文章编号: 1001-0920(2004)09-1030-04

H_∞鲁棒控制器的渐近性质和最优控制器的存在性

王 进 华
(福州大学 电气工程与自动化学院, 福建 福州 350008)

摘　要: 一个系统的所有控制器, 其能达到的不确定抑制水平是有限的, 在这种极限条件下, 控制器会具有存在性问题. 利用状态反馈控制器分析了这种渐近性质, 对极限的存在性进行了讨论. 在最劣条件下, 最优控制器使系统临界稳定. 利用 Riccati 方程给出了最优状态反馈控制器存在的充分必要条件, 简化了最优的判定方法, 并讨论了其判定方面的问题.

关键词: 鲁棒控制; 最优控制; 不确定性; 渐近性质
中图分类号: TP13　　　**文献标识码**: A

Asymptotic performance of H_∞ controller and existence of optimal controller

WANG Jin-hua
(Institute of Electrical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350008, China. E-mail: jinhua-wang@263.net)

Abstract: The behavior of the uncertain disturbance restraining approaches to its limitation is addressed. Several usual systems are given to explain that many H_∞ control problems have no optimal controllers. The asymptotic performance is analyzed in the case of H_∞ state feedback controllers. The necessary and sufficient conditions are given for the existence of optimal H_∞ state feedback controller in Riccati equations. The optimal controller makes system critical stabilization under the worst case disturbance. The optimal feedback controller is constructed. A simplified existing criterion of optimal controller is given by two Riccati equations.

Key words: robust control; optimal control; uncertainty; asymptotic performance

1 引　　言

H_∞控制问题自 80 年代中期兴起, 至今已成为控制理论及应用的一个主要分支. 特别是Doyle 在 1984 用状态空间方法解决了MIMO 的H_∞控制问题, 使得H_∞控制在理论上日趋完善[1,2], 成为与H_2控制并列的两种优化方法之一. H_∞控制主要针对系统含有不确定性时, 分析系统性能和设计控制器使系统鲁棒稳定.

H_∞最优控制问题可表述为: 设计控制器, 使得系统从不确定干扰输入到观测输出的传递函数的H_∞范数极小. 由于H_∞最优控制问题比较复杂, 大多数H_∞控制都用次优问题来描述, 即设计控制器, 使得系统从不确定干扰输入到观测输出的传递函数的H_∞范数小于一个给定值.

对一个系统, 所设计的控制器能达到的不确定性干扰抑制水平是有限的, 即系统从不确定干扰输入到观测输出的传递函数的H_∞范数不可能小于某一个值, 记其为γ_{min}. 则这个问题的反面就是, 是否存在一个控制器, 在不确定性干扰输入的H_∞范数小于γ_{min}时, 系统鲁棒稳定, 这也就是H_∞最优控

收稿日期: 2003-09-22; **修回日期**: 2004-02-02
基金项目: 福建省科技创新基金资助项目(2001J004).
作者简介: 王进华(1963—), 男, 福建上杭人, 教授, 博士, 从事鲁棒控制等研究.

制的存在性问题

目前许多讨论H_∞控制的文献, 都将其归结为设计一个次优的控制器[1,2]. 在多目标鲁棒控制方面, 也都是讨论在一定的不确定水平下的优化问题[3~6]. 即使是在专门讨论H_∞最优控制时[7,8], 也都是在存在最优控制器条件下, 讨论如何得到这个控制器 也就是说, 目前都是基于存在H_∞最优控制器这一条件, 对不同的问题进行研究, 并未讨论最优控制器本身是否存在 本文首先通过常见的系统, 说明H_∞最优控制器的存在性是一个普遍的问题 对于很多系统, 都不存在最优H_∞控制器 在此基础上, 讨论H_∞最优状态反馈控制器的存在性问题, 给出了存在的条件, 并讨论了相应的判定问题

2　问题的引入

本节通过举例说明H_∞最优控制器并不总是存在的, 为便于叙述, 假定系统模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1w + B_2u, \\ z = Cx + Du. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x \in R^n$ 为状态变量; $w \in R^m$ 为不确定性干扰输入; $z \in R^p$ 为系统的评价输出; $u \in R^s$ 为控制输入 A, B_1, B_2, C, D 为相应维数的常数矩阵 对上述系统作假定: (A, B_1) 及 (A, B_2) 完全可控, (A, C) 完全可观测, 且满足正交性条件, 即 $D^T[C\quad D] = [0\quad I]$.

