第 19 卷 第 8 期 控 制 与 决 策 2004 年 8 月
Vol 19 No. 8 Control and Decision Aug 2004

文章编号: 1001-0920(2004)08-0947-04

基于一类 SM SA 策略的模型最优降阶

李令莱, 王 凌, 郑大钟
(清华大学 自动化系, 北京 100084)

摘 要: 将一类 SM SA 混合策略应用于模型的最优降阶, 提出了处理约束优化和解决模型降阶通常遇到的稳定性问题的有效方法. 通过对典型例子的数值仿真表明了混合策略和约束处理方法的有效性, 而且第 3 个例子的优化结果明显优于以往文献的结果.

关键词: 模型降阶; 模拟退火; 单纯形法; 约束处理
中图分类号: TP18 **文献标识码**: A

Optimal reduction of models based on a class of SM SA strategy

LI Ling-lai, WANG Ling, ZHENG Da-zhong
(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China. Correspondent: LI Ling-lai, E-mail: lilinglai01@mails. tsinghua. edu. cn)

Abstract: A class of SM SA hybrid strategy is applied to optimal reduction of models, and effective methods are also proposed to handle constraint and to solve stability problem that is usually encountered in reduced model. Numerical simulations based on benchmarks show the effectiveness of the hybrid strategy and constraint handling method, and the result obtained for the third benchmark is obviously better than that of literature.

Key words: model reduction; simulated annealing; simplex method; constraint handling

1 引 言

模型最优降阶是控制理论与实际工程中的重要问题, 近年来人们相继提出了许多通过极小化某性能指标来实现模型最优降阶的算法. Hwang 等[1]提出了一种两步迭代法, 但其本质是一种梯度下降算法, 易陷入局部极小点[2]; Luus[2]采用所谓的LJ 直接搜索算法改进了文献[1]的结果, 但未讨论初始点选取对算法性能的影响; Cheng[3]等应用微分进化算法研究了带时滞的线性系统以及不稳定线性系统的最优降阶问题, 但算法的收敛性能不太理想, 函数评价次数偏大. 理论上, 模型最优降阶属于函数优化问题. 针对复杂函数的优化,Wang 等[4]结合模拟退火算法(SA)和单纯形法(SM)提出了一类有效 SM SA 策略, 有效地解决了非线性控制系统的参数与时滞估计问题[5], 但在处理约束优化问题的边界处不能有效地进行反射、扩张操作, 从而影响了算法的搜索效率. 为此, 本文提出一种处理边界约束的变换方法, 将有约束优化问题转化为无约束优化问题, 始终保证降阶模型的稳定性, 避免了文献[1]基于 Routh 判据的稳定性判断环节. 基于典型算例的数值仿真表明, 本文方法可取得优于以往文献的结果, 且不依赖于初值的选取, 函数评价次数较少.

2 模型最优降阶的数学描述

考虑如下线性系统模型:

收稿日期: 2003-06-23; **修回日期**: 2003-07-23.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60204008, 60374060); 国家 973 计划资助项目(2002CB312200); 清华大学基础研究基金项目.
作者简介: 李令莱(1979—), 男, 四川新都人, 博士生, 从事优化方法和故障诊断的研究. 王凌(1972—), 男, 江苏武进人, 副教授, 博士, 从事智能优化理论与方法的研究.

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n} \triangleq \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (1)$$

构造如下低阶线性系统模型($m < n$):

$$H(s) = \frac{\hat{b}_0 + \hat{b}_1 s + \cdots + \hat{b}_{m-1} s^{m-1}}{\hat{a}_0 + \hat{a}_1 s + \cdots + \hat{a}_m s^m} \triangleq \frac{\hat{B}(s)}{\hat{A}(s)}. \quad (2)$$

所谓模型最优降阶, 本质上就是求解 $H(s)$ 的一组最优参数($\hat{a}_0, \cdots, \hat{a}_m, \hat{b}_0, \cdots, \hat{b}_{m-1}$), 使得 $H(s)$ 逼近 $G(s)$ 的某项指标最小, 譬如 H^2, L^2, H^∞ 和 L^∞ 范数等[1,3]. 文献[1]采用如下指标:

$$\int_0^\infty e^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} E(s)E(-s)\,\mathrm{d}s. \quad (3)$$

