

文章编号: 1001-0920(2004)08-0915-05

## 一种时间序列相似匹配新算法

李秋丹, 迟忠先, 孙瑞超

(大连理工大学 电子与信息工程学院, 辽宁 大连 116024)

**摘要:** 为提高时间序列相似匹配的精度和效率, 提出一种基于小波包变换的时间序列相似匹配算法。首先利用小波包可对信号进行精细分析的特点, 对时间序列进行维数约简, 用变换后的低频系数和部分高频均值系数作为特征向量表示原始序列; 然后用多维索引结构  $R$  树存储这些特征向量, 将欧几里德距离作为相似尺度, 在此基础上实现了范围查询和  $k$  近邻查询。对电力负荷时间序列数据的仿真实验结果表明了算法的有效性。

**关键词:** 时间序列; 相似匹配; 小波包

**中图分类号:** TP311

**文献标识码:** A

## A novel similar matching algorithm for time series data

LI Qiu-dan, CHI Zhong-xian, SUN Rui-chao

(Institute of Electronics and Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Correspondent: LI Qiu-dan, E-mail: liqiudan@student.dlut.edu.cn

**Abstract:** In order to improve the accuracy and efficiency of time series similar matching, a novel similar matching algorithm is proposed. It reduces the dimensionality of time series data with wavelet packet transformation. Then, multidimensional index structure such as  $R$  tree is built using the selected coefficients. Euclidean distance is used as similarity measurement. Range query and  $k$  nearest neighbor query algorithms are presented. Experimental results on electrical load time series data show the effectiveness of the algorithm.

**Key words:** time series; similar matching; wavelet packet

### 1 引言

时间序列是指按时间顺序取得的一系列观测值, 它是一类重要的复杂数据对象, 广泛存在于社会、经济、技术等领域。时间序列中包含很多有用的信息, 从中挖掘出有价值的知识具有重要意义。时间序列相似匹配指从数据库中发现与给定时序序列相似的序列, 是当前时间序列数据挖掘领域中的重点研究课题<sup>[1~4]</sup>。

相似匹配的高效方法: 首先通过采用维数约简技术将高维的时间序列映射为低维特征空间上的特征表示, 达到降低维数的目的; 然后在此特征空间上进行相似搜索。为提高搜索效率和精度, 维数约简技

术应在一定约简维数下, 尽可能多地抽取原序列中的重要信息, 使信息量损失较少。

小波变换具有时频局域化性质和多分辨分析的特点, 近来已被用于代替离散傅立叶变换进行时间序列相似匹配; Chan 等<sup>[1,2]</sup>首次提出使用 Haar 小波进行时间序列相似匹配, Ivan 等<sup>[3,4]</sup>扩展了 Chan 等所使用的小波, 提出用更广泛的一类小波, 即正交小波和双正交小波实现相似匹配。然而, 他们在使用小波变换进行维数约简时, 仅选取序列经小波变换后低频空间的前几个系数作为特征向量, 完全忽略了细节信息。事实上, 并不是所有的小波都能将信号(序列)的能量集中在前几个系数上, 某些高频空间

收稿日期: 2003-09-04; 修回日期: 2003-11-27

作者简介: 李秋丹(1976—), 女(满族), 河北秦皇岛人, 博士生, 从事数据仓库和数据挖掘等研究; 迟忠先(1939—), 男, 山东牟平人, 教授, 博士生导师, 从事数据仓库、数据挖掘和面向对象建模技术等研究。

的细节信息在时序模式发现中也起到了不可忽视的作用,如果完全丢弃,会造成这部分信号信息的丢失,使得相似匹配的精度和效率下降<sup>[1,2]</sup>。鉴于此,本文提出一种基于小波包变换的时间序列相似匹配方法,充分利用小波包可对信号进行更加精细分析的优点,同时考虑尺度信息和细节信息,使得约简后的特征向量包含更多的时间序列有效信息;然后,用多维索引结构R树存储这些特征向量,用欧几里德距离作为相似尺度,在此基础上,进行范围查询和k近邻查询。实验结果表明,该算法具有较高的匹配精度和效率。

