第 19 卷 第 8 期 控 制 与 决 策 2004 年 8 月
Vol 19 No. 8 Control and Decision Aug. 2004

文章编号: 1001-0920(2004)08-0935-04

一类具有时滞的广义 Hopfield 神经网络的全局稳定性

季　策, 张化光, 王占山
(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘　要: 通过引入能量泛函, 分析了一类具有时滞的广义 Hopfield 神经网络的全局稳定性. 从理论上给出了该类网络为全局稳定的充分条件, 证明了当时滞满足一个可计算的边界条件时, 具有时滞的该类神经网络与相应的无时滞网络具有同样的全局稳定特性. 仿真结果进一步证明了结论的有效性.

关键词: 广义 Hopfield 神经网络; 时滞; 全局稳定性
中图分类号: TP183　　**文献标识码**: A

Global stability of a class of generalized Hopfield neural networks with time delay

JI Ce, ZHANG Hua-guang, WANG Zhan-shan
(School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China. Correspondent: JI Ce, E-mail: hanfj119@163.net)

Abstract: By inducing an energy functional, global stability of a class of generalized Hopfield neural networks with time delay is analyzed. A sufficient condition for global stability is established theoretically. It is proved that the generalized Hopfield neural networks with time delay have same globally stable properties as the corresponding neural networks without time delay when time delay satisfies a computable bound condition. The simulation results show the effectiveness of the conclusions.

Key words: generalized Hopfield neural networks; time delay; global stability

1 引　　言

Hopfield 神经网络是研究和应用最为广泛的神经网络之一[1], 主要用于联想记忆和最优化计算. 但在 Hopfield 神经网络的实现过程中, 不可避免地会引入时滞, 并可能因此而产生振荡. 因此, 在对这类神经网络进行全局稳定性分析时, 考虑时滞的影响是很重要的. 文献[2, 3]对 Hopfield 神经网络的全局稳定性进行了深入研究, 但未考虑时滞的影响; 文献[4]虽然考虑了时滞, 并给出了不依赖于时滞的全局渐近稳定性结论, 但对于小时滞系统, 这样的结论是很保守的; 文献[5]则给出了具有时滞的 Hopfield 神经网络的全局稳定性结论.

本文在文献[5]的基础上, 考虑了一类更为广泛的神经网络模型, 即具有时滞的广义 Hopfield 神经网络模型. 本文则利用一个能量泛函, 证明了沿着系统的解该能量泛函是单调递减的, 最终将收敛于系统的某个平衡点, 并从理论上给出了该类网络为全局稳定的依赖于时滞的边界条件.

2　网络模型

具有时滞的广义 Hopfield 神经网络模型如下:

收稿日期: 2003-08-07; **修回日期**: 2003-10-28.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60274017); 国家教委博士点基金资助项目(20011045023).
作者简介: 季策(1969—), 女, 辽宁沈阳人, 博士生, 从事神经网络控制的研究; 张化光(1959—), 男, 吉林省吉林市人, 教授, 博士生导师, 从事神经网络控制、模糊控制等研究.

$$\overset{\circ}{x}_i(t) =$$

$$-\ a_i(x_i(t))\Big[b_i(x_i(t)) - \sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(0)} s_j(x_j(t)) -$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^{(1)} s_j(x_j(t-\tau))\Big],\ i = 1, \cdots, n. \tag{1}$$

其中 x_i 表示与第 i 个神经元相关的状态变量. 本文假设放大函数 $a_i(\cdot)$ 是正的、有界的连续函数; 任意函数 $b_i(\cdot)$ 是连续的, 且有 $\lim\limits_{x_i \to +\infty} b_i(x_i) = +\infty$, $\lim\limits_{x_i \to -\infty} b_i(x_i) = -\infty$; $s_i(\cdot)$ 是 Sigmoid 函数, 表示第 i 个神经元; $t_{ij}^{(0)}$ 表示与时滞 τ 无关的互连, $t_{ij}^{(1)}$ 表示与时滞 τ 相关的互连. 当 $\tau = 0$ 时, 令 $a_i(x_i(t)) = 1/C_i$, $b_i(x_i(t)) = x_i(t)/R_i - I_i$, 则由式(1), 有

$$C_i \overset{\circ}{x}_i(t) = -\frac{x_i(t)}{R_i} + \sum_{j=1}^{n} t_{ij} s_j(x_j(t)) + I_i, \tag{2}$$

其中 $t_{ij} = t_{ij}^{(0)} + t_{ij}^{(1)}$. 显然, 式(2) 即为连续的 Hopfield 神经网络模型.