其中: $E(s) = [G(s) - H(s)]R(s)$, $R(s)$ 为系统输入信号 $r(t)$ 的拉氏变换, $e(t)$ 为 $E(s)$ 的逆拉氏变换. 为便于计算, 可采用如下指标[2,3]:

$$J = \sum_{i=0}^{N} \left| G(\mathrm{j}\omega_i) - H(\mathrm{j}\omega_i) \right|^2. \quad (4)$$

与式(3)相比, 式(4)采用累积和方式计算系统冲击响应的近似误差, 其直观物理意义是 Nyquist 图上两条曲线的逼近误差. 另外, 为保证降阶模型与原模型具有相同的稳态值, 即 $H(0) = G(0)$, 要求 $\hat{b}_0/\hat{a}_0 = b_0/a_0$. 不失一般性, 令 $\hat{a}_0 = 1$, 则 $\hat{b}_0 = b_0/a_0$. 故待决策参数为($\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_m, \hat{b}_1, \cdots, \hat{b}_{m-1}$).

对于带时滞环节等更复杂的系统, 只要原系统的频率响应 $G(\mathrm{j}\omega)$ 可以得到, 上述思路仍适用. 譬如时滞系统, 降阶模型可采用如下形式, 但时滞参数有待估计.

$$H(s) = \frac{\hat{b}_0 + \hat{b}_1 s + \cdots + \hat{b}_{m-1} s^{m-1}}{\hat{a}_0 + \hat{a}_1 s + \cdots + \hat{a}_m s^m} \mathrm{e}^{-\hat{\tau} s}. \quad (5)$$

3 SMSA 策略和约束处理

上述模型最优降阶本质上可归结为参数寻优问题. 由于 SMSA 混合策略对多变量函数优化问题具有很好的优化性能[4], 本文将其应用于模型最优降阶问题. SMSA 流程如下:

Step 1: 随机生成一组初始解, 每个解由所有待估计参数组成(假设共有 K 个待估计参数), 令其中的最优解为当前解;

Step 2: 若算法终止准则(连续 L 次退温期间当前最优解均不变)满足, 则终止算法; 否则继续以下步骤;

Step 3: 对于当前解, 分别对 K 个待估计参数附加随机扰动以生成 K 个新解, 从而与当前解构成有 $K+1$ 个顶点的以当前解为直角顶点的凸多面体;

Step 4: 基于凸多面体, 进行 L_1 步 SM 搜索, 令所得最优解为 SA 方法的初始解;

Step 5: 在当前温度进行 L_2 步 SA 抽样(由当前解产生新解, 并按 Metropolis 准则接受新解);

Step 6: 退温操作和尺度收缩, 即 $t_k = \alpha t_{k-1}$, $\eta_k = \beta \eta_{k-1}$, 然后返回 Step 2.

算法中, Step 3 和 Step 5 中的新解均是通过对旧解附加随机扰动产生的, 即假设当前解为 $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_i, \cdots, \theta_K)$, 则 Step 3 中 $\theta^{new} = (\theta_1, \cdots, \theta_i^{new}, \cdots, \theta_K)$, Step 5 中 $\theta^{new} = (\theta_1^{new}, \cdots, \theta_i^{new}, \cdots, \theta_K^{new})$, 其中: $\theta_i^{new} = \theta_i + \eta \xi (i = 1, \cdots, K)$, η 为尺度参数, ξ 为服从柯西分布 $C(0,1)$ 的随机数[6]. SA 初温取 $t_0 = (f_b - f_w)/\ln p_r$, 其中: f_b 和 f_w 分别为初始解群中的最佳和最差解的目标值, $p_r \in (0,1)$ 为最佳个体在初温下接受最差个体的概率[7]. 仿真时 $p_r = 0.1$, $\eta_0 = 1$, $\alpha = 0.95$, $\beta = 0.98$, 并采用保优策略[4].

对于最小相位系统, 即式(1)中 $A(s)$ 和 $B(s)$ 均为 Hurwitz 多项式, 其降阶模型自然要求满足最小相位特性. 文献[1]通过 Routh 判据以保证 $\hat{A}(s)$ 和 $\hat{B}(s)$ 的稳定性, 这种对约束的可行性判断显然影响搜索的效率, 尤其当降阶模型阶次较高时. 本文采用如下方法避免稳定性判断, 使搜索过程始终维持在可行域上.

