x, \\ x \in \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1}, k_{i0} > 1, k_{i1} > 0; \\ -R^{-1}(\Gamma_N)B P(\Gamma_N)x - k_{N0}(g_0 + g_1 x) \times \\ \text{sgn}(R^{-1}(\Gamma_N)B P(\Gamma_N)x) - k_{N1}R^{-1}(\Gamma_N)B P(\Gamma_N)x, \\ x \in \mathcal{E}_N, k_{N0} > 1, k_{N1} > 0 \end{cases} \quad (14)$$

可以保证闭环系统顺序地进入嵌套级集:  $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N$ , 从而在有限时间内达到  $\mathcal{E}_N$ . 同时, 一旦进入  $\mathcal{E}_N$ , 系统状态将趋向于零

**证明** 根据上述 PLC 设计算法, 可以得出  $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N$  是嵌套的, 即  $\mathcal{E}_N \subset \mathcal{E}_{N-1} \subset \dots \subset \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_0$  设  $x \in \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1}$ , 选取 Lyapunov 函数  $V_i = x^T P(\Gamma_i)x$ , 可得出上述 Lyapunov 函数沿着闭环系统(1) 和(14) 轨迹的时间导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & -x^T x - x^T P(\Gamma_i)B R^{-1}(\Gamma_i)B P(\Gamma_i)x + \\ & 2x^T P(\Gamma_i)B [\text{Sat}_\Delta(u + f(x) + d) - u_{PLC}^i] \\ & -x^T x - x^T P(\Gamma_i)B R^{-1}(\Gamma_i)B P(\Gamma_i)x + \\ & 2x^T P(\Gamma_i)B [\text{Sat}_\Delta(u_{PLC}^i(1 + k_{i1}) + \\ & (k_{i0} - 1)(g_0 + g_1 x) \text{sgn}(u_{PLC}^i)) - u_{PLC}^i] \end{aligned}$$

令

$$h_j^i = u_{PLC,j}^i(1 + k_{i1}) + (k_{i0} - 1)(g_0 + g_1 x) \text{sgn}(u_{PLC}^i),$$

可得  $|h_j^i| \leq |u_{PLC,j}^i|$  因为

$$\begin{cases} \text{Sat}_\Delta(v) = [\text{Sat}_{\Delta_1}(v_1), \dots, \text{Sat}_{\Delta_m}(v_m)], \\ \text{Sat}_{\Delta_i}(v_i) = \min\{\Delta_i, |v_i|\} \text{sgn}(v_i), \end{cases}$$

同时对于  $x \in \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1}$ , 恒有  $|u_{PLC,j}^i| \leq \Delta_j$  于是

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & -x^T x - x^T P(\Gamma_i)B R^{-1}(\Gamma_i)B P(\Gamma_i)x - \\ & 2 \sum_{j=1}^m \Gamma_{ji} |u_{PLC,j}^i| [\min(\Delta_j, |h_j^i|) - |u_{PLC,j}^i|] \\ & -x^T x - x^T P(\Gamma_i)B R^{-1}(\Gamma_i)B P(\Gamma_i)x \leq 0 \end{aligned}$$

由文献[1], 系统(1) 在控制律(14) 的作用下, 系统将从初始位置, 依次进入嵌套级集  $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N$ . 一旦引入  $\mathcal{E}_N$ , 按照同样的方法可以证明

$$V_N = x^T x - x^T P(\Gamma_N)B R^{-1}(\Gamma_N)B P(\Gamma_N)x \leq 0, \text{ 当且仅当 } x = 0 \text{ 时, 等式成立}$$

**注 5** 系统(1) 在未受到外部干扰和不确定性时, 定理 1 表示控制分量  $u_j^i$  可采用幅值为  $\Delta_j$ , 切换函数为  $u_{PLC,j}^i$  的继电控制律 此时, 闭环系统将具有棒-棒控制性能, 即具有快速性

**注 6** 控制律(14) 中的继电控制项可有效抑制输入的附加干扰和不确定性 而与一般 PLC 控制律成正比的附加的控制项, 相当于 PLC/LHG 中的高增益控制项, 可改善控制性能, 也可提高系统快速性能

## 4 算 例

考虑单摆在平衡点附近的动力学系统<sup>[1]</sup>

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{Sats}(u + \sin t), \quad (15)$$

$$\theta(0) = 54^\circ; \dot{\theta}(0) = 20 \text{ s}^{-1}$$

其中  $\sin t$ , 为系统输入附加干扰 根据系统的初始条件和式(8), 通过 Riccate 方程(5) 的求解和比较, 结合文献[1], 选择

$$\rho_0 = 7.07, \Gamma_0 = 0.4447, \Delta\rho = 0.5$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 7.073 & 0 & 0 & 0.497 \\ 0 & 0.497 & 0 & 0.6992 \end{bmatrix}$$

选取  $N = 5$ , 根据本文设计算法, 依次得到

$$i = 1, \rho_1 = 3.5350, \Gamma_1 = 0.2501,$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 5.6467 & 0 & 0.496 \\ 0 & 0.496 & 0 & 0.5549 \end{bmatrix},$$

$$i = 2, \rho_2 = 1.7675, \Gamma_2 = 0.1764,$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 4.5256 & 0 & 0.496 \\ 0 & 0.496 & 0 & 0.4403 \end{bmatrix},$$

$$i = 3, \rho_3 = 0.8838, \Gamma_3 = 0.1111,$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 3.6465 & 0 & 0.489 \\ 0 & 0.489 & 0 & 0.3493 \end{bmatrix},$$

$$i = 4, \rho_4 = 0.4419, \Gamma_4 = 0.0700,$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 2.9615 & 0 & 0.483 \\ 0 & 0.483 & 0 & 0.2770 \end{bmatrix},$$

$$i = 5, \rho_5 = 0.2209, \Gamma_5 = 0.0441,$$

$$P_5 = \begin{bmatrix} 2.4328 & 0 & 0.474 \\ 0 & 0.474 & 0 & 0.2196 \end{bmatrix}.$$