定义 1 (H_∞ 最优控制器)　若存在一个控制器 $K(s)$ 和一个不确定性干扰抑制水平 $\gamma_{\min}$, 使得系统对任意的不确定性输入 $\|w\|_\infty < \gamma_{\min}^{-1}$ 保持稳定 而对任意的 $\gamma < \gamma_{\min}$, 不存在这样一个控制器, 使其鲁棒稳定 则称之为H_∞最优控制器

例 1　系统参数如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

容易得到, 当 $\gamma > \sqrt{2}$ 时, 存在对称正定阵 P 满足 Riccati 不等式方程

$$A^TP + PA + \gamma^{-2}PB_1B_1^TP - PB_2B_2^TP + C^TC < 0, \tag{2}$$

即存在状态反馈控制器 $K = B_2B_2^TP$, 使得上述系统对任意 $\|w\|_\infty < \gamma^{-1}$ 的有界扰动, 鲁棒稳定 当 $\gamma \to \sqrt{2}$ 时, 不等式方程(2) 的对称正定解 $P \to \infty$, 即不存在状态反馈控制器 K, 使得上述系统对任意 $\|w\|_\infty < 1/\sqrt{2}$ 的有界扰动, 保持鲁棒稳定 也就是说, 系统不存在H_∞ 最优状态反馈控制器

例 2　设一阶系统及其评价述出为

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + b_1w + b_2u, b_1 > 0, b_2 > 0, \\ z = [1\quad 0]^Tx + [0\quad 1]^Tu. \end{cases} \tag{3}$$

此时对应的 Riccati 方程可表示为

$$2ap + [(b_1/\gamma)^2 - b_2^2]p^2 + 1 = 0,$$

其正定解可表示为

$$p = \frac{a + \sqrt{a^2 + b_2^2 - (b_1/\gamma)^2}}{b_2^2 - (b_1/\gamma)^2}. \tag{4}$$

下面根据不同的参数情况, 分析极限时 p 的实正定解

1) $a \geq 0$: 当 $0 < \gamma < b_1/b_2$ 时, 式(4) 算得的 $p < 0$; 当 $b_1/b_2 < \gamma < \infty$ 时, 式(4) 算得的 $p > 0$; 当 $\gamma \to (b_1/b_2)^+$ 时, $p \to \infty$.

也就是说, 当 $a \geq 0$ 时, 不存在一个状态反馈控制器, 使得对任意不确定扰动 $\|w\|_\infty < b_2/b_1$, 保证系统鲁棒稳定, 不存在H_∞ 最优状态反馈控制器

2) $a < 0$: 当 $b_1/\sqrt{a^2 + b_2^2} \leq \gamma < \infty$ 时, 式(4) 算得的 $p > 0$; 当 $\gamma = b_1/\sqrt{a^2 + b_2^2}$ 时, $p = -1/a$. 也就是说, 当 $a < 0$ 时, 状态反馈控制器 $K = b_2^2/a$, 是 H_∞ 最优状态反馈控制器, 它使得系统对任意不确定扰动 $\|w\|_\infty < \sqrt{a^2 + b_2^2}/b_1$ 鲁棒稳定

上述例子说明, 即使是常见的双积分系统, 其 H_∞ 最优控制器都是不存在的 从另一个方面也说明, H_∞ 最优控制器的存在性是一个普遍的问题

3　主要结论

为叙述方便, 引入

$$R(P, \gamma) = A^TP + PA + \gamma^{-2}PB_1B_1^TP - PB_2B_2^TP + C^TC.$$

引理 1　若 $\gamma > 0$ 属于 $R(P, \gamma) = 0$ 有正定解且 $A + \gamma^{-2}B_1B_1^TP - B_2B_2^TP$ 稳定的区域, 则在此区域中, $R(P, \gamma) = 0$ 的解阵 P 是 γ 的单调递减函数

证明　设 $\gamma_1 > \gamma_2$ 属于引理 1 所述区域, P_1, P_2 是其对应的 $R(P, \gamma) = 0$ 的解, 则由 $R(P_2, \gamma_2) - R(P_1, \gamma_1) = 0$ 可得

$$(P_2 - P_1)(A + \gamma_1^{-2}B_1B_1^TP_1 - B_2B_2^TP_2) + (A + \gamma_1^{-2}B_1B_1^TP_1 - B_2B_2^TP_2)^T(P_2 - P_1) + M = 0. \tag{5}$$

