

文章编号: 1001-0920(2004)08-0903-04

语言判断矩阵满意一致性的判定方法

樊治平, 姜艳萍

(东北大学 工商管理学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘要: 研究语言判断矩阵的满意一致性问题. 在给出语言判断矩阵及其满意一致性有关概念的基础上, 提出一种关于具有严格偏好关系的语言判断矩阵满意一致性的判定方法. 依据所给出的判定方法, 可相应地得出关于语言判断矩阵的方案优劣的排序方法. 最后通过两个算例说明了所给出方法的有效性.

关键词: 语言判断矩阵; 满意一致性; 判定方法

中图分类号: N 945.25; C 934 **文献标识码:** A

A judgment method for the satisfying consistency of linguistic judgment matrix

FAN Zhi-ping, JIAN G Yan-ping

(School of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110004, China Correspondent: FAN Zhi-ping, E-mail: zhipingfan@yahoo.com)

Abstract: The problem of satisfying consistency of linguistic judgment matrix is discussed. Based on introducing the conceptions of linguistic judgment matrix and its satisfying consistency, a judgment method is presented to judge whether the linguistic judgment matrix with exacting preference relation has satisfying consistency. Then, according to the judgment method, the method for ranking alternatives based on the linguistic judgment matrix is also obtained. Finally, two examples show the effectiveness of the proposed method.

Key words: linguistic judgment matrix; satisfying consistency; judgment method

1 引言

在决策分析中, 决策者给出两两方案比较的判断矩阵是一种常见的偏好信息形式. 但由于判断事物的模糊性和不确定性, 判断矩阵中的元素有时无法用确定的数值表示, 而采用自然语言短语表示则更为方便^[1]. 因此, 以自然语言短语评价信息形式给出的判断矩阵(简称语言判断矩阵)的决策分析方法的研究, 近年来已引起人们的广泛关注^[2~8]. 例如, 文献[2]研究了群决策中具有语言判断矩阵和数值

判断矩阵两类信息的集结方法; 文献[3, 5]采用 OWA 算子直接对语言评价集进行计算, 从而得到群决策结果; 文献[6, 7]通过对语言评价集相应的隶属函数进行分析得到了群集结果.

从已有的研究成果看, 大多注重有关语言判断矩阵集成方法的研究, 而对语言判断矩阵本身所具有的性质研究甚少, 尤其对类似于 AHP 中判断矩阵的一致性问题的研究近乎空白^[8]. 本文依据模糊互补判断矩阵满意一致性判定方法的研究思

收稿日期: 2003-10-08; 修回日期: 2003-12-11.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70371050, 70301008); 教育部高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划资助项目(教人司[2002]123); 辽宁省自然科学基金资助项目(20032028); 中国博士后科学基金资助项目(2002032173); 辽宁省教育厅高等学校科学研究项目(202082008).

作者简介: 樊治平(1961—), 男, 江苏镇江人, 教授, 博士生导师, 从事决策理论与应用、信息技术与管理等研究; 姜艳萍(1968—), 女, 辽宁沈阳人, 副教授, 博士后, 从事决策理论与应用等研究.

路^[9],研究了具有严格偏好关系的语言判断矩阵的一致性判定问题

2 语言判断矩阵及其满意一致性

为叙述方便,记 $I = \{1, 2, \dots, n\}$. 所考虑的决策问题是从一个有限方案集 $X = \{x_i | i \in I\}$ 中选择最好的方案或进行方案排序,其中 x_i 表示第 i 个方案在方案优选中,所依据的决策信息是决策者提供的一类语言判断矩阵的偏好信息形式. 下面给出这种形式偏好信息的简单描述^[2-8].

决策者针对方案集 X 给出的两两方案优劣比较的偏好信息,可由一个矩阵 $\hat{P} = (p_{ij})_{n \times n}$ 描述,矩阵元素 p_{ij} 是从一个预先定义的语言短语评价(或语言符号)集合 $S = \{s_i | i \in \{0, 1, \dots, T\}\}$ 中选择一项 s_k ,作为方案 x_i 与方案 x_j 相互比较的优劣关系的评价结果. 例如,一个由13个元素构成的语言评价集 S 可描述为 $S = \{s_0 = DD = \text{绝对差}, s_1 = VHD = \text{相当差}, s_2 = HD = \text{很差}, s_3 = MD = \text{差}, s_4 = LD = \text{较差}, s_5 = VLD = \text{稍差}, s_6 = AS = \text{相当}, s_7 = VLP = \text{稍好}, s_8 = LP = \text{较好}, s_9 = MP = \text{好}, s_{10} = HP = \text{很好}, s_{11} = VHP = \text{相当好}, s_{12} = DP = \text{绝对好}\}$. 可见,集合 S 中有 $T + 1$ 个元素,并要求 S 具有如下性质:

