文章编号: 1001-0920(2004)09-1034-04

参数不确定时滞系统的鲁棒稳定性

董海荣[1], 耿志勇[2], 黄 琳[2]
(1. 北京交通大学 电子信息工程学院, 北京 100044; 2. 北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871)

摘 要: 研究一类具有参数不确定时滞系统的鲁棒稳定性问题. 假定其线性部分的参数不确定性由区间摄动模式描述, 非线性部分的动态不确定性由积分二次约束(IQC)描述, 给出了时滞互联系统鲁棒稳定的充分条件, 并根据 IQC 乘子的特性, 将无穷维稳定性检验问题转化为一维检验或有限检验问题.

关键词: 积分二次约束; 参数不确定性; 时滞; 鲁棒稳定性
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Robust stability of time delay systems with parameter uncertainties

DONG Hai-rong[1], *GENG Zhi-yong*[2], *HUANG Lin*[2]
(1. School of Electronics and Information Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China; 2. Department of Mechanics and Engineering Sciences, Peking University, Beijing 100871, China. Correspondent: DONG Hai-rong, E-mail: hrdong@center.njtu.edu.cn)

Abstract: The robust stability of the time delay system with mixed uncertainties is discussed. It is supposed that the linear part in the forward loop is of parametric uncertainties described by interval perturbation mode, and that the non-linear part in the feedback loop is characterized by an integral quadratic constraint (IQC). A sufficient condition of robust stability for time-delay interconnected systems is given. The infinite stability checking problem of the time delay systems with mixed uncertainties is converted to finite or one dimensional stability checking for different structures of the IQC multipliers.

Key words: integral quadratic constraint; parametric uncertainty; time delay; robust stability

1 引 言

鲁棒性研究一直是控制科学发展中的重要研究课题. 由于实际系统的复杂性, 被控对象往往伴随着各种各样的不确定因素, 只能基于近似描述被控对象的标称数学模型进行分析. 在实际动态系统中, 不确定性大致可分为两类: 一类是包含在模型中的物理参数, 是由系统测量误差、元器件老化和环境等因素的变化或系统辨识不精确等引起的, 称为参数不确定性; 另一类通常是由系统建模时忽略的高频动态特性等引起的, 称为非结构型不确定性. 常见的有锥(扇形) 条件[1]、积分二次约束[2]、范数约束[3] 和时滞等.

近年来, 许多学者针对混合摄动系统的鲁棒稳定性及鲁棒性能的分析, 相继进行了一些有意义的工作[4~6], 使得不确定系统鲁棒控制的研究更贴切实际工程系统的需要. 时滞是比较复杂的, 具有非线性特性, 往往是导致系统不稳定和性能变坏的根源. 因此, 对不确定时滞系统的鲁棒稳定性问题进行研

收稿日期: 2003-08-01; **修回日期**: 2003-11-06.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60304013); 北京交通大学论文基金项目.
作者简介: 董海荣(1974—), 女, 河南驻马店人, 讲师, 博士, 从事鲁棒控制理论与应用的研究; 黄琳(1935—), 男, 中国科学院院士, 教授, 博士生导师, 从事复杂控制稳定性系统理论及相关应用数学问题等研究.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

究, 具有重要的理论意义和实际应用价值 对于参数不确定时滞系统的研究也涌现出一批有价值的研究成果: Fu 等[7] 的研究表明, Kharitonov 定理不适用于一般参数摄动的时滞动力系统, 但D-稳定性的棱边定理仍然成立, 并由此给出了利用Nyquist 图检验D-稳定性的一种几何方法; Naimark 等[8] 利用频域法技巧讨论了类似的问题; Jun 等[9] 利用线性矩阵不等式和积分二次约束方法, 考虑了时滞不确定系统的鲁棒稳定性问题, 并给出了保证系统鲁棒稳定时滞的最大估计值 对于时滞动力系统已进行了相当多的研究, 而对参数不确定时滞系统方面的研究却涉及甚少. 本文主要研究含有参数不确定时滞系统鲁棒稳定性的检验问题, 并根据 IQC 乘子 Π 的特性, 将无穷维稳定性检验问题转化为一维检验或有限检验问题

2 问题描述

考虑图 1 所示的反馈不确定时滞系统, 假定其正向通道的线性不确定部分为时滞凸多面体对象族

$$K(s;P,Q)=\frac{A(s,P)}{B(s,Q)}e^{-hs}=$$
$$\left\{K(s;p,q)=\frac{A(s,p)}{B(s,q)}e^{-hs}: p\in P, q\in Q\right\}. \quad (1)$$

