第 19 卷 第 8 期 控 制 与 决 策 2004 年 8 月
Vol 19 No. 8 Control and Decision Aug. 2004

文章编号: 1001-0920(2004)08-0931-04

参数不确定广义大系统的分散鲁棒镇定控制

沃松林, 邹 云
(南京理工大学 自动化系, 江苏 南京 210094)

摘 要: 应用线性矩阵不等式(LMI)方法研究了参数不确定广义大系统的分散鲁棒镇定控制问题, 系统中不确定项具有数值界, 可不满足匹配条件. 基于不确定项的表达形式, 给出了存在分散鲁棒控制器的LMI条件. 仿真例子表明,LMI方法求解简单、便于应用.

关键词: 不确定系统; 线性矩阵不等式; 分散鲁棒控制; 镇定
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Decentralized robust stabilization for singular large scale systems with parameter uncertainty

WO Song-lin, ZOU Yun
(Department of Automation, Nanjing University Science and Technology, Nanjing 210094, China. WO Song-lin, Correspondent: E-mail: wosonglin2000@yahoo.com.cn)

Abstract: Decentralized robust stabilization problem for singular large scale systems with parameter uncertainty is studied by linear matrix inequality (LMI) approach. The uncertainty is value bounded and can be dissatisfied with the matching conditions. A sufficient condition for existence of decentralized robust control is derived, which is expressed as the solvability problem of linear matrix inequalities (LMIs). An example shows the application of the method.

Key words: uncertain systems; LMI; decentralized robust control; stabilization

1 引 言

一般情况下, 由于系统元件老化和灵敏度等内外因素的影响, 系统在很多方面都存在不确定因素, 这在大系统中表现得尤为突出. 近年来, 不确定大系统鲁棒镇定控制的研究已取得了不少结果[1~6], 但随着实际生产过程中系统复杂性的增加, 即系统维数很高时, 集中控制方法表现出很大的局限性. 于是不少学者研究了大系统的分散控制问题. 文献[2~6]便研究了不确定大系统鲁棒稳定的充分条件. 广义系统有较为实际的工程背景(例如由惯性导航系统的稳定回路和修正回路组成的系统), 能更好地描述实际生产过程, 因而对不确定组合广义大系统控制问题的研究具有明显的意义.

本文首先给出了广义系统正则、脉冲自由且稳定的等价结果; 然后应用线性矩阵不等式(LMI)方法研究一类具有数值界的参数时不变不确定关联广义大系统的分散鲁棒稳定化问题, 得到了其可分散状态反馈镇定的充分条件, 提出了该类广义大系统的分散鲁棒控制器的LMI设计方法. 它可利用Matlab中的LMI工具箱方便地得到系统的分散控制器, 无需调整太多的参数, 因而求解方便、有效.

收稿日期: 2003-09-01; **修回日期**: 2003-11-06.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60074007).
作者简介: 沃松林(1964—), 男, 江苏丹阳人, 博士生, 从事广义大系统理论的研究; 邹云(1962—), 男, 江苏宜兴人, 教授, 博士生导师, 从事奇异系统理论、应急控制和评估理论与应用等研究.

2 系统的描述

考虑如下由N个子系统组成的不确定广义大系统(Σ):

$$E\mathring{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t). \quad (1)$$

其中

$$E = \mathrm{blockdiag}(E_1, E_2, \cdots, E_N);$$
$$B = \mathrm{blockdiag}(B_1, B_2, \cdots, B_N);$$
$$A = (A_{ij}), \Delta A = (\Delta A_{ij});$$
$$\Delta B = \mathrm{blockdiag}(\Delta B_1, \Delta B_2, \cdots, \Delta B_N);$$
$$E_i \in R^{n_i \times n_i},$$
$$A_{ij}, \Delta A_{ij} \in R^{n_i \times n_j}, i, j = 1, 2, \cdots, N;$$
$$x_i \in R^{n_i}, x^T = (x_1^T, x_2^T, \cdots, x_N^T);$$
$$\sum_{i=1}^{N} n_i = n, \mathrm{rank}\, E_i = r_i, \sum_{i=1}^{N} r_i = r;$$

B_i和ΔB_i为具有适当维数的矩阵; A_{ij}为第j个子系统对第i个子系统的关联作用矩阵. ΔA_{ij}和ΔB_i为不确定项, 它是时不变的, 且具有如下数值界[7]:

$$|\Delta A_{ij}| \prec D_{ij}, |\Delta B_i| \prec H_i, \quad i, j = 1, 2, \cdots, N. \quad (2)$$

其中: D_{ij}, H_i为具有非负元素的实常数矩阵, 分别与$\Delta A_{ij}, \Delta B_i$具有相同的维数. 这里$|\Delta| \prec \bar{\Delta}$的含义是$|e_{ij}| \leq \bar{e}_{ij} (i, j = 1, 2, \cdots, N)$, e_{ij}和$\bar{e}_{ij}$分别为矩阵Δ和$\bar{\Delta}$的第ij个元素.