若令 $x = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $A(x) = \mathrm{diag}[a_1(x_1), \cdots, a_n(x_n)]$, $B(x) = [b_1(x_1), \cdots, b_n(x_n)]^{\mathrm{T}}$, $S(x) = [s_1(x_1), \cdots, s_n(x_n)]^{\mathrm{T}}$, 则式(1) 可用向量形式表示为

$$\overset{\circ}{x}(t) = -A(x(t))[B(x(t)) - T_0 S(x(t)) -$$

$$T_1 S(x(t-\tau))], \tag{3}$$

其中 $T_0 + T_1 = T$ 为 $n \times n$ 实对称矩阵.

3　全局稳定性

为证明系统的全局稳定性, 引入如下引理及定义:

引理 1[6]　系统(1) 的任意解是有界的.

为使得系统(1) 的平衡点集合是离散的, 再作如下假设:

假设 1　对于系统(1) 的任意平衡点, 矩阵 $J(x_e)$ 是非奇异的, 其中

$$J(x) = -T + \mathrm{diag}\Big[\frac{b_1'(x_1)}{s_1'(x_1)}, \cdots, \frac{b_n'(x_n)}{s_n'(x_n)}\Big]. \tag{4}$$

应用微分方程的逆函数定理[7], 可以证明下面的引理成立.

引理 2[8]　如果系统(1) 满足上述假设, 则系统(1) 的平衡点集合是一个离散集合.

在引理 2 的基础上, 给出如下定义:

定义 1　如果从状态空间的任意有限非零初始状态 x_0 出发的受扰运动 $x(t) = \Phi(t; x_0, t_0)$ 是有界的, 且运动轨迹最终收敛于系统的某个平衡点, 则称系统为全局稳定的.

在证明下列定理的过程中, 将用到系统的向量形式(3).

定理 1　若系统(3) 满足上述假设, 且有

$$\tau\beta \| T_1 \| < 1, \tag{5}$$

其中

$$\| T_1 \| = \sqrt{\lambda_{\max}(T_1^{\mathrm{T}} T_1)},$$

$$\beta = \max_{x \in \mathbf{R}^n} \| A(x) S'(x) \|,$$

$$S'(x) = \mathrm{diag}[s_1'(x_1), \cdots, s_n'(x_n)].$$

则系统(3) 是全局稳定的.

证明　对于任意的 $x_t \in C([-\tau, 0], \mathbf{R}^n)$, 定义一个与式(3) 相关的能量泛函 $E(x_t)$ 为

$$E(x_t) =$$

$$-S^{\mathrm{T}}(x_t(0)) T S(x_t(0)) +$$

$$2\sum_{i=1}^{n} \int^{[x_t(0)]_i} b_i(\sigma) s_i'(\sigma) \mathrm{d}\sigma +$$

$$\int_{-\tau}^{0} [S(x_t(\theta)) - S(x_t(0))]^{\mathrm{T}} T_1^{\mathrm{T}} f(\theta) T_1 \times$$

$$[S(x_t(\theta)) - S(x_t(0))] \mathrm{d}\theta =$$

$$-S^{\mathrm{T}}(x(t)) T S(x(t)) +$$

$$2\sum_{i=1}^{n} \int^{x_i(t)} b_i(\sigma) s_i'(\sigma) \mathrm{d}\sigma +$$

$$\int_{t-\tau}^{t} [S(x(w)) - S(x(t))]^{\mathrm{T}} T_1^{\mathrm{T}} f(w-t) \times$$

$$T_1 [S(x(w)) - S(x(t))] \mathrm{d}w, \tag{6}$$

式中 $f(\theta) \in C^1([-\tau, 0], \mathbf{R}^n)$ 将在后续部分给出. 对于 $s \in [-\tau, 0]$, 定义 $x_t \in C([-\tau, 0], \mathbf{R}^n)$ 为 $x_t(s) = x(t+s)$, 其中: $t > 0$, $x \in C([-\tau, +\infty), \mathbf{R}^n)$, $\tau > 0$.