对于如下形式的实系数多项式:

$$P(s) = p_0(1 + p_1 s + \cdots + p_l s^l), \quad (6)$$

其解或为实数或为成对共轭虚数, 因此总可将其转化成

$$P(s) = \begin{cases} p_0 \prod_{i=1}^{l/2} (1 + q_{i1} s + q_{i2} s^2), & l \text{ is even}; \\ p_0 (1 + q_{01} s) \prod_{i=1}^{(l-1)/2} (1 + q_{i1} s + q_{i2} s^2), & l \text{ is odd} \end{cases} \quad (7)$$

从而, 若保证了式(7)的稳定性, 再将其转化为式(6), 则自然保证了式(6)的稳定性.

对于式(6), 按照 Routh 稳定性判据的结果, 各 p_i 必须在限定范围内搜索, 且各参数间存在相关约束. 然而, 只要 $q_{ij} > 0$, 式(7)就为 Hurwitz 多项式, 从而简化了参数的搜索范围, 即$(0, +\infty)$, 且消除了相关关系. 进一步, 由于$(0, +\infty)$范围仍存在边界约束, 会影响 SM 和 SA 等无约束型直接搜索方法的搜索效率. 为了提高算法搜索性能, 本文按如下方法将存在边界约束的优化问题转化为无约束优化问题.

显然, 对于$(0, +\infty)$范围上的变量 y, 总存在$(-\infty, +\infty)$范围上的 x, 使得

$$y = \kappa \exp(\lambda x), \quad (8)$$

其中 κ 和 λ 为给定正系数. 从而, 对存在区间约束的变量 y 的搜索便转化为对无约束变量 x 的搜索. 仿真时取 $\kappa = 1, \lambda = 0.2$.

4　数值仿真研究

下面采用 3 个典型算例对所提方法进行数值仿真, 前 2 个例子[2] 为线性最小相位系统 (分母与分子均为 Hurwitz 多项式), 第 3 个例子[3] 带时滞环节, 且分母为复杂无理式.

例 1　考虑如下四阶最小相位系统:

$$G(s) = \frac{156 + 369s + 264s^2 + 80s^3 + 10s^4}{40 + 148s + 173s^2 + 84s^3 + 21s^4 + 2s^5}, \tag{9}$$

其二阶和三阶降阶模型分别为

$$H(s) = \frac{3.9 + x_1 s}{1 + x_2 s + x_3 s^2}, \tag{10}$$

$$H(s) = \frac{3.9 + x_1 s + x_2 s^2}{1 + x_3 s + x_4 s^2 + x_5 s^3}. \tag{11}$$

例 2　考虑如下八阶最小相位系统:

$$G(s) = \frac{194\,480 + 482\,964s + 511\,812s^2 + 278\,376s^3 + 82\,402s^4 + 13\,285s^5 + 1\,086s^6 + 35s^7}{9\,600 + 28\,880s + 37\,492s^2 + 27\,470s^3 + 11\,860s^4 + 3\,017s^5 + 437s^6 + 33s^7 + s^8}, \tag{12}$$

其二阶和三阶降阶模型分别为

$$H(s) = \frac{20.258\,3 + x_1 s}{1 + x_2 s + x_3 s^2}, \tag{13}$$

$$H(s) = \frac{20.258\,3 + x_1 s + x_2 s^2}{1 + x_3 s + x_4 s^2 + x_5 s^3}. \tag{14}$$

显然, 上述降阶模型已满足 $\hat{b}_0/\hat{a}_0 = b_0/a_0$, 待确定参数为 (x_1, x_2, x_3) 或 $(x_1, \cdots, x_5)$. 优化目标函数如式(4), 令 $\omega_0 = 0.01, \omega_{i+1} = 1.1\omega_i, N = 99$. 对两算例的 4 个降阶模型, 均采用本文方法随机独立设计 50 次, 仿真统计结果如表 1 所示.

由表 1 可见, 本文方法所得最优降阶模型与文献[2] 一致, 同时获得最优降阶模型的成功率很高. 这也说明算法对初始解不过分依赖, 不同于文献[2] 需给定初始解. 至于降阶模型(11) 的非全局最优模型结果, 大多同降阶模型(10) 的最优结果, 即 $x_2 \approx 0, x_5 \approx 0, x_1$ 和 x_3 与 x_4 同式(10) 的结果, 也即三阶模型退化为二阶模型. 由于该局部极小特征明显, 显然可排除这种设计结果.