本文的目的是对每个子系统设计一个局部无记忆状态反馈控制律

$$u_i(t) = K_i x_i(t), \quad (3)$$

其中K_i为适当维数局部反馈增益矩阵. 使得闭环复合广义大系统

$$E\mathring{x}(t) = [(A + BK) + (\Delta A + \Delta BK)]x(t) \quad (4)$$

正则、脉冲自由且稳定. 这里$K = \mathrm{blockdiag}(K_1, K_2, \cdots, K_N)$.

定义 1 如果系统(Σ)存在反馈控制律(3)使得闭环系统(4)是正则、脉冲自由且稳定的, 则称系统(Σ)可分散镇定; 反馈控制律(3)称为系统(Σ)的分散稳定化控制律.

在以下讨论中, 引进一个二值函数$\delta(\cdot)$, 定义为

$$\delta(K) = \begin{cases} 0, K = 0; \\ 1, K \neq 0. \end{cases}$$

设$R = (r_{ij})$为对称阵, 记$\mathrm{diag}(R) = \mathrm{diag}(r_{11}, r_{22}, \cdots, r_{nn})$, I为适当维数的单位矩阵.

引理 1[2] 若$n \times m$阶矩阵ΔA满足$|\Delta A| \prec D$, 则

$$\Omega(D) \geq (\Delta A)(\Delta A)^T, \Gamma(D) \geq (\Delta A)^T(\Delta A).$$

式中

$$\Omega(D) = \begin{cases} \|DD^T\| I, \|DD^T\| I < n\,\mathrm{diag}(DD^T); \\ n\,\mathrm{diag}(DD^T), \text{其他}; \end{cases}$$
$$\Gamma(D) = \begin{cases} \|D^T D\| I, \|D^T D\| I < m\,\mathrm{diag}(D^T D); \\ m\,\mathrm{diag}(D^T D), \text{其他}. \end{cases}$$

这里$\|\cdot\|$为最大奇异值矩阵数范.

引理 2 对于任意正数$\epsilon > 0$和适当维数的矩阵H, F, 有

$$H^T F + F^T H \leq \epsilon H^T H + \frac{1}{\epsilon} F^T F.$$

引理 3[8] 设$A, B \in R^{n \times n}$, $A \geq B$, 则有$C^T AC \geq C^T BC$, $\forall C \in R^{n \times k}$成立.

对系统$E\mathring{x}(t) = Ax(t)$, 记$\Phi \in R^{n \times (n - \mathrm{rank}\, E)}$为满足条件$E\Phi = 0$和$\mathrm{rank}\, \Phi = n - \mathrm{rank}\, E$的矩阵, 则有:

定理 1[9~11] 以下 4 个命题等价:

1) 系统$E\mathring{x}(t) = Ax(t)$正则、脉冲自由(即$\deg(\det(sE - A)) = \mathrm{rank}\, E$)且稳定;

2) 存在一个矩阵P使得

$$EP^T = PE^T \geq 0, AP^T + PA^T < 0;$$

3) 存在矩阵$X > 0, Y$满足

$$A(EX + Y\Phi^T)^T + (EX + Y\Phi^T)A^T < 0;$$

4) 存在矩阵$X > 0, Y$满足

$$(EX + Y\Phi^T)^{-1}A + A^T(EX + Y\Phi)^T)^{-T} < 0.$$

3 鲁棒稳定化控制器设计

记$((M)_{ij})$是一个$n \times n$阶矩阵, 将其分成$N \times N$块, 分法与$A = (A_{ij})$分块对应, 每一块为一个$n_i \times n_j$阶矩阵, 只在第i行第j列上的块为M ($n_i \times n_j$阶矩阵), 其余各块均为对应的$n_i \times n_j$阶零矩阵, 即

$$((M)_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & M & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{N \times N};$$