## 2 小波包分析

小波包分析是一种比多分辨分析更为精细的分析方法。它不仅对低频空间进行分解,而且对多分辨分析没有细分的高频空间也进行分解,因而提高了时频分辨率。在实际问题中,通常所处理的信号是有限维的,即  $d_0^0 \in l^2(Z_N)$ 。下面给出小波包滤波的快速分解与重构算法定理和图示<sup>[5]</sup>。记  $\bar{x}[n] = x[-n]$ ,  $x$  表示在信号  $x$  的每个样本点之间插入零值得到的新信号。

**定理 1** 设  $h$  表示低通滤波器,  $g$  表示高通滤波器,分解  $d_{j+1}^{2^j}[k] = d_j^j * \bar{h}[2k]$ ,  $d_{j+1}^{2^j+1}[k] = d_j^j * g[2k]$ ; 重构  $d_j^j[k] = d_{j+1}^{2^j}[k] * h[k] + d_{j+1}^{2^j+1}[k] * g[k]$ ,  $j = 2$  时的分解与重构如图 1 所示。

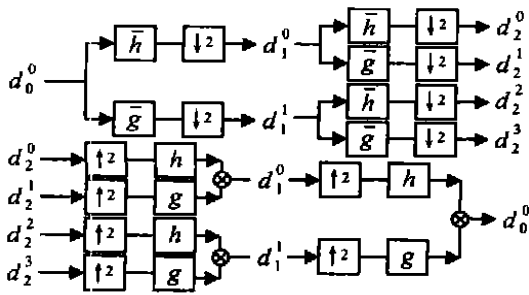


图 1 小波包分解与重构

## 3 基于小波包变换的相似匹配算法

### 3.1 维数约简算法

#### 3.1.1 算法描述

对于一个长度为  $N = 2^n$  ( $n$  为正整数) 的时间序列  $d_0^0$ , 按如下算法进行维数约简(其中维数阈值根据所使用的索引方法和应用需求预先定义, 分解的层数  $J$  也由此确定):

Step 1: 对长度为  $2^n$  的时序  $d_0^0$  进行  $J$  层多分辨分解, 即只对低频空间分解;

Step 2: 对第  $J$  层空间进行小波包分解, 即对  $d_j^j$

和  $d_j^j$  同时进行高低频分解, 得  $d_{j+1}^0, d_{j+1}^1, d_{j+1}^2, \dots, d_{j+1}^{j-1}$ ;

Step 3: 保留  $d_{j+1}^0$ , 对  $d_{j+1}^1$  的采样点按顺序两两取均值, 最后得到的序列记为  $\bar{d}_{j+1}^1$ , 对  $d_{j+1}^2$  和  $d_{j+1}^3$  中的样本点按顺序四四取均值, 最后得到的序列记为  $\bar{\bar{d}}_{j+1}^2, \bar{\bar{d}}_{j+1}^3$ ;

Step 4: 将  $d_{j+1}^0, \bar{d}_{j+1}^1, \bar{\bar{d}}_{j+1}^2, \bar{\bar{d}}_{j+1}^3$  作为特征向量。从上述方法可以看出, 新特征向量的长度为

$$2^{n-(j+1)} + \frac{1}{2} \cdot 2^{n-(j+1)} + \frac{1}{4} \cdot 2^{n-(j+1)} + \frac{1}{4} \cdot 2^{n-(j+1)} = 2^{n-j}$$