沿系统(3) 的任意解, $E(x_t)$ 对时间 t 的导数为

$$\mathrm{d}E(x_t)/\mathrm{d}t =$$

$$-2S^{\mathrm{T}}(x(t)) T S'(x(t)) A(x(t)) [-B(x(t)) +$$

$$T_0 S(x(t)) + T_1 S(x(t-\tau))] +$$

$$2x^{\mathrm{T}}(t) B(x(t)) S'(x(t)) A(x(t)) [-B(x(t)) +$$

$$T_0 S(x(t)) + T_1 S(x(t-\tau))] - [S(x(t-\tau)) -$$

$$S(x(t))]^{\mathrm{T}} T_1^{\mathrm{T}} f(-\tau) T_1 [S(x(t-\tau)) - S(x(t))] -$$

$$\int_{t-\tau}^{t} [S(x(w)) - S(x(t))]^{\mathrm{T}} T_1^{\mathrm{T}} f'(w-t) \times$$

$$T_1 [S(x(w)) - S(x(t))] \mathrm{d}w - \int_{t-\tau}^{t} [-B(x(t)) +$$

$$T_0 S(x(t)) + T_1 S(x(t-\tau))]^{\mathrm{T}} A(x(t)) S'(x(t)) T_1^{\mathrm{T}} \times$$

$$f(w-t) T_1 [S(x(w)) - S(x(t))] \mathrm{d}w -$$

$$\int_{t-\tau}^{t} [S(x(w)) - S(x(t))]^{\mathrm{T}} T_1^{\mathrm{T}} f(w-t) \times$$

$$T_1 S'(x(t)) A(x(t)) [-B(x(t)) +$$

$$T_0 S(x(t)) + T_1 S(x(t-\tau))] \mathrm{d}w. \tag{7}$$

若记

$$H_0 = -B(x(t)) + T_0 S(x(t)) +$$

$$T_1 S(x(t-\tau)),$$

$$H_1 = T_1[S(x(t-\tau)) - S(x(t))],$$

$$G = T_1[S(x(w)) - S(x(t))],$$

$$Q = A(x(t))S'(x(t)) = S'(x(t))A(x(t)),$$

则由式(7), 有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E(x_t)/\mathrm{d}t = & -2S^{\mathrm{T}}(x(t))TQH_0 + 2x^{\mathrm{T}}(t)B(x(t))QH_0 - \\ & H_1^{\mathrm{T}} f(-\tau)H_1 - \int_{\tau}[G^{\mathrm{T}} f'(w-t)G + \\ & H_0^{\mathrm{T}} Q T_1^{\mathrm{T}} f(w-t)G + G^{\mathrm{T}} f(w-t)T_1 Q H_0]\mathrm{d}w = \\ & -\int_{\tau}[\eta(x_t,\theta)]^{\mathrm{T}} M(x_t,\theta)\eta(x_t,\theta)\,\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$[\eta(x_t,\theta)]^{\mathrm{T}} = [H_0^{\mathrm{T}}, H_1^{\mathrm{T}}, \tilde{G}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

$$\tilde{G} = T_1[S(x(t+\theta)) - S(x(t))],$$

$$M(x_t,\theta) = \begin{bmatrix} 2Q/\tau & -Q/\tau & QT_1^{\mathrm{T}} f(\theta) \\ -Q/\tau & f(-\tau)E/\tau & 0 \\ f(\theta)T_1 Q & 0 & f'(\theta)E \end{bmatrix}, \tag{9}$$

E 为 $n \times n$ 单位矩阵. 为得到最后表达式, 式(8) 从 w 到 θ 进行了积分变量的替换.

再令 $U = U_3 U_2 U_1$, 其中

$$U_1 = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ E/2 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix},$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ -\tau f(\theta)T_1/2 & 0 & E \end{bmatrix}$$

$$U_3 = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & f(\theta)T_1 Q U_4 & E \end{bmatrix},$$

$$U_4 = -\frac{1}{2}\left[\frac{f(-\tau)}{\tau}E - \frac{Q}{2\tau}\right]^{-1},$$

则不难证明 $\tilde{M} = UM(x_t,\theta)U^{\mathrm{T}}$ 是对角矩阵. 实际上 $\tilde{M} = \mathrm{diag}[M_1, M_2, M_3]$, 其中

$$M_1 = 2Q/\tau, \tag{10}$$

$$M_2 = \frac{f(-\tau)}{\tau}E - \frac{Q}{2\tau}, \tag{11}$$

$$M_3 = f'(\theta)E - \frac{f(\theta)T_1 Q}{2}\left[\left(\frac{f(-\tau)}{\tau}E - \frac{Q}{2\tau}\right)^{-1} + 2\tau Q^{-1}\right]\frac{QT_1^{\mathrm{T}} f(\theta)}{2}. \tag{12}$$

这样, 当且仅当 $\tilde{M}$ 和 M_1, M_2, M_3 都为正定时, $M(x_t,\theta)$ 是正定的.