记$\bar{A} = \mathrm{blockdiag}(A_{11}, A_{22}, \cdots, A_{NN})$, I_i为n_i阶单位矩阵, $A_K = \bar{A} + BK$. 于是有

$$(A_{ij})_{ij} = ((A_{ij})_{ij})((I)_j)_{jj}),$$
$$((\Delta A_{ij})_{ij} = ((\Delta A_{ij})_{ij})((I_j)_{jj}),$$
$$(A + BK) + (\Delta A + \Delta BK) =$$
$$A_K + \sum_{i=1, j=1, i\neq j}^{N} [((A_{ij})_{ij}) + ((\Delta A_{ij})_{ij})] +$$

$$\sum_{i=1}^{N}[((\Delta A_{ii})_{ii}) + ((\Delta B_i K_i)_{ii})];$$

并记 $\Phi_i \in R^{n_i\times(n_i-r_i)}$ 为满足条件 $E_i\Phi_i = 0$ 和 rank $\Phi_i = n_i - r_i$ 的矩阵.

定理 2　对于不确定关联广义大系统(Σ), 如果存在正定矩阵 $X_i \in R^{n_i\times n_i}$, 矩阵 Y_i, Z_i 和正数 α_i, β_i, ϵ 使得线性矩阵不等式组(LMIs)

$$\begin{bmatrix} \widetilde{A}_i & (E_iX_i+Y_i\Phi_i^T)\Gamma^{1/2}(D_{ii}) & Z_i\Gamma^{1/2}(H_i) & (E_iX_i+Y_i\Phi_i^T) \\ \Gamma^{1/2}(D_{ii})(E_iX_i+Y_i\Phi_i^T)^T & -\alpha_i I_i & 0 & 0 \\ \Gamma^{1/2}(H_i)Z_i^T & 0 & -\beta_i I & 0 \\ (E_iX_i+Y_i\Phi_i^T)^T & 0 & 0 & -F_i^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{5}$$

成立, 则广义大系统(Σ) 是可分散镇定的, 且 $K_i = Z_i^T(E_iX_i + Y_i\Phi_i^T)^{-T}$ 是系统(Σ) 的一个分散稳定化控制律. 其中

$$\widetilde{A}_i = (E_iX_i + Y_i\Phi_i^T)A_{ii}^T + A_{ii}(E_iX_i + Y_i\Phi_i^T)^T + B_iZ_i^T + Z_iB_i^T + \Big\{\epsilon\sum_{j=1, j\neq i}^{N}[A_{ij}A_{ij}^T + \Omega(D_{ij})] + [\alpha_i\delta(D_{ii}) + \beta_i\delta(H_i)]I_i\Big\},$$

$$F_i = \frac{1}{\epsilon}\sum_{j=1, j\neq i}^{N}[\delta(A_{ji}) + \delta(D_{ji})]I_i,$$

I 为相应维数的单位矩阵.

证明　记 $\widetilde{\Phi} = \text{blockdiag}(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_N)$, $\widetilde{X} = \text{blockdiag}(X_1, X_2, \cdots, X_N) > 0$, $\widetilde{Y} = \text{blockdiag}(Y_1, Y_2, \cdots, Y_N)$, $\widetilde{P} = \text{blockdiag}(\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2, \cdots, \widetilde{P}_N)$ 和 $\widetilde{P}_i = (E_iX_i + Y_i\Phi_i^T)^{-T}$ 都为块对角矩阵, 则有 $E\widetilde{\Phi} = 0$ 和 rank $\widetilde{\Phi} = n - r$.

由引理 1～ 引理 3 可推出

$$\sum_{i=1}^{N}[\widetilde{P}^T((\Delta A_{ii})_{ii}) + ((\Delta A_{ii})_{ii})^T\widetilde{P}] \leq \sum_{i=1}^{N}((\alpha_i\delta(D_{ii})\widetilde{P}_i^T\widetilde{P}_i + \alpha_i^{-1}\Gamma(D_{ii}))_{ii}), \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{N}[\widetilde{P}^T((\Delta B_iK_i)_{ii}) + ((\Delta B_iK_i)_{ii})^T\widetilde{P}] \leq \sum_{i=1}^{N}((\beta_i\delta(H_i)\widetilde{P}_i^T\widetilde{P}_i + \beta_i^{-1}K_i^T\Gamma(H_i)K_i)_{ii}), \tag{7}$$