另外, 图 1 和图 2 分别给出了对模型(11) 和模型(14) 的仿真结果, 包括目标函数值与优化参数的收敛曲线. 可见, 目标函数值都很快趋于全局最优(各图采用对数坐标), 一般在搜索过程的前 30%～40% 就迫近全局最优. 同时, 曲线也显示出平台特征, 即该优化问题存在局部极小解, 而 SMSA 能够很好避免陷入局部极小解, 并最终趋于全局最优解.

例 3[3]　带循环的分离器模型为

$$G(s) = \frac{k_d k_{r1} (\tau_{od} s + 1) e^{-\theta_d s}}{(\tau_r s + 1)(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) - k_d k_{r2} (\tau_{od} s + 1) e^{-\theta_d s}}, \tag{15}$$

其二阶带时滞降阶模型为

$$H(s) = \frac{k_{2p}(s + \tau_{2z}) e^{-\tau_{2d} s}}{s^2 + a_{21} s + a_{20}}. \tag{16}$$

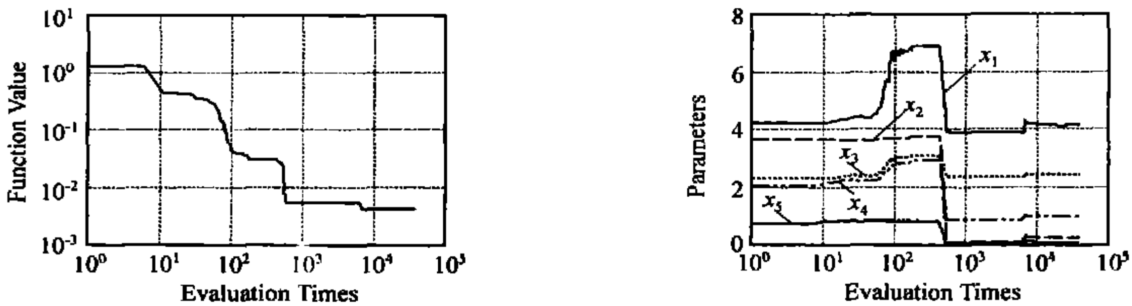
其中: $k_{r1} = 0.258, k_{r2} = 0.281, k_d = 1.449\,4, \theta_d = 0.291\,2, \tau_r = 1.349\,8, \tau_{od} = 0.368\,4, \tau_1 = 1.962\,4, \tau_2 = 0.432\,56$. 为满足 $H(0) = G(0)$, 有

$$a_{20} = \frac{k_{2p}(1 - k_{r2} k_d)}{k_d k_{r1}} \tau_{2z}.$$

优化目标函数如式(4), 令 $\omega_i = 10^{-2 + 0.1i}, i = 0, 1, \cdots, N = 50$. 由于 $k_{2p}, \tau_{2z}, \tau_{2d}$ 和 a_{21} 均要求大于 0, 故仍采用前文的边界约束处理方法. 表 2 为 50 次仿真的统计结果, 明显优于文献[3], 且获得全局最优解的几率很高, 平均评价次数显著小于文献[3].