- 1) 有序性: 当 $i < j$ 时,有 $s_i < s_j$ 或 $s_j > s_i$,即表示 s_i 劣于 s_j 或 s_j 优于 s_i ;
- 2) 存在一个逆运算 neg : $\text{neg}(s_i) = s_j, j = T - i$;
- 3) 极大化运算: 当 $s_i \leq s_j$ 时,有 $\max\{s_i, s_j\} = s_j$;
- 4) 极小化运算: 当 $s_i \geq s_j$ 时,有 $\min\{s_i, s_j\} = s_i$.

根据语言评价集 S 中元素的描述,对矩阵 \hat{P} 中的元素可作如下规定:

- 1) $p_{ij} = s_{T/2}$,表示方案 x_i 与 x_j 无差别,记为 $x_i \sim x_j$;
- 2) $p_{ij} = s_k, S^L = \{s_0, s_1, \dots, s_{(T/2)-1}\}$,表示方案 x_j 优于 x_i ,记为 $x_j \succ x_i$,且 k 越小,说明方案 x_j 优于 x_i 的程度越大;
- 3) $p_{ij} = s_k, S^U = \{s_{(T/2)+1}, s_{(T/2)+2}, \dots, s_T\}$,表示方案 x_i 优于 x_j ,记为 $x_i \succ x_j$,且 k 越大,说明方案 x_i 优于 x_j 的程度越大.

定义1^[2-8] 对于矩阵 $\hat{P} = (\hat{p}_{ij})_{n \times n}$,若其元素 \hat{p}_{ij} 对 $\forall i, j \in I$ 满足下列性质: $\hat{p}_{ij} \in S; \hat{p}_{ii} = s_{T/2}; \hat{p}_{ij} = s_k, \hat{p}_{ji} = \text{neg}(s_k)$. 则称矩阵 \hat{P} 为语言判断矩阵. 为叙述方便,记

$$S^L_{T/2} = \{s_0, \dots, s_{(T/2)-1}, s_{T/2}\},$$

$$S^U_{T/2} = \{s_{T/2}, s_{(T/2)+1}, \dots, s_T\};$$

记 $x_i \succ x_j$ 表示决策者认为方案 x_i 不劣于方案 x_j ,即 $x_i \succ x_j$ 或 $x_i \sim x_j$,相应的矩阵 \hat{P} 中的元素 $p_{ij} \in S^U_{T/2}$.

定义2 对于语言判断矩阵 $\hat{P} = (\hat{p}_{ij})_{n \times n}$,若对 $\forall i, j, k \in I$,当 $\hat{p}_{ij} \in S^U_{T/2}, \hat{p}_{jk} \in S^U_{T/2}$ 时, $\hat{p}_{ik} \in S^U_{T/2}$; 或当 $\hat{p}_{ij} \in S^L_{T/2}, \hat{p}_{jk} \in S^L_{T/2}$ 时, $\hat{p}_{ik} \in S^L_{T/2}$. 则称 \hat{P} 具有满意一致性.

定义2的实质是:若决策者针对方案集 X 给出的方案优劣关系的语言评价具有传递性(即若存在方案优劣排序链 $x_{u_1} \succeq x_{u_2} \succeq x_{u_3} \succeq \dots \succeq x_{u_n}$,其中 x_{u_i} 表示 X 中按方案优劣排在第 i 位的方案),则语言判断矩阵 \hat{P} 具有满意一致性;否则称矩阵 \hat{P} 是不一致的. 因此,根据定义2可直接判定语言判断矩阵 \hat{P} 是否具有满意一致性. 但当方案较多时,直接判定有一定困难. 下面给出一种简便的判定方法.