而

$$\{(A+BK) + (\Delta A + \Delta BK)\}^T\widetilde{P} + \widetilde{P}^T\{(A+BK) + (\Delta A + \Delta BK)\} \leq A_K^T\widetilde{P} + \widetilde{P}^TA_K + \epsilon\widetilde{P}^T\sum_{i=1, j=1, i\neq j}^{N}[((A_{ij}A_{ij}^T)_{ii}) + ((\Omega(D_{ij}))_{ii})]\widetilde{P} + \frac{1}{\epsilon}\sum_{i=1, j=1, j\neq i}^{N}[\delta(A_{ij}) + \delta(D_{ij})]((I_j)_{jj}) + \sum_{i=1}^{N}[((\alpha_i\delta(D_{ii})\widetilde{P}_i^T\widetilde{P}_i + \alpha_i^{-1}\Gamma(D_{ii}))_{ii}) + ((\beta_i\delta(H_i)\widetilde{P}_i^T\widetilde{P}_i + \beta_i^{-1}K_i^T\Gamma(H_i)K_i)_{ii})] < 0,$$

只要

$$[A_{ii} + B_iK_i]^T\widetilde{P}_i + \widetilde{P}_i^T[A_{ii} + B_iK_i] + \widetilde{P}_i^T\Big[\epsilon\sum_{j=1, j\neq i}^{N}(A_{ij}A_{ij}^T + \Omega(D_{ij})) + (\delta(D_{ii})\alpha_i + \delta(H_i)\beta_i)I_i\Big]\widetilde{P}_i + \frac{1}{\epsilon}\sum_{j=1, j\neq i}^{N}[\delta(A_{ji}) + \delta(D_{ji})]I_i + \alpha_i^{-1}\Gamma(D_{ii}) + \beta_i^{-1}K_i^T\Gamma(H_i)K_i < 0. \tag{8}$$

由引理 1 可知, $\Gamma(D_{ii})$ 和 $\Gamma(H_i)$ 均为正定或半正定矩阵, 可分解为: $\Gamma(D_{ii}) = \Gamma^{1/2}(D_{ii})\Gamma^{1/2}(D_{ii})$, $\Gamma(H_i) = \Gamma^{1/2}(H_i)\Gamma^{1/2}(H_i)$. 对式(8) 两边分别左乘 $\widetilde{P}_i^{-T}$ 和右乘 $\widetilde{P}_i^{-1}$, 并令 $Z_i = \widetilde{P}_i^{-T}K_i^T$, 由 Schur 补引理知式(7) 等价于(4), 从而由定理 1 知, 在定理 2 条件下系统(Σ) 可鲁棒稳定化, 且 $K_i = Z_i^T(E_iX_i + Y_i\Phi_i^T)^{-T}$ 是系统(Σ) 的一个分散稳定化控制律. □

从定理 2 的证明和函数 $\delta(\cdot)$ 的定义可知:

定理 3　对于不确定关联广义大系统(Σ), 如果存在正定矩阵 $X_i > 0$, 矩阵 Y_i, Z_i 和正数 α_i, β_i, ϵ 使得线性矩阵不等式组(LMIs)

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_i & (E_iX_i+Y_i\Phi_i^T)\Gamma^{1/2}(D_{ii}) & Z_i\Gamma^{1/2}(H_i) & (E_iX_i+Y_i\Phi_i^T) \\ \Gamma^{1/2}(D_{ii})(E_iX_i+Y_i\Phi_i^T)^T & -\alpha_i I_i & 0 & 0 \\ \Gamma^{1/2}(H_i)Z_i^T & 0 & -\beta_i I & 0 \\ (E_iX_i+Y_i\Phi_i^T)^T & 0 & 0 & -\hat{F}_i^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{9}$$

成立, 则广义大系统(Σ) 是分散稳定化的, 且 $K_i = Z_i^T(E_iX_i + Y_i\Phi_i^T)^{-T}$ 是系统(Σ) 的一个分散稳定化控制律. 其中

$$\hat{A}_i = (E_iX_i + Y_i\Phi_i^T)A_{ii}^T + A_{ii}(E_iX_i + Y_i\Phi_i^T)^T + B_iZ_i^T + Z_iB_i^T + \Big\{\epsilon\sum_{j=1, j\neq i}^{N}[A_{ij}A_{ij}^T + \Omega(D_{ij})] + (\alpha_i + \beta_i)I_i\Big\},$$

$$\hat{F}_i = \frac{2}{\epsilon}(N - 1) I_i,$$

I 为相应维数的单位矩阵.

定理 3 给出了广义大系统(Σ) 完全由子系统决定的可分散镇定的充分条件.