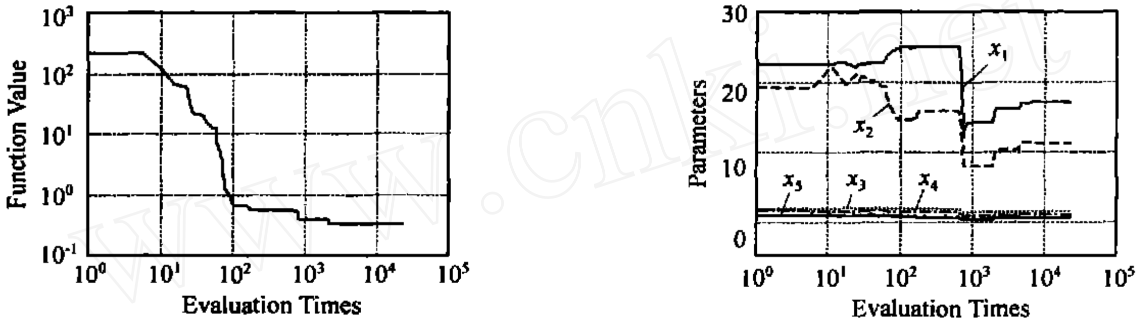
表 1　对例 1 和例 2 进行降阶模型设计的统计结果

模型	参数	达全局最优次数	平均目标值评价次数	最佳目标值	最佳降阶模型 $H(s)$
式(10)	$L = 15, L_1 = 50, L_2 = 20$	48	2 346	0.007 860 8	$\frac{3.9 + 3.778\,2s}{1 + 2.300\,5s + 0.789\,87s^2}$
式(11)	$L = 30, L_1 = 100, L_2 = 50$	37	31 860	0.004 194 5	$\frac{3.9 + 4.117\,3s + 0.218\,76s^2}{1 + 2.388\,9s + 0.952\,71s^2 + 0.043\,105s^3}$
式(13)	$L = 15, L_1 = 50, L_2 = 20$	50	2 077	3.447 6	$\frac{20.258 + 11.628s}{1 + 1.063\,3s + 0.352\,99s^2}$
式(14)	$L = 30, L_1 = 100, L_2 = 50$	47	26 576	0.327 88	$\frac{20.258 + 17.033s + 11.157s^2}{1 + 1.356\,8s + 0.991\,89s^2 + 0.330\,68s^3}$



(a) 目标函数值的收敛情形 (b) 优化参数的收敛情形

图 1 模型(11) 的仿真结果



(a) 目标函数值的收敛情形 (b) 优化参数的收敛情形

图 2 模型(14) 的仿真结果

表 2 对例 3 进行降阶模型设计的统计结果

模 型	参 数	达全局最优次数	平均目标值评价次数	最佳目标值	最佳降阶模型 $H(s)$
式(16)	$L=20, L_1=80, L_2=40$	41	9 113	5.589 4e-6	$\frac{1.977\,1\times10^{-12}(s+6.888\,3\times10^{10})e^{-0.317\,31s}}{s^2+1.266\,5s+0.215\,87}$
式(17)	$L=15, L_1=50, L_2=20$	47	2 385	5.589 6e-6	$\frac{0.136\,18e^{-0.317\,26s}}{s^2+1.266\,4s+0.215\,85}$

另外, 由仿真结果注意到 $k_{2p}\approx 0$, 而 $k_{2p}\tau_{2z}$ (即分子的常数项) 却几乎为常数, 因而在所获得最优目标值的各降阶模型中 k_{2p} 和 τ_{2z} 的数值差异可能很大, 而对应目标函数值却差别很小. 这说明式(16)的分子将 k_{2p} 写在括弧外的描述方法是不恰当的, 使得优化结果的鲁棒性很差. 由此提出如下降阶模型:

$$H(s)=\frac{x_1e^{-x_3s}}{s^2+x_2s+a_0}, \tag{17}$$

其中 $a_0=\frac{1-k_{r2}k_d}{k_dk_{r1}}x_1$. 相比式(16), 显然式(17) 的优化参数少.

基于式(17) 的 50 次独立仿真结果见表 2. 可见, 尽管目标值与式(16) 的结果相近, 但获得最优解的几率增加了, 且目标值的计算次数大大减少, 即优化效率大大提高.

5 结 语

本文基于一类 SMSA 进行模型的最优降阶设计, 提出了处理稳定性和边界约束的有效方法. 基于典型算例的数值仿真验证了所提方法的有效性, 而且算例 3 的结果明显优于以往文献结果. 将本文方法推广到更一般的模型降阶问题和实际工程问题尚有待于进一步研究.

参考文献(References):

[1] Hwang C, Hwang J H. A new two-step iterative method for optimal reduction of linear SISO systems [J]. *J of Franklin Institute*, 1996, 333B(5): 631-645.

[2] Luus R. Optimal reduction of linear systems[J]. *J of Franklin Institute*, 1999, 336(3): 523-532.

[3] Cheng S L, Hwang C. Optimal approximation of linear systems by a differential evolution algorithm[J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics-A*, 2001, 31(6): 698-707.

[4] 王凌. 智能优化算法及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001.