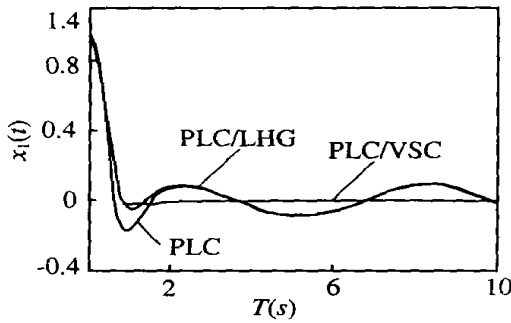
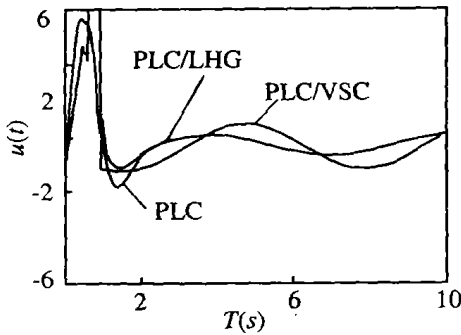
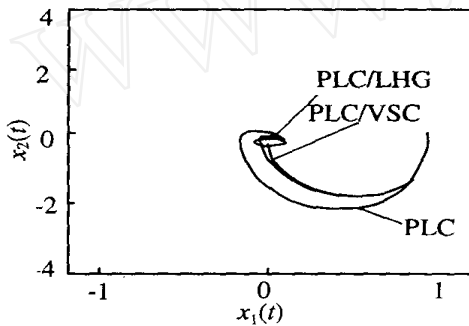
(a)  $x_1(\theta) \dots T(s)$ (b)  $u(t) \dots T(s)$ (c)  $x_2(\theta) \dots x_1(\theta)$ 

图1 仿真计算结果

图1给出了PLC, PLC/LHG与PLC/VSC控制律分别作用在具有扰动的系统(15)的结果。这些结果表明PLC/VSC的控制性能远优于PLC和PLC/LHG的控制性能,且系统的输出 $\theta$ 没有超调。文中没有给出PLC/VSC与PLC, PLC/LHG在系统不存在干扰作用时的控制结果比较,但PLC/VSC比PLC, PLC/LHG的过渡过程更快,且没有超调量。

注7 实际上,为了防止控制信号的抖动,本文在仿真中采用了如下近似算法:

$$\text{sgn}(s) = \frac{1 - \exp(-\mu s)}{1 + \exp(-\mu s)}, \mu > 0$$

同时,该控制器的切换平面是随着状态 $x$ 的改变而变化的,不保证滑模运动的存在,因此不一定出现一般VSC的控制信号抖动现象。在该初始条件下,除了开始时刻有切换函数符号变化外,其余时刻切换平面符号函数 $\text{sgn}(\bullet)$ 数值保持不变。综合上述因素可知,控制信号只在开始时有较剧烈的变化,而后是缓慢变化的。

## 5 结论

本文基于LQ理论和VSC方法,从Lyapunov函数级集出发,充分利用可达到的控制作用,得到了一种可以实现棒-棒控制的PLC/VSC算法。对具有输入干扰、不确定性和饱和执行器的线性系统,本文得出一种综合PLC/VSC控制律设计方法,并分析了所得闭环系统的稳定性。该控制算法结合了PLC算法和VSC算法的优点,使得闭环系统具有了干扰抑制能力,能够保证系统状态依次进入Lyapunov函数级集,并在有限时间内到达含有零点的小Lyapunov级集中。以单摆控制问题为例,构造了相应的PLC, PLC/LHG和PLC/VSC控制器。仿真研究表明,PLC/VSC同时具有抑制输入干扰以及不确定性影响和提高闭环系统快速性能的作用,并可以减少输出超调,从而证实了所提出设计方法的有效性。

## 参考文献(References):

- [1] Wredenhagen G F, Belanger P R. Piecewise-linear LQ control for systems with input constraints[J]. *Automatica*, 1994, 30(3): 403-416
- [2] Lin Z, Ali S, Andrew R T. Control of linear systems with saturating actuators[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(3): 368-378
- [3] Lin Z. Global control of linear systems with saturating actuators[J]. *Automatica*, 1998, 34(7): 897-905
- [4] Utkin V I. *Sliding modes in Control and Optimization* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992
- [5] Lin Z. State and output feedback design for robust tracking of linear systems with rate limited actuators [A]. 1999 *IFAC 14th Triennial World Congress* [C]. Beijing, 1999. 163-168
- [5] Hu Jianbo, CHU Jian, SU Hongye. Combined PLC/VSC for linear systems with input constraints [A]. *Proc of the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation* [C]. Hefei, 2000. 2884-2888
- [6] Hu J B, Chu J, Su H Y. Combined PLC/VSC for linear systems with input constraints [A]. *Proc of the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation* [C]. Hefei, 2000. 2884-2888