与只用多分辨分析方法选取第  $J$  层低频系数  $d_j^0$  的长度是一致的。但这种方法获取的特征向量包含了信号的更多频带信息。

**注 1** 上述方法是针对维数阈值为偶数的情形。当维数阈值为奇数时, 在均值取法方面进行适当调整即可。

图 2 为维数约简示意图

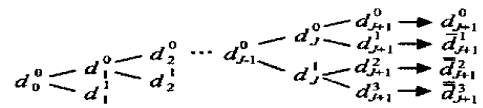


图 2 维数约简示意图

为进一步解释上述约简过程, 本文以 Haar 小波变换为例进行说明。设一长度为  $2^n$  的时序信号, 约简的维数阈值为 8, 按上述 Step 1 对其进行  $n - 3$  层 Haar 小波分解。设得到的低频系数  $d_{n-3}^0$  和对应的高频系数  $d_{n-3}^1$  分别为  $\{9, 7, 5, 6, 8, 2, 1, 3\}$  和  $\{8, 3, 2, 4, 6, 5, 1, 9\}$ , 其中前者即为文献[2]方法的约简结果。本文对上述  $d_{n-3}^0$  和  $d_{n-3}^1$  继续按 Step 2 进行小波包分解, 得到的  $d_{n-2}^0, d_{n-2}^1, d_{n-2}^2, d_{n-2}^3$  分别为  $\{8, 5, 5, 5, 2\}$ ,  $\{1, -0.5, 3, -1\}$ ,  $\{5.5, 3, 5.5, 5\}$ ,  $\{2.5, -1, 0.5, -4\}$ , 保留  $d_{n-2}^0$ , 按 Step 3 对  $d_{n-2}^1$  两两取均值得到  $\bar{d}_{n-2}^1$  为  $\{0.25, 1\}$ , 对  $d_{n-2}^2$  和  $d_{n-2}^3$  四四取均值得到的序列  $\bar{\bar{d}}_{n-2}^2$  和  $\bar{\bar{d}}_{n-2}^3$  分别为  $\{4.75\}$  和  $\{-0.5\}$ 。因而  $\{8, 5.5, 5.5, 2, 0.25, 1, 4.75, -0.5\}$  即为所求得特征向量。与文献[2]方法得到的约简结果相比, 它包含了更多的频带信息。

#### 3.1.2 算法完备性

维数约简算法将时间序列从时间域变换到特征域; 然后基于多维索引结构进行相似匹配。为保证最后结果的正确性, 算法应满足完备性要求, 即特征域上 2 序列  $T(x)$  和  $T(y)$  间距离  $D_{\text{feature}}(T(x), T(y))$

$T(y)$ ) 与时间域上 2 序列  $x$  与  $y$  之间的距离  $D_{\text{object}}(x, y)$  满足<sup>[3]</sup>

$$D_{\text{feature}}(T(x), T(y)) = D_{\text{object}}(x, y).$$

为证明算法的完备性, 首先给出如下引理:

**引理 1** 正交变换保持欧氏距离<sup>[4]</sup>.

**引理 2** 对长度为  $2^n$  的序列  $C_0^0$  和  $d_0^0$ , 经上述算法得到的新序列满足

$$\begin{aligned} &C_{J+1}^0 - d_{J+1}^0)^2 + (\bar{C}_{J+1}^0 - \bar{d}_{J+1}^0)^2 + \\ &\bar{C}_{J+1}^2 - \bar{d}_{J+1}^2)^2 + \bar{C}_{J+1}^3 - \bar{d}_{J+1}^3)^2 \\ &C_{J+1}^1 - d_{J+1}^1)^2 + C_{J+1}^2 - d_{J+1}^2)^2 + \\ &C_{J+1}^3 - d_{J+1}^3)^2. \end{aligned}$$