(下转第 953 页)

$\times 10^5$ t, 额定轧制时间为 6 000 h, 轧机的负荷率为 67. 25%, 步进式加热炉的额定产量为 70 t/h, 炉底单位过钢的产量为 503 kg/m^2, 炉子步进梁的步距为 230 mm, 步进周期为 30 s

加热炉从炉长方向可分为预热段、加热 Ⅰ 段、加热 Ⅱ 段和均热段 4 个部分. 其中预热段的长度比较长, 目的是为了能够充分利用烟气来预热入炉钢坯, 从而提高燃料的利用率. 为了将钢坯温度加热至要求的范围内, 加热炉以冷发生炉煤气为燃料, 分为 6 个控制区域对加热炉的燃烧过程和炉温进行控制, 即将加热炉的加热 Ⅰ 段、加热 Ⅱ 段、均热段分成上、下两个区域分别进行控制, 预热段内由于没有设置烧嘴而不参与控制

根据对加热炉钢坯加热过程的分析, 并结合软测量辅助变量的选择原则, 确定分别以均热段、加热 Ⅱ 段和加热 Ⅰ 段下部, 均热段、加热 Ⅱ 段和加热 Ⅰ 段上部的炉温设定值作为钢坯温度预报的辅助变量, 以钢坯出口温度作为主导变量. 根据专家的经验, 首先确定各段炉温设定值的范围, 分别取高、中、低 3 个数值, 共 729 组设定值, 输入到加热炉仿真器, 获得相应的钢坯出口温度, 以此作为神经网络的训练样本. 基于神经网络的钢坯温度软测量模型结构如图 1 所示

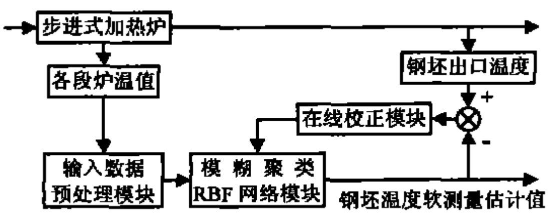


图 1　钢坯温度软测量结构框图

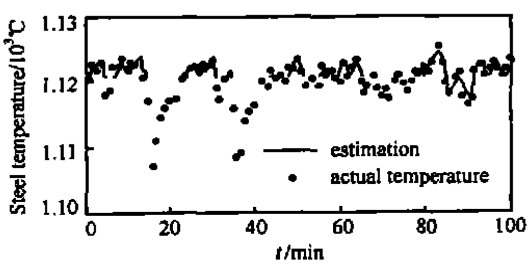


图 2　钢坯温度软测量测试结果

在各段炉温设定值的范围内, 随机产生 100 组设定值, 获得相应的钢坯出口温度, 将其作为神经网络的测试样本, 测试结果如图 2 所示

4　结　语

本文提出的自动确定模糊分类数, 分类中心自适应修正的分布式神经网络软测量建模方法, 由于采用了数据分组的网络训练, 节约了大量的建模训练时间. 仿真结果表明, 采用软测量方法对钢坯温度进行预报, 能较好地反映钢坯加热的实际情况, 满足对加热炉炉温进行控制时, 对钢坯温度预报模型的要求

参考文献(References):

[1] 常玉清, 王福利. 基于模糊规则分类的分布式 RBF 网络软测量模型[J]. 计量学报, 2002, 23(2): 131-133.
(Chang Y Q, Wang F L. Distributed RBF network soft sensor model based on fuzzy rule classification[J]. *Acta Metrologica Sinica*, 2002, 23(2): 131-133.)

[2] Marcantonio Catelani, Ada Fort. Fault diagnosis of electronic analog circuits using a radial basis function network classifier[J]. *Measurement*, 2000, 28: 147-158.

[3] Pekka Teppola, Satu-Pia Mujunen, Pentti Minkkinen. Adaptive fuzzy C-means clustering in process monitoring [J]. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 1999, 45: 23-38.

[4] 王锡淮. 加热炉建模与优化控制研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2003.

[5] 李柠, 王锡淮, 李少远, 等. 步进式加热炉炉温建模与优化仿真系统设计[J]. 系统仿真学报, 2001, 13(3): 361-363.
(Li N, Wang X H, Li S Y, et al. The design of simulation system for reheating furnace modeling and optimization[J]. *J of System Simulation*, 2001, 13(3): 361-363.)

(上接第 950 页)

[5] Wang L, Li L L, Zheng D Z. A class of effective search strategy for parameters estimation of nonlinear systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2003, 29(6): 953-958.

[6] Wang L, Zheng D Z. Simulated annealing with the state generator based on Cauchy and Gaussian distributions [J]. *J of Tsinghua University*, 2000, 40(9): 109-112.

[7] Wang L, Zheng D Z. An effective hybrid optimization strategy for job-shop scheduling problems[J]. *Computers and Operations Research*, 2001, 28(6): 585-596.