其中: $P\subset \mathbb{R}^{m+1}$ 和 $Q\subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为包含原点的凸多面体, $K(s;P,Q)$ 为凸多面体对象族, $A(s,P)$ 和 $B(s,Q)$ 为凸多面体多项式族

假定系统中有一时滞函数 e^{-hs}, 其中时滞变量 $0\le h\le h^*$, h^* 为一给定的实数 令

$$A(s,P)=\left\{A(s,p)=\sum_{i=0}^{m}\alpha^i(p)s^i, p\in P\right\},$$

$$B(s,Q)=\left\{B(s,q)=\sum_{j=0}^{n}\beta^j(q)s^j, q\in Q\right\},$$

其中 $\alpha_i(p)$ 和 $\beta_j(q)$ 分别为不确定参数向量 $p\in P$ 和 $q\in Q$ 的仿射函数

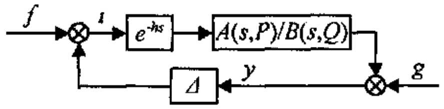

图 1　时滞参数不确定系统

在下面的讨论中假定 $K(s;P,Q)\subset H_\infty$ 用输入输出方法描述图 1 所示参数不确定反馈时滞系统

$$\begin{cases} y = Ku + g, K\in \kappa, \\ u=\Delta(y)+f. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $f, g\in L_{2e}[0,\infty)$; $\Delta: L_{2e}[0,\infty)\to L_{2e}[0,\infty)$ 为一因果有界算子, 满足由 Π 定义的 IQC.

定义 1　称由式(2) 表述的反馈系统是适定的, 是指对任一 $K(s;P,Q)\in K$, 映射 $(u,y)\to(f,g)$ 在 $L_{2e}[0,\infty)$ 上有因果逆 此外, 若存在常数 $c>0$ 对任一 K, $(s;P,Q)\in K$, 满足

$$\int(|u(t)|^2+|y(t)|^2)dt\le$$
$$c\int(|f(t)|^2+|g(t)|^2)dt,$$
$$\forall T\ge 0, \forall p\in P, \forall q\in Q. \quad (3)$$

则称系统是鲁棒稳定的

设 $\bar{R}=[-\infty,+\infty]$. 对于上述同时具有参数和动态不确定性的反馈系统, 可给出如下参数形式的基于 IQC 系统鲁棒稳定的定理:

定理 1[2]　由式(2) 表述的反馈互联系统是鲁棒稳定的, 若对所有的 $p\in P$ 和 $q\in Q$, $\forall \tau\in[0,1]$, $K(s;p,q)$ 和 $\tau\Delta$ 的互联系统是适定的, 则 $\tau\Delta$ 满足由 Π 定义的 IQC, 且

$$\begin{bmatrix} K(j\omega;p,q) \\ 1 \end{bmatrix}^* \Pi(j\omega)\begin{bmatrix} K(j\omega;p,q) \\ 1 \end{bmatrix}<0,$$
$$\forall \omega\in\bar{R}. \quad (4)$$

注 1　适定性与实际物理系统的结构有关, 通常情况下总假定该条件满足 $\tau\Delta$ 满足由 Π 定义的 IQC 与参数不确定性无关, 仅与动态不确定 Δ 和乘子 Π 的结构有关 于是问题便转化为对所有的不确定参数 $p\in P$ 和 $q\in Q$ 检验不等式(4).

下面讨论时滞参数不确定系统的稳定性检验问题 假定 IQC 乘子按输入输出分块为

$$\Pi(j\omega)=\begin{bmatrix} \Pi_{11}(j\omega) & \Pi_{12}(j\omega) \\ \Pi_{12}^*(j\omega) & \Pi_{22}(j\omega) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Pi}(j\omega)=\begin{bmatrix} \Pi_{11}(j\omega) & e^{-j\omega h}\Pi_{12}(j\omega) \\ e^{j\omega h}\Pi_{12}^*(j\omega) & \Pi_{22}(j\omega) \end{bmatrix},$$

且定义

$$W(j\omega;p,q)=$$
$$\begin{bmatrix} A(j\omega;p)e^{-j\omega h} \\ B(j\omega;q) \end{bmatrix}^* \Pi(j\omega)\begin{bmatrix} A(j\omega;p)e^{-j\omega h} \\ B(j\omega;q) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

令

$$\tilde{W}(j\omega;A(j\omega;p)B(j\omega;q))=$$
$$\begin{bmatrix} A(j\omega;p) \\ B(j\omega;q) \end{bmatrix}^* \tilde{\Pi}(j\omega)\begin{bmatrix} A(j\omega;p) \\ B(j\omega;q) \end{bmatrix},$$