**证明** 先证  $(\bar{C}_{J+1}^1 - \bar{d}_{J+1}^1)^2 = C_{J+1}^1 - d_{J+1}^1)^2$ .

$$\begin{aligned} &(\bar{C}_{J+1}^1 - \bar{d}_{J+1}^1)^2 = \\ &2^{n-(U+2)-1} \sum_{i=0}^{2^{n-(U+2)-1}-1} [\bar{C}_{J+1}^1(i) - \bar{d}_{J+1}^1(i)]^2 = \\ &2^{n-(U+2)-1} \sum_{i=0}^{2^{n-(U+2)-1}-1} \left[ \frac{C_{J+1}^1(2i) + C_{J+1}^1(2i+1)}{2} - \right. \\ &\left. \frac{d_{J+1}^1(2i) + d_{J+1}^1(2i+1)}{2} \right]^2 = \\ &2^{n-(U+2)-1} \sum_{i=0}^{2^{n-(U+2)-1}-1} \left[ \frac{C_{J+1}^1(2i) - d_{J+1}^1(2i)}{2} + \right. \\ &\left. \frac{C_{J+1}^1(2i+1) - d_{J+1}^1(2i+1)}{2} \right]^2 = \\ &2^{n-(U+2)-1} \sum_{i=0}^{2^{n-(U+2)-1}-1} (2\{[C_{J+1}^1(2i) - d_{J+1}^1(2i)]^2 + \\ &[C_{J+1}^1(2i+1) - d_{J+1}^1(2i+1)]^2\})/2^2 = \\ &2^{n-(U+1)-1} \sum_{i=0}^{2^{n-(U+1)-1}-1} [C_{J+1}^1(i) - d_{J+1}^1(i)]^2 = \\ &C_{J+1}^1 - d_{J+1}^1)^2. \end{aligned}$$

同理可证

$$\begin{aligned} &\bar{C}_{J+1}^2 - \bar{d}_{J+1}^2)^2 = C_{J+1}^2 - d_{J+1}^2)^2, \\ &\bar{C}_{J+1}^3 - \bar{d}_{J+1}^3)^2 = C_{J+1}^3 - d_{J+1}^3)^2. \end{aligned}$$

于是可得到如下定理:

**定理 2** 维数约简算法满足完备性要求

**证明** 记  $C = \{C_{J+1}^0, \bar{C}_{J+1}^0, \bar{C}_{J+1}^2, \bar{C}_{J+1}^3\}$ ,  $\tilde{C} = \{C_{J+1}^0, C_{J+1}^1, C_{J+1}^2, C_{J+1}^3\}$ ,  $C = \{C_{J+1}^0, C_{J+1}^1, C_{J+1}^2, C_{J+1}^3, C_{J+1}^1, C_{J+1}^2, \dots, C_{J+1}^1\}$ . 同理有  $D, \tilde{D}, \tilde{D}$  记号

由引理 2 得  $(C - D)^2 = (\tilde{C} - \tilde{D})^2$ , 而  $(\tilde{C} - \tilde{D})^2 = (C - D)^2$  是显然的. 算法中提到的多分辨分析和小波包分解均选取正交基, 所以是正交

变换. 由引理 1 可知  $(C - D)^2 = (C_0^0 - d_0^0)^2$  成立. 所以  $(C - D)^2 = (C_0^0 - d_0^0)^2$ .

### 3.1.3 时间复杂度分析

对于约简算法的时间复杂度, 给出如下定理:

**定理 3** 已知一个长度为  $N$  的时间序列  $d_0^0$ , 即  $d_0^0 \in l^2(Z_N)$ . 假设  $N = 2^n$ , 并假定  $h$  和  $g$  至多有  $k$  个不为零的因子. 按上述算法, 即  $d_0^0$  经  $J$  层多分辨分析分解; 然后对第  $J$  层进行小波包分解; 最后进行均值运算. 算法的时间复杂度为  $O(N)$ .

**证明** 首先将  $d_0^0$  与  $\bar{h}, \bar{g}$  作卷积运算, 根据卷积运算的定义<sup>[5]</sup>  $(d_0^0 * \bar{h})(n) = \sum_{m=0}^{N-1} d_0^0(n-m)\bar{h}(m)$  ( $n = 0, 1, \dots, N-1$ ) 知, 进行  $J$  层多分辨分析分解, 至多需要  $4Nk(1 - 1/2^J)$  次乘法运算; 对第  $J$  层进行小波包分解至多需要  $4Nk/2^J$  次乘法运算; 取均值需要  $N/2^{J+1}$  次运算. 因而共需  $4Nk + N/2^{J+1}$  次运算. 所以算法的时间复杂度为  $O(N)$ .