其中

$$M = (P_2 - P_1)(\gamma_1^{-2}B_1B_1^T + B_2B_2^T)(P_2 -$$

$$P_1) + (\gamma_2^{-2} - \gamma_1^{-2}) P_2 B_1 B_1^T P_2.$$

另外, 考虑到式(1) 系统, $w = \gamma_1^{-2} B_1^T P_1 x$ 是对任意 $\|w\|_\infty \le \gamma_1^{-1}$ 时的最劣扰动输入[4,9]. 而控制 $u = -B_2^T P_2 x$ 可使系统在扰动满足 $\|w\|_\infty \le \gamma_2^{-1}$ 时, 鲁棒稳定. 因 $\gamma_1 > \gamma_2$, 所以在控制 $u = -B_2^T P_2 x$ 的作用下, 扰动为 $w = \gamma_1^{-2} B_1^T P_1 x$ 时, 系统是稳定的, 即 $A + \gamma_1^{-2} B_1 B_1^T P_1 - B_2 B_2^T P_2$ 是稳定阵. 由 Lyapunov 定理, 知式(5) 的解阵 $P_2 - P_1$ 是正定的, 即有 $P_2 > P_1$. □

定理 1 系统(1) 存在 H_∞ 最优状态反馈控制器的充分必要条件是存在一个 $\gamma_{\min} > 0$, 使得 $R(P_{opt}, \gamma_{\min}) = 0$ 有对称正定解; 而对任意的 $\gamma < \gamma_{\min}$, $R(P, \gamma) = 0$ 正定解不存在.

证明 充分性: 若存在一个 $\gamma_{\min} > 0$, 使得 $R(P_{opt}, \gamma_{\min}) = 0$ 有对称正定解; 而对任意的 $\gamma < \gamma_{\min}$, $R(P, \gamma) = 0$ 正定解不存在. 则显然对任意的 $\gamma > \gamma_{\min}$, 有 $R(P_{opt}, \gamma) < 0$, 即状态反馈控制器的增益阵为 $K = -B_2^T P_{opt}$, 是系统的 H_∞ 最优状态反馈控制器.

必要性: 若系统存在 H_∞ 最优状态反馈控制器, 设该控制器增益阵为 K_{opt}, 其不确定干扰抑制水平为 $\gamma_{\min}$. 则显然对任意的 $\gamma < \gamma_{\min}$, $R(P, \gamma) = 0$ 正定解不存在. 否则, 取 $K = -B_2^T P$, 它可使系统(1) 对任意 $\|w\|_\infty < \gamma^{-1}$ 鲁棒稳定, 如此则 K_{opt} 不是 H_∞ 最优状态反馈控制器.

因存在不确定干扰抑制水平为 $\gamma_{\min}$ 的 H_∞ 最优状态反馈控制器, 所以对任意的 $\gamma > \gamma_{\min}$, $R(P, \gamma) = 0$ 有正定解, 且 $A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T P - B_2 B_2^T P$ 稳定. 设 $\{\gamma_n\}$ 是一单调递减且极限为 $\gamma_{\min}$ 的序列, $\{P_n\}$ 是方程 $R(P, \gamma) = 0$ 对应于序列 $\{\gamma_n\}$ 的正定解序列, 由引理 1 知 $\{P_n\}$ 是一单调递增序列. 由 K_{opt} 的最优性可得 $A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T P_n + B_2 K_{opt}$, $n = 1, 2, \cdots$ 是稳定阵; 进而又因 (A, B_1) 和 (A, B_2) 完全可控, (A, C) 完全可观测, 可得序列 $\{P_n\}$ 有界. 单调有界序列必有极限, 记其极限为 P_{opt}, 则显然它是 $R(P_{opt}, \gamma_{\min}) = 0$ 的对称正定解. 取 $K_{opt} = -B_2^T P_{opt}$, 则它满足 H_∞ 最优状态反馈控制器的所有条件. □

定理 2 由 $R(P_{otp}, \gamma_{\min}) = 0$ 确定的 H_∞ 最优状态反馈控制器 $K_{opt} = -B_2^T P_{opt}$, 使得 $A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T P_{opt} + B_2 K_{opt}$ 临界稳定.

证明 将控制律 $u = K_{opt} x$ 代入式(1), 记 $A_k = A + B_2 K_{opt}$, $C_k = C + D K_{opt}$, 记由 w 到 z 的传递函数为 T_{zw}. 由 $R(P_{opt}, \gamma_{\min}) = 0$ 有正定解, 易知 A_k 是稳定阵.