3 满意一致性判定方法

假设对任意两个方案 x_i 和 x_j 之间的比较具有严格偏好关系,即方案 x_i 优于 x_j 或方案 x_i 劣于 x_j ,对应的语言判断矩阵中除对角线外不存在为 $s_{T/2}$ 的元素. 在这种情况下,关于语言判断矩阵的满意一致性,有如下结论:

定理1 若语言判断矩阵 $\hat{P} = (\hat{p}_{ij})_{n \times n}$ 具有满意一致性,则矩阵 \hat{P} 中存在且仅存在1行,该行(如第 i 行)中的元素均满足

$$p_{ij} \in S^U = \{s_{(T/2)+1}, s_{(T/2)+2}, \dots, s_T\}, \forall j \in I, j \neq i \quad (1)$$

证明 1) 存在性(用归纳法):当 $n = 2$ 时,该定理显然成立. 假设该定理针对子方案集 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ 所对应的判断矩阵 \hat{P} 成立. 下面证明该定理针对方案集 X 所对应的判断矩阵 \hat{P} 亦成立.

根据假设,不妨设第 i 行中前 $n - 1$ 个元素 $\hat{p}_{ij} \in S^U, j = 1, 2, \dots, n - 1, j \neq i$. (2) 则元素 $\hat{p}_{in} \in S^U$ 或 $\hat{p}_{in} \in S^L$. 若 $\hat{p}_{in} \in S^U$,则结论成立;若 $\hat{p}_{in} \in S^L$,则 $\hat{p}_{ni} \in S^U$. 现在考虑第 n 行元素,对于第 n 行,若对 $\forall j \in I, j \neq n$,有 $\hat{p}_{nj} \in S^U$,则定理成立;若第 n 行至少存在一个元素 $\hat{p}_{nk} \in S^L$,可见 $k \in I, k \neq n$,则 $\hat{p}_{kn} \in S^U$;又 $\hat{p}_{ni} \in S^U$,且 \hat{P} 具有满意一致性,则有 $\hat{p}_{ki} \in S^U$,即 $\hat{p}_{ik} \in S^L$,而 \hat{p}_{ik} 为第 i 行中前 $n - 1$ 个元素中的某一个,故与已知 $\hat{p}_{ik} \in S^U$ 矛盾,可见第 n 行中的任意元素均满足 $\hat{p}_{ni} \in S^U$. 因此,无论 $\hat{p}_{in} \in S^U$ 或 $\hat{p}_{in} \in S^L$,该定理均成立.

2) 唯一性: 假设存在 2 行元素, 不妨设第 i 行和第 k 行, 对 $\forall j \neq i$ 和 $\forall j \neq k$, 有 $p_{ik} \in S^U$ 和 $p_{ki} \in S^U$, 显然这是不可能的

定理 2 设 X 是方案集 X 的任意子集, 针对 X 和 X 进行两两方案比较得到的语言判断矩阵, 分别记为 \hat{P} 和 \hat{P} , 则下列命题等价:

- 1) \hat{P} 具有满意一致性;
- 2) \hat{P} 具有满意一致性;
- 3) 存在且仅存在 1 行, 该行(不妨设第 i 行)中的元素无论在矩阵 \hat{P} 中还是在矩阵 \hat{P} 中均满足 $p_{ij} \in S^U, \forall j \in I, j \neq i$

证明 对于 1) \Rightarrow 2), 显然成立; 对于 2) \Rightarrow 3), 根据定理 1 可以得到

对于 3) \Rightarrow 1), 由假设可知, 存在且仅存在 1 行, 不妨设为第 i 行, 该行中的元素无论在矩阵 \hat{P} 中还是在矩阵 \hat{P} 中均满足 $p_{ij} \in S^U, \forall j \in I, j \neq i$

下面利用反证法 若 \hat{P} 不具有满意一致性, 由定义 2, 不妨设存在 $i, j, k \in I$, 使得 $p_{ij} \in S^U$ 且 $p_{jk} \in S^U$ 时有 $p_{ik} \in S^L$. 考虑 $X = \{x_i, x_j, x_k\} \subset X$ 中元素两两比较得到的矩阵 \hat{P} , 则有如下结果:

\hat{P}	x_i	x_j	x_k
x_i	$sr/2$	S^U	S^L
x_j	S^L	$sr/2$	S^U
x_k	S^U	S^L	$sr/2$

可见, 矩阵中每一行元素均满足 $p_{ij} \in S^L, \forall j \in I$. 这与假设矛盾, 故矩阵 \hat{P} 具有满意一致性

由定义 2 知, 对于取定的 $i, p_{ij} (\forall j \in I)$ 表示方案 x_i 优于方案集 X 中其他方案的程度 若 $\min_{\forall j \in I, j \neq i} \{p_{ij}\} \in S^U$, 则说明方案 x_i 优于方案集 X 中其他所有方案, 即方案 x_i 为方案集 X 中的最优方案, 使得 $x_i > x_j (j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n)$. 由定理 2 可知, 若 $\max_{\forall i \in I} \{\min_{\forall j \in I, j \neq i} \{p_{ij}\}\} \in S^U$, 则表示不仅方案 x_i 为方案集 X 中的最优方案, 而且矩阵 \hat{P} 有满意一致性的可能 再根据定理 2, 若矩阵 \hat{P} 具有满意一致性, 则 X 的任意子集 X 对应的判断矩阵 \hat{P} 亦具有满意一致性 故用同样方法可再找出 X 中的最优方案 x_k , 使得 $x_i > x_k > x_j (j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, k-1, k+1, \dots, n)$. 以此类推, 便可以得到方案的优劣排序序列 $x_i > x_k > x_j \dots$; 反之, 若 $\max_{\forall i \in I} \{\min_{\forall j \in I} \{p_{ij}\}\} \in S^L$, 则由定理 1 知, 判断矩阵 \hat{P} 一定不具有满意一致性

由以上分析可知, 依据定理 1 和定理 2, 不仅可以判定语言判断矩阵的满意一致性, 而且对于具有

满意一致性的语言判断矩阵, 同时可以得到方案优劣的排序 具体地, 判定语言判断矩阵 $P = (p_{ij})_{n \times n}$ 满意一致性的方法可按如下步骤进行:

- Step 1: 令 $q = 0$;
- Step 2: 求出 $\hat{p}_i^* = \min \{p_{ij} \mid j = 1, 2, \dots, n; j \neq i\}, i = 1, \dots, n$;
- Step 3: 求出 $\hat{p}_k^{**} = \max \{\hat{p}_i^* \mid i = 1, 2, \dots, n\}$, 若 $\hat{p}_k^{**} \in S^U$, 则 X 中的最优方案为 x_k , 转 Step 4; 否则转 Step 6;
- Step 4: $q = q + 1$, 若 $q = n$, 则矩阵 \hat{P} 具有满意一致性, 相应地得到方案的排序结果, 结束; 否则转 Step 5;
- Step 5: 对矩阵 \hat{P} 中划去 k 行和 k 列, 得到方案集 $X = \{x_i \mid k = 1, \dots, k-1, \dots, k+1, \dots, n\}$ 对应的矩阵 \hat{P} , 并将矩阵 \hat{P} 记为 \hat{P} , 返回 Step 2;
- Step 6: 矩阵 \hat{P} 不具有满意一致性, 结束

4 算 例

某风险投资公司有一笔资金要进行最优投资 有 4 个备选方案, 即某生物制药公司(x_1), 某食品公司(x_2), 某时装公司(x_3) 和某计算机软件公司(x_4). 该公司聘请 2 位专家对方案集 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 进行评价, 专家给出的偏好信息是语言判断矩阵的形式, 即

$$\hat{P}^{(1)} = \begin{bmatrix} AS & LD & MP & MD \\ LP & AS & VLD & MD \\ MD & VLP & AS & HD \\ MP & MP & HP & AS \end{bmatrix},$$

$$\hat{P}^{(2)} = \begin{bmatrix} AS & LD & MP & HD \\ LP & AS & HP & MP \\ MD & HD & AS & HD \\ HP & MD & HP & AS \end{bmatrix}.$$

下面依据上述分析方法, 分别对矩阵 $\hat{P}^{(1)}$ 和 $\hat{P}^{(2)}$ 进行一致性分析和方案排序

将矩阵 $\hat{P}^{(1)}$ 写成如下形式, 并求出矩阵 $\hat{P}^{(1)}$ 中每行元素的 \hat{p}_i^* :

$\hat{P}_0^{(1)}$	x_1	x_2	x_3	x_4	\hat{p}_i^*
x_1	AS	LD	MP	MD	MD
x_2	LP	AS	VLD	MD	MD
x_3	MD	VLP	AS	HD	HD
x_4	MP	MP	HP	AS	MP

进一步求得 $\hat{p}_4^{**} = MP \in S^U$. 由定理 2 可知, x_4 为方案集 X 中的最优方案, 即 $x_4 > x_k (k = 1, 2, 3)$. 从矩阵 $\hat{P}_0^{(1)}$ 中划去第 4 行和第 4 列元素, 可得方案子集

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$ 对应的判断矩阵 $\hat{P}_1^{(1)}$ 如下:

$\hat{P}_1^{(1)}$	x_1	x_2	x_3	$\hat{p}_{i_1}^*$
x_1	AS	LD	MP	LD
x_2	LP	AS	VLD	VLD
x_3	MD	VLP	AS	MD

可见, $\hat{p}_{i_1}^* \succ^L \forall i$ 根据定理1, 矩阵 $\hat{P}^{(1)}$ 不具有满意一致性. 事实上, 由矩阵 $\hat{P}^{(1)}$ 可得 $x_1 \succ_{MP} x_3 \succ_{VLP} x_2 \succ_{LP} x_1$, 形成了一个关于方案优劣的循环链, 因此决策者的判断是不一致的.