4 仿真示例

沿用前面的记号, 考虑一个由 2 个子系统组成的不确定线性大系统(Σ), 其不确定项具有数值界, 其中

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{11} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.2 & 0.1 \\ -0.2 & 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.1 \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -0.1 & 1 & -0.8 \\ -1 & -0.5 & 2.5 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.03 \\ 0.05 & 0.02 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.02 & 0.01 \\ 0.02 & 0.05 & 0.03 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}, D_{22} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 0.02 & 0.01 \\ 0.02 & 0 & 0.04 \end{bmatrix},$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ 0.01 & 0.05 \\ 0.03 & 0.05 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.01 \\ 0.01 & 0 \\ 0.01 & 0.03 \end{bmatrix}.$$

选择 $\Phi_1 = [0, 1]^T$, $\Phi_2 = [-1, 1, 2]^T$, $\epsilon = 1$, 应用 Matlab LMI 控制工具包求解式(9), 可得反馈增益 $K = \mathrm{diag}(K_1, K_2)$, 其中

$$K_1 = [-4.2914 \quad 0.1912],$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -4.8689 & -2.1274 & -3.6425 \\ -0.7699 & 3.8183 & 1.0946 \end{bmatrix}.$$

虽然待求的解是一组LMIs, 且含有多个参数, 但在 LMITOOL 环境下可一次求出, 求解方便, 无需预先调整太多的参数, 克服了 Riccati 方程方法存在的不足.

5 结 语

本文给出了广义系统正则、脉冲自由且稳定的等价结果, 并在此基础上应用线性矩阵不等式(LMI)方法研究了有数值界不确定线性广义大系统, 给出了一个分散鲁棒控制器存在的充分条件(其存在性依赖于相应的LMIs 的解). 通过求解LMI 问题, 提出了LMI 设计方法, 该方法没有太多的参数调整过程, 求解方便, 便于应用.

参考文献(References):

[1] Hovd M, Skogestad S. Control of symmetrically interconnected plants[J]. *Automatica*, 1994, 30(6): 957-973.

[2] 刘新宇, 高立群, 张文力. 不确定线性组合系统的分散镇定和输出跟踪[J]. 信息与控制, 1998, 27(5): 342-350.
(Liu X Y, Gao L Q, Zhang W L. Decentralized robust control for linear uncertain interconnected systems[J]. *Information and Control*, 1998, 27(5): 342-350.)

[3] Aldeen Trinh H. A comment on "Decentralized stabilization of large scale interconnected systems with delays"[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(5): 914-916.

[4] 谢永芳, 桂卫华, 刘晓颖, 等. 时变不确定关联系统的分散鲁棒控制器设计[J]. 控制理论与应用, 1999, 16(6): 903-906.
(Xie Y F, Gui W H, Liu X Y, et al. Decentralized robust stabilizing control design for interconnected time-varying uncertain systems[J]. *Control Theory and Applications*, 1999, 16(6): 903-906.)

[5] 俞立. 一类线性离散时滞大系统的分散镇定[J]. 控制理论与应用, 2000, 17(1): 125-127.
(Yu L. Decentralized stabilization of a class of large-scale linear discrete time-delay systems[J]. *Control Theory and Applications*, 2000, 17(1): 125-127.)

[6] Jun J Y, Jason S H, Tsai et al. Robust stabilization of large scale systems with nonlinear uncertainties via decentralized state feedback[J]. *J of Franklin Institut*, 1998, 335(5): 951-961.

[7] Mehdi D, Hamid M A, Perrin F. Robustness and optimality of linear quadratic controller for uncertain systems[J]. *Automa-tica*, 1996, 32(7): 1081-1083.

[8] 桂卫华, 谢永芳, 吴敏, 等. 基于LMI的不确定关联时滞大系统的分散鲁棒控制[J]. 自动化学报, 2002, 28(1): 155-159.
(Gui W H, Xie Y F, Wu M, et al. Decentralized robust control for uncertain interconnected system with time-delay based on LMI approach[J]. *Acta Automa-tica Sinica*, 2002, 28(1): 155-159.)

[9] Masubuchi I, Kamitane Y, Ohara A, et al. H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach[J]. *Automatica*, 1997, 33(4): 669-673.

[10] Xu Shengyuan, Paul Van Dooren, Radu Stefan, et al. Robust stability and stabilization for singular systems with state and parameter uncertainty[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(7): 1122-1128.

[11] João Yoshiyuki Ishihara, Marco Henrique Terra. On the Lyapunov theorem for singular systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(11): 1926-1930.