### 3.2 查询算法

相似匹配主要包括预处理和查询两个阶段. 在预处理阶段, 主要进行维数约简和索引构建, 即对数据集中的每一时间序列按 3.1 节提出的方法进行维数约简; 然后将这些特征向量按文献[6]的方法存储在  $R$  树索引结构中. 根据查询任务的不同, 可将查询大体分为范围查询和  $k$  近邻查询两种. 通常以欧几里德距离作为相似尺度.

**范围查询算法** 给定一查询序列  $q$  和相似阈值  $\epsilon$ , 从数据集中找出所有满足  $D(q, x) \leq \epsilon$  的序列  $x$ .

Step 1: 按 3.1 节提出的方法对查询序列  $q$  进行维数约简, 将其变换为特征空间中的序列  $\bar{q}$ .

Step 2: 基于欧氏距离和相似阈值  $\epsilon$  在  $R$  树索引结构上搜索与  $\bar{q}$  相似的候选序列;

Step 3: 计算各候选序列所对应的时间域上的序列与查询序列  $q$  的实际距离, 滤掉不满足条件的序列, 从而得到最终的结果集.

**$k$  近邻查询算法** 给定一查询序列  $q$ , 从数据集中找出与之最相似的  $k$  个序列.

Step 1: 按 3.1 节提出的方法对查询序列  $q$  进行维数约简, 将其变换为特征空间中的序列  $\bar{q}$ .

Step 2: 调用文献[7]提出的最近邻算法, 在  $R$  树索引结构上搜索与  $\bar{q}$  最相似的  $k$  个候选序列, 并计算这些候选序列对应的时间域上的序列和查询序列  $q$  的实际距离, 最大的距离记为  $\epsilon_{\text{max}}$ ;

Step 3: 将  $\epsilon_{\text{max}}$  作为新的相似阈值, 调用范围查

询算法,得到满足条件的  $k$  个序列

### 4 实验算例

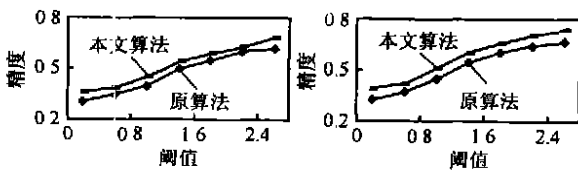
电力负荷时间序列数据是电力系统中的一类重要数据,从中发现蕴涵的相似性有利于调度员更好地掌握负荷变化的趋势和规律,科学、有效地进行决策。本文从某电力系统负荷时序数据库中抽取 10 000 个长度为 128 的时间序列作为研究对象,将所提出的基于小波包变换的相似模式匹配算法与文献[3]中只考虑尺度信息的小波算法在查询精度和匹配效率两方面进行比较。本文采用  $R$  树作为索引结构,分别选用 db12 和 db16 作为基本小波对时序数据进行尺度为 4 的小波分解,按文献[3]方法选取低频部分的系数作为特征向量,进行范围查询和  $k$  近邻查询。在此基础上,继续对低频空间和高频空间进行小波包分解,选择相应的系数作为特征向量进行相似匹配。

#### 实验 1 两种方法在查询精度上的比较

本文将查询精度作为一个指标,它反映了维数约简技术的剪枝能力,其定义如下<sup>[3]</sup>:

$$\text{查询精度} = \frac{\text{正确结果集中的序列数}}{\text{检索出的序列总数}} \times 100\%$$

两种方法在进行范围查询时不同阈值下的查询精度比较如图 3 所示,对每一个阈值分别进行 100 次实验,图中的结果均为 100 次查询的平均值。



(a) 取 db12 为基本小波 (b) 取 db16 为基本小波

图 3 范围查询精度比较

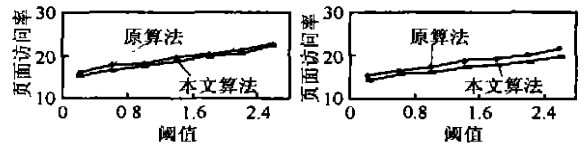
从图 3 可以看出,不论选取 db12 还是 db16 作为基本小波,本文方法与只考虑尺度信息的小波方法相比均获得了更好的精度。这是由于本文方法充分利用了小波包可对信号进行更加精细分析的优点,同时考虑了尺度信息和细节信息,更好地捕获了原有信号的特征,使约简后的特征向量包含更多时间序列的有效信息,从而使约简过程中损失的信息量减少。通过观察图 3(a) 和图 3(b) 可以看出,db16 小波匹配的精度提高得更明显,这表明小波滤波器长度的选取对精度有一定影响,而对于本文所选取的时间序列,db16 小波则更好地捕获了它的趋势。

#### 实验 2 两种方法页面访问率的比较

页面访问数主要由过滤不满足条件序列时访

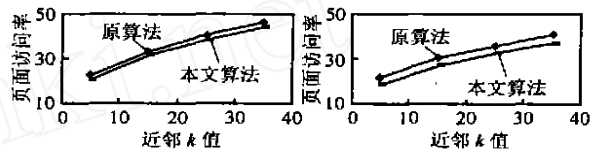
问的数据页面数决定。页面访问率是查询时的页面访问数与总页面数的比率。

两种方法在进行范围查询和  $k$  近邻查询时的页面访问率比较如图 4 和图 5 所示,图中的结果是 100 次查询结果的平均值。



(a) 取 db12 为基本小波 (b) 取 db16 为基本小波

图 4 范围查询的页面访问率比较



(a) 取 db12 为基本小波 (b) 取 db16 为基本小波

图 5  $k$  近邻查询的页面访问率比较

从图 4 和图 5 可看出,本文算法选取 db12 和 db16 作为基本小波,无论进行范围查询还是  $k$  近邻查询,其页面访问率均低于文献[3]的方法,这与精度比较结果是一致的。精度的提高使得匹配过程中产生的 false alarms 数量减少,进而后期在过滤不满足条件序列时访问的页面数减少,页面访问率降低。

通过上述对精度和页面访问率的实验结果比较可以看出,属性约简会造成信息的损失,因而如何减少约简过程中的信息损失量,使得约简后的特征向量更好地捕获原信号的特征,是提高匹配精度和效率的一个关键问题。小波包变换与小波变换相比可对信号进行更加精细的分析,从而更好地近似原信号,进而提高匹配精度和效率。然而,用小波包进行约简过程中,最佳基的选取是一个重要问题,选取适合信号特点的小波基可获得更满意的匹配精度和搜索效率。另外,数据集的分布对于匹配精度和效率也有一定影响,相似匹配前可对时序数据进行必要的聚类预处理,将相似的序列聚集在一起;然后与查询序列相似度高的类进行匹配,可获得更好的匹配性能。这也是目前作者正在研究的一个方向。

### 5 结论

本文提出了基于小波包变换的时间序列相似匹配算法,该算法充分利用了小波包可对信号进行更加精细分析的优点,对序列进行维数约简,用多维索引结构存储这些约简后的特征向量,用欧几里德距离作为相似尺度,基于此进行范围查询和  $k$  近邻查

询 该算法同时考虑尺度信息和细节信息,使约简后的特征向量包含更多的时间序列有效信息 仿真实验结果表明,该方法具有较高的精度和效率,是一种有效的时序相似匹配方法 进一步的工作包括更深入地研究小波包约简过程中最佳基的选取,并将聚类预处理过程集成到匹配算法中

#### 参考文献(References):

- [1] Kin-pong Chan, Ada Wai-chee Fu. Efficient time series matching by wavelets[A]. *Proc of the ICDE Conf* [C]. Sydney, 1999. 126-133
- [2] Franky Kin-pong Chan, Ada Wai-chee Fu, Clement Yu. Haar wavelets for efficient similarity search of time-series: With and without time warping[J]. *IEEE Trans on Knowledge and Data Engineering*, 2003, 15