由对所有的 $x_i \in \mathbf{R}$, $s_i'(x_i) > 0$ (Sigmoid 函数的性质) 和 $a_i(x_i) > 0$ 可知, 矩阵 M_1 本身是正定的. 如果满足条件

$$2f(-\tau) - \beta > 0, \tag{13}$$

则矩阵 M_2 也将是正定的. 对于 M_3, 很容易证明, 如果满足条件

$$f'(\theta) > \frac{1}{4}f^2(\theta)\|T_1\|^2\left\|Q\left[\left(\frac{f(-\tau)}{\tau}E - \frac{Q}{2\tau}\right)^{-1} + 2\tau Q^{-1}\right]Q\right\|, \tag{14}$$

则 M_3 也是正定的. 其中矩阵

$$D \triangleq Q\left[\left(\frac{f(-\tau)}{\tau}E - \frac{Q}{2\tau}\right)^{-1} + 2\tau Q^{-1}\right]Q$$

是一个对角矩阵, 即 $D = \mathrm{diag}[d_1, \cdots, d_n]$. 如果令 $Q = \mathrm{diag}[q_1, \cdots, q_n]$, 则有

$$d_i = \frac{4f(-\tau)q_i\tau}{2f(-\tau) - q_i}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

根据 β 和 Q 的定义有 $q_i < \beta$, 因此可以进一步证明, 如果满足条件(13) 及下列条件:

$$f'(\theta) > \frac{1}{4}f^2(\theta)\|T_1\|^2\frac{4f(-\tau)\beta\tau}{2f(-\tau) - \beta}, \tag{15}$$

则条件(14) 也成立.

现选取 f 为

$$f(-\tau) = [\tau^2\beta\|T_1\|^2]^{-1}, \tag{16}$$

则不难看出, 上式满足条件(13). 此外, 因为 $\tau\beta\|T_1\| < 1$, 故有

$$\begin{aligned} & \left[f(-\tau)\|T_1\| - \frac{1}{\tau\beta\|T_1\|}\right]^2 + \\ & 1 - \frac{1}{\tau^2\beta^2\|T_1\|^2} = \\ & 1 - \frac{1}{\tau^2\beta^2\|T_1\|^2} < 0. \end{aligned} \tag{17}$$

因此, 在 $[-\tau, 0]$ 上选取 $f(\theta)$ 为

$$f(\theta) = \frac{l}{\delta(\gamma - \theta)}, \quad 0 < l < 1. \tag{18}$$

其中: $\delta = \dfrac{\|T_1\|^2 f(-\tau)\beta\tau}{2f(-\tau) - \beta}$, $\gamma = \dfrac{l}{\delta f(-\tau)} - \tau$. 容易证明这样选取 f 与式(16) 是一致的, 且满足条件(15).

这样, 对于满足方程(3) 的所有 x_t 和所有的 $\theta \in [-\tau, 0]$, $M(x_t,\theta)$ 将是正定的. 因此有

$$\mathrm{d}E(x_t)/\mathrm{d}t \leq 0. \tag{19}$$

由能量泛函的局部最小点与系统的平衡点之间的对应关系[5] 可知, 此时系统存在稳定的平衡点. 再由引理 1 及微分方程的不变原理[9] 可得, 当 $t \to \infty$ 时, x_t 的极限集是集合 $\Lambda = \{\varphi \in C([-\tau, 0], \mathbf{R}^n): \dot{E}\varphi = 0\}$ 的不变子集, 对于某个 $\varphi \in \Lambda$, 有 $|x_t - \varphi| \to 0$. 因

此, 当 $t \to \infty$ 时, 有 $-B(x_t(0)) + TS(x_t(0)) \to 0$, 或 $-B(x(t)) + TS(x(t)) \to 0$.

由此可得出结论: $x(t)$ 的极限集中的任一点都是系统(3) 的一个平衡点. 再由引理 2 可知, 当 $t \to \infty$ 时, $x(t)$ 将趋近于系统(3) 的某个平衡点. 因此, 系统(3) 是全局稳定的. □

4 仿真结果

为便于计算和仿真, 令系统(3) 中 $A(x(t))$ 为一个 2×2 单位矩阵, T_0 为零, 则有如下系统:

$$\mathring{x}(t) = -B(x(t)) + T_1 S(x(t-\tau)).$$

其中: $x \in \mathbf{R}^2$, $B(x(t)) = [1.3x_1, 1.1x_2]^{\mathrm{T}}$, $S(x) = [s_1(x_1), s_2(x_2)]^{\mathrm{T}}$, 且

$$s_1(x_1) = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{1.6\pi}{2}x_1\right),$$

$$s_2(x_2) = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{1.8\pi}{2}x_2\right),$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 \\ 1 & -0.2 \end{bmatrix}$$

是一个对称矩阵. 由前面定理计算可得, 当 $\tau < 0.483$ 时, 上述系统是全局稳定的. 在仿真过程中, 取 $\tau = 0.4$.