首先证明 $A_w = A + \gamma_{\min}^{-2} B_1 B_1^T P_{opt} + B_2 K_{opt}$ 不可能有右半平面的特征值. 容易验证

$$\begin{aligned}&\gamma_{\min}^2 I - T_{zw}^T(-s) T_{zw}(s) = \\ &\gamma_{\min}^2 I + \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}.\end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -A_k^T & C_k^T C_k \\ \mathbf{0} & A_k \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ B_1 \end{bmatrix}, \tilde{C}^T = \begin{bmatrix} B_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

通过线性变换

$$T = \begin{bmatrix} I & P_{opt} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix},$$

可得

$$\begin{aligned}&\bar{A} = T\tilde{A}T^T = \\ &\begin{bmatrix} -A_k^T & A_k^T P_{opt} + P_{opt} A_k + C_k^T C_k \\ \mathbf{0} & A_k \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\bar{B}^T = T\bar{B} = \begin{bmatrix} P_{opt} B_1 \\ B_1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}^T = T^{-T} \tilde{C}^T = \begin{bmatrix} B_1 \\ -P_{opt} B_1 \end{bmatrix}.$$

由 $R(P_{opt}, \gamma_{\min}) = 0$ 及上述关系, 可得

$$\begin{aligned}&\gamma_{\min}^2 I - T_{zw}^T(-s) T_{zw}(s) = \\ &\gamma_{\min}^2 I + \tilde{C}(sI + \tilde{A})^{-1} \tilde{B} = \\ &\gamma_{\min}^2 I + \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1} \bar{B} = \\ &N^T(-s) N(s),\end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$N(s) = \gamma_{\min} I + B^T P_{opt}(sI - A_k)^{-1} B / \gamma_{\min}.$$

因而可得

$$\begin{aligned}&\gamma_{\min}^2 I - T_{zw}^T(-j\omega) T_{zw}(j\omega) = \\ &N^T(-j\omega)(j\omega) \ge \mathbf{0},\end{aligned}$$

$$\|T_{zw}(s)\|_\infty = \sup_\omega \sigma_{\max}[T_{zw}(j\omega)] \le \gamma_{\min},$$

所以 A_w 不可能有右半平面的特征值.

下面证明 A_w 不可能是稳定阵. 假定 A_w 稳定, 则必定存在一个正实数 γ, 使得

$$A_w^T P + P A_w + \gamma^{-2} P B_1 B_1^T P + C_k^T C^k < \mathbf{0} \tag{8}$$

有正定解. 将式(8) 乘 $1/\gamma^2$ 再加 $\gamma_{\min}^{-2} R(P_{opt}, \gamma_{\min})$ 等于 $\mathbf{0}$, 并令

$$\bar{P} = \frac{\gamma^2 \gamma_{\min}^2}{\gamma^2 + \gamma_{\min}^2}\left(\frac{P}{\gamma^2} + \frac{P_{opt}}{\gamma_{\min}^2}\right), \bar{\gamma} = \frac{\gamma^2 \gamma_{\min}^2}{\gamma^2 + \gamma_{\min}^2},$$

经整理后, 可得

$$A_k^T \bar{P} + \bar{P} A_k + \bar{\gamma}^{-2} \bar{P} B_1 B_1^T \bar{P} + C_k^T C_k < \mathbf{0}.$$

显然 $\bar{P}$ 是正定阵, $\bar{\gamma} < \gamma_{\min}$, 而这与 $\gamma_{\min}$ 的最优性相矛盾, 因此 A_w 不可能是稳定阵.

综上所述, A_w 有特征值在虚轴上, 是临界稳定的. □

下面介绍系统(1) 的另一个 H_∞ 最优状态反馈控制器存在定理 引入如下两个 Riccati 方程:

$$(-\ A)X + X(-\ A)^T - XC^TCX + B_2B_2^T = \mathbf{0}, \tag{9}$$

$$A_XY + YA_X^T + YC^TCY + \gamma^{2}B_1B_1^T = \mathbf{0}, \tag{10}$$

式中

$$A_X = -\ A - XC^TC.$$

定理 3　对系统(1), 存在不确定干扰抑制水平为 $\gamma_{\min}$ 的 H_∞ 最优状态反馈控制器的充分必要条件是: 在 $\gamma = \gamma_{\min}$ 时, 式(9) 和(10) 有正定解, 且 $X - Y > 0$ 若如此, 则 H_∞ 最优状态反馈控制器增益阵可表示为 $K = -\ B_2^T(X - Y)^{-1}$.