将矩阵 $\hat{P}^{(2)}$ 写成如下形式, 并求出相应的 $\hat{p}_{i_0}^*$.

$\hat{P}_0^{(2)}$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\hat{p}_{i_0}^*$
x_1	AS	LD	MP	HD	HD
x_2	LP	AS	HP	MP	LP
x_3	MD	HD	AS	HD	HD
x_4	HP	MD	HP	AS	MD

进一步求得 $\hat{p}_{i_0}^* = LP \succ^U$. 由定理2可知, x_2 为方案集 X 中的最优方案, 即 $x_2 \succ x_k (k = 1, 3, 4)$. 从矩阵 $\hat{P}_0^{(2)}$ 中划去第2行和第2列元素, 可得方案子集 $X = \{x_1, x_3, x_4\}$ 对应的判断矩阵 $\hat{P}_1^{(2)}$ 如下:

$\hat{P}_1^{(2)}$	x_1	x_3	x_4	$\hat{p}_{i_1}^*$
x_1	AS	MP	HD	HD
x_3	MD	AS	HD	HD
x_4	HP	HP	AS	HP

进一步求得 $\hat{p}_{i_1}^* = HP \succ^U$, 则 $x_4 \succ x_k (k = 1, 3)$. 再从矩阵 $\hat{P}_1^{(2)}$ 中划去 x_4 所在的行和列元素, 可得判断矩阵 $\hat{P}_2^{(2)}$ 的形式如下:

$\hat{P}_2^{(2)}$	x_1	x_3	$\hat{p}_{i_2}^*$
x_1	AS	MP	MP
x_3	MD	AS	MD

由 $\hat{p}_{i_2}^* = MP \succ^U$, 可得 $x_1 \succ x_3$, 即有方案排序列 $x_2 \succ x_4 \succ x_1 \succ x_3$, 显然 $\hat{P}^{(2)}$ 具有满意一致性.

5 结 语

本文研究了具有严格偏好关系的语言判断矩阵满意一致性的判定问题. 这是继文献[8]之后给出的一种新的分析方法. 该方法不仅给出了简捷的满意一致性的判定方法, 而且同时可以相应得到方案的

排序结果. 需要指出的是, 如果考虑语言判断矩阵中存在两个方案无差别的情况, 则相应判定方法的研究仍具有一定的难度, 这是今后需要解决的问题.

参考文献(References):

- [1] Marin M U, Itsuo H, Hiroyuki T. Linguistic labels for expressing fuzzy preference relations in fuzzy group decision making [J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics*, 1998, 28(2): 205-218
- [2] Delgado M, Herrera F, Herrera-Viedma E, et al. Combining numerical and linguistic information in group decision making [J]. *Information Sciences*, 1998, 107(1): 177-194
- [3] Bordogna G, Fedrizzi M, Pasi G. A linguistic modeling of consensus in group decision making based on OWA operators [J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 1997, 27(1): 126-132
- [4] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 78(1): 73-87.
- [5] Delgado M, Verdegay J L, Vila M A. On aggregation operations of linguistic label [J]. *Int J of Intelligent Systems*, 1993, 8(2): 351-370
- [6] Carlsson C, Fullér R. Benchmarking in linguistic importance weighted aggregations [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 114(1): 35-41.
- [7] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. A model of consensus in group decision making under linguistic assessments [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 79(1): 73-87.
- [8] 樊治平, 肖四汉. 基于自然语言符号表示的比较矩阵的一致性及其排序方法 [J]. *系统工程理论与实践*, 2002, 22(5): 87-91.
(Fan Z P, Xiao S H. The consistency and ranking method for comparison matrix with linguistic assessment [J]. *System Engineering Theory and Practice*, 2002, 22(5): 87-91.)
- [9] Basile L. *Ranking Alternatives by Weak Transitivity Relations* [M]. London: Kluwer Academic Publishers, 1990