由仿真过程可知, 上述系统存在 3 个平衡点, 分别为 $x_{e0} = (0, 0)^{\mathrm{T}}$, $x_{e1} = (0.316\,9, 0.306\,6)^{\mathrm{T}}$, $x_{e2} = (-0.316\,9, -0.306\,6)^{\mathrm{T}}$. 当分别取初始函数为常值函数 $x_0(t) = [0.7, -0.2]^{\mathrm{T}}$ 及 $x_0(t) = [0.4, -0.6]^{\mathrm{T}}$ 时, 系统将分别收敛于平衡点 x_{e1} 和 x_{e2}. 仿真曲线如图 1 和图 2 所示.

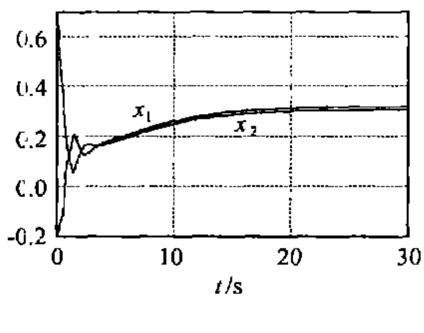

图 1 系统收敛于平衡点 x_{e1} 的曲线图

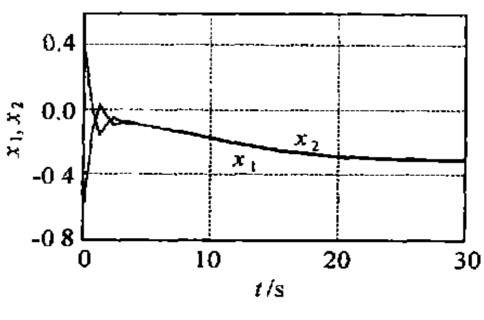

图 2 系统收敛于平衡点 x_{e2} 的曲线图

5 结 论

本文定理中给出的保证系统为全局稳定的边界条件与文献[5]中给出的时滞 Hopfield 神经网络的全局稳定性结论是一致的. 同时可以看出, 对于充分小的时滞, 广义 Hopfield 神经网络(1) (或神经网络(3)) 与相应的无时滞神经网络具有同样的全局稳定特性, 即神经网络(1) 的全局稳定性不受小时滞的影响. 然而, 对保证神经网络(1) 为全局稳定的充要条件及平衡点处的局部渐近稳定性尚有待于进一步的研究.

参考文献(References):

[1] Hopfield J J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities [J]. *Proc of the National Academy of Sciences USA*, 1982, 79(4): 2554-2558.

[2] 陈亚军, 徐晓鸣, 杨煜普. 一类连续 Hopfield 神经网络绝对稳定的充分必要条件[J]. 电子学报, 1998, 26(8): 32-36.
(Chen Y J, Xu X M, Yang Y P. Necessary and sufficient condition for absolute stability of a class countious Hopfield neural network [J]. *Electronica J*, 1998, 26(8): 32-36.)

[3] Ma J W. The stability of generalized Hopfield networks in randomly asynchronous mode[J]. *Neural Networks*, 1997, 10(6): 1109-1116.

[4] 赵维锐, 阮炯. 具有滞后的 Hopfield 连续神经网络的稳定性[J]. 复旦大学学报, 1994, 33(2): 214-218.
(Zhao W R, Ruan J. Stability of countious Hopfield neural network with delay[J]. *J of Fudan University*, 1994, 33(2): 214-218.)

[5] Ye H, Michel A N, Wang K. Global stability and local stability of Hopfield neural networks with delays[J]. *Physical Review E*, 1994, 50(5): 4206-4213.

[6] Cohen M, Grossberg S. Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks [J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics*, 1983, SMC-13(5): 815-826.

[7] Avez A. *Differential Calculus*[M]. New York: Wiley, 1986.

[8] Li J H, Michel A N, Porod W. Qualitative analysis and synthesis of a class of neural networks[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems*, 1988, 35(8): 976-987.

[9] Hale J. *Theory of Functional Differential Equations* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977.