(3): 686-705

- [3] Ivan Popivanov, Rane J Miller. Similarity search over time-series data using wavelets[A]. *Proc of the ICDE Conf* [C]. San Jose, 2002. 212-221.
- [4] Ivan Popivanov. Similarity search over time-series data using wavelets[D]. Toronto: University of Toronto, 2001. 8-45
- [5] Stephane Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing* [M]. San Diego: Academic Press, 1997. 318-335
- [6] Guttman A. R-trees: A dynamic index structure for spatial search [A]. *Proc of ACM SIGMOD* [C]. Boston, 1984. 47-57.
- [7] Nick Roussopoulos, Stephen Kelley, Frederic Vincent. Nearest neighbor queries[A]. *Proc of ACM SIGMOD* [C]. San Jose: ACM Press, 1995. 71-79

#### (上接第 892 页)

- [5] 孙树栋, 林茂. 基于遗传算法的多移动机器人协调路径规划[J]. *自动化学报*, 2000, 26(5): 672-676  
(Sun S D, Lin M. Path planning of multimobile robots using genetic algorithms [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2000, 26(5): 672-676 )
- [6] 周明, 孙树栋, 彭炎午. 基于遗传模拟退火算法的机器人路径规划[J]. *航空学报*, 1998, 19(1): 118-120  
(Zhou M, Sun S D, Peng Y W. Path planning of mobile robot via genetic simulated annealing approach [J]. *Acta Aeronautica ET Astronautica Sinica*, 1998, 19(1): 118-120 )
- [7] 吴斌, 史忠植. 一种基于蚁群算法的 TSP 问题分段求解算法[J]. *计算机学报*, 2001, 24(12): 1328-1333  
(Wu B, Shi Z Z. An ant colony algorithm based partition algorithm for TSP [J]. *Chinese J of Computers*, 2001, 24(12): 1328-1333 )

- [8] 张纯刚, 席裕庚. 全局环境未知时基于滚动窗口的机器人路径规划[J]. *中国科学(E 辑)*, 2001, 31(1): 51-58  
(Zhang C G, Xi Y G. Rolling path planning of mobile robot in global unknown environment [J]. *Science in China (Series E)*, 2001, 31(1): 51-58 )
- [9] 陈宗海. 月球探测器路径规划的基于案例的学习算法研究[J]. *航空计算技术*, 2000, 30(2): 1-4  
(Chen Z H. Lunar probe path planning using case-based learning algorithm [J]. *Aeronautical Computer Technique*, 2000, 30(2): 1-4 )
- [10] Sugeno M. An introductory survey of fuzzy control [J]. *Information Science*, 1985, 36(1-2): 59-83
- [11] Jiang T, Li Y. Multimode oriented polynomial transformation based defuzzification strategy and learning procedure [J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 1997, 27(5): 877-883

#### (上接第 902 页)

- [4] Aubin J P, Frankowska H. *Set-valued Analysis, Systems and Control: Foundations and Applications* [M]. Boston: Birkhauser, 1990
- [5] Isidoria A. *Nonlinear Control System* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989
- [6] Frankowska H, Quincampoix M. Viability kernels of differential inclusion with constraints: Algorithm and applications [J]. *J Mathematics System Estimation Control*, 1991, 1(3): 371-388
- [7] Aubin J P. *Viability Theory, Systems and Control* [M]. Basel: Birkhauser, 1991.

- [8] Saint Pierre P. Approximation of the viability kernel [J]. *Applied Mathematics & Optimization*, 1994, 29(2): 187-209
- [9] Cardaliaguet P, Quincampoix M, Saint Pierre P. Some algorithms for differential games with two players and one target [J]. *MAA*, 1994, 28(4): 441-461.
- [10] Aubin J P, Frankowska H. The viability kernel algorithm for computing value functions of infinite horizon optimal control problems [J]. *J of Mathematical Analysis and Applications*, 1996, 201(2): 555-576