证明　首先证明, 对任意的 $\gamma > 0$, 若 $R(P, \gamma) = \mathbf{0}$ 有正定解, 则式(10) 有正定解 因 (A, C) 完全可观测, 式(9) 存在正定解, 且 A_X 是稳定阵 若 $R(P, \gamma) = \mathbf{0}$ 有正定解, 则 P^{-1} 正定, 是 $P^{-1}R(P, \gamma)P^{-1} = \mathbf{0}$ 的解 将式(9) 与 $P^{-1}R(P, \gamma)P^{-1} = \mathbf{0}$ 相加, 令 $Y = X - P^{-1}$, 即可得到式(10); 因 A_X 是稳定阵, $Y = X - P^{-1}$ 是式(10) 的解阵, 由 Lyapunov 定理, Y 是正定的

另外, 对任意的 $\gamma > 0$, 若式(10) 有正定解, 则将式(9) 两边乘 -1 再与式(10) 相加, 经整理后可得

$$\begin{aligned} &A(X - Y) + (X - Y)A^T + \\ &(X - Y)C^TC(X - Y) + \\ &\gamma^{2}B_1B_1^T - B_2B_2^T = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

因 $X - Y > \mathbf{0}$, 其逆存在且正定 记 $P = (X - Y)^{-1}$, 用它分别左乘和右乘上式, 即可得 $R(P, \gamma) = \mathbf{0}$

由上述可知, 存在 $\gamma > 0$, 使 $R(P, \gamma) = \mathbf{0}$ 有正定解, 等价于式(10) 有正定解, 且 $X - Y > \mathbf{0}$ 由定理 1, 即可得到结论 □

推论 1　记式(10) 存在正定解的 γ 范围为 $\mathbf{R}_Y$, $R(P, \gamma) = \mathbf{0}$ 存在正定解的 γ 范围为 $\mathbf{R}_P$. 若 $\mathbf{R}_P$ 是 $\mathbf{R}_Y$ 的一个子集, 则不存在 H_∞ 最优状态反馈控制器

从判定 H_∞ 最优状态反馈控制器而言, 对某些系统, 用定理 3 的推论来判定会比用定理 1 判定简单一些 如对于例 1 系统, 式(9) 的解阵为

$$X = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 \\ -0.5 & 0.866 \end{bmatrix}.$$

当 $\gamma = 1.2$ 时, 式(10) 的解为

$$Y = \begin{bmatrix} 0.630\,3 & 0 \\ 0 & 0.630\,3 \end{bmatrix}.$$

显然, $X - Y$ 不是正定阵, 此时 $R(P, \gamma) = \mathbf{0}$ 无正定解, 系统不存在 H_∞ 最优状态反馈控制器 上述判定过程无需确定 $R(P, \gamma) = \mathbf{0}$ 有正定解的极限 $\gamma_{\min}$.

4　结　语

目前很多讨论 H_∞ 控制的实例, 都称设计一个次优的 H_∞ 控制, 但实际上这些实例根本不存在最优 H_∞ 控制器 本文提出了 H_∞ 最优控制器的存在性问题, 给出了 H_∞ 最优状态反馈控制器的存在性定理, 讨论了其存在性的判定问题

参考文献(References):

[1] Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P, et al State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(8): 831-847.

[2] Mark M Kogan. Robust H_∞ suboptimal and guaranteed cost state feedbacks as solutions to linear-quadratic dynamic games under uncertainty[J]. *Int J of Control*, 2000, 73(3): 219-224.

[3] Paganini F. Frequency domain conditions for robust H_2 performance[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(1): 38-49.

[4] Stoorvogel A A. The robust H_2 control problem: A worst case design[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(9): 1358-1370.

[5] Daniel U Campos-Delgado, Kemin Zhou. Mixed $L_1/H_2/H_\infty$ control design: Numerical optimization approaches[J]. *Int J of Control*, 2003, 76(7): 687-697.

[6] Daniel U Campos-Delgado, Kemin Zhou. A parametric optimization approach to H_∞ and H_2 strong stabilization[J]. *Automatica*, 2003, 39: 1205-1211.

[7] Jie Feng, Malcolm C Smith. When is a controller optimal in the sense of loop-shaping[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(12): 2026-2039.

[8] Roy Smith, Andy Packand. Optimal control of perturbed linear static systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(4): 579-584.

[9] 申铁龙 H_∞ 控制理论及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996.