易证

$$W(j\omega;p,q)=\tilde{W}(j\omega;A(j\omega;p),B(j\omega;q)). \quad (6)$$

定义 2　给定 $\omega\in\bar{R}$, 若 $\Pi_{11}(j\omega)\ge 0$ 或 $\Pi_{11}(j\omega)=0$, $\Pi_{22}(j\omega)\ge 0$ 或 $\Pi_{22}(j\omega)=0$, 则称 $\tilde{\Pi}(j\omega)$ 是双凸的(双线性的); 若 $\Pi_{11}(j\omega)\ge 0$ 或 $\Pi_{11}(j\omega)\le 0$, $\Pi_{22}(j\omega)\ge 0$ 或 $\Pi_{22}(j\omega)\le 0$, $\Pi_{12}(j\omega)\ne 0$, 则称

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$\tilde{\Pi}(j\omega)$ 是凸凹的; 若 $\Pi_{11}(j\omega) > 0$ 或 $\Pi_{11}(j\omega) < 0$, $\Pi_{22}(j\omega) > 0$ 或 $\Pi_{22}(j\omega) < 0$, $\Pi_{22}(j\omega) \neq 0$, 则称 $\tilde{\Pi}(j\omega)$ 是双曲的.

注 2 由于 $A(s,p)$ 和 $B(s,q)$ 分别是 p 和 q 的仿射函数, 且 e^{-hs} 不改变 IQC 乘子的正负性, 易知对于任意给定的 $\omega \in \bar{R}$, $\tilde{\Pi}(j\omega)$ 是双凸的(双线性的), $W(j\omega, p, q)$ 是双凸(双线性) 函数, $\tilde{\Pi}(j\omega)$ 是凸凹的(双曲的), $W(j\omega, p, q)$ 是凸凹函数.

引理 1

$$\begin{bmatrix} K(j\omega, p, q) \\ 1 \end{bmatrix}^* \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} K(j\omega, p, q) \\ 1 \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \omega \in \bar{R},$$

当且仅当

$$W(j\omega, p, q) < 0, \forall \omega \in \bar{R}. \tag{7}$$

注 3 定理 1 中不等式(4) 的检验等价于对所有的不确定参数检验不等式(7).

引理 2[10] 令 $f: R^n \times R^m \to R$ 是双凸函数, S^* 和 T^* 分别是凸多面体 $S \subset R^n$ 和 $T \subset R^m$ 上的顶点集, 则有

$$\max_{x \in S, y \in T} f(x, y) = \max_{x \in S^*, y \in T^*} f(x, y).$$

引理 3[5] 令 $f: R^n \times R^m \to R$ 是凸凹函数, $S \subset R^n$ 和 $T \subset R^m$ 是凸多面体, $L = aff(T)$ 是 T 上的仿射包, 且 $\alpha \in R$. 如果存在 $y \in L / T$, 对任意的 $x \in S$ 满足 $f(x, y^*) \geq \alpha$, 则 $\max_{x \in S, y \in T} f(x, y) < \alpha$, 当且仅当 $\max_{x \in S^*, y \in \partial_r T} f(x, y) < \alpha$, 其中 $\partial(\cdot)$ 是对应的仿射包的棱边集.

3 主要定理

记 P^* 和 Q^* 分别为 P 和 Q 的顶点集.

定理 2 假定对所有的 $\omega \in \bar{R}$, IQC 乘子 Π 的导出乘子 $\tilde{\Pi}(j\omega)$ 是双凸的, 则图 1 所示时滞参数不确定系统是鲁棒稳定的. 若对任意的 $p \in P$ 和 $q \in Q$, $\forall \tau \in [0,1]$, $K(s; p, q)$ 和 $\tau\Delta$ 组成的互联系统是适定的, 则 $\tau\Delta$ 满足由 Π 定义的 IQC, 且

$$\max_{p \in P^*, q \in Q^*} \begin{bmatrix} K(j\omega, p, q) \\ 1 \end{bmatrix}^* \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} K(j\omega, p, q) \\ 1 \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \omega \in \bar{R}. \tag{8}$$

证明 仅需检验在给定的假定下, 定理中不等式(8) 与定理 1 中不等式(4) 是等价的. 由引理 2, 定理 1 中不等式(4) 等价于

$$\max_{p \in P, q \in Q} W(j\omega, p, q) < 0, \forall \omega \in \bar{R}.$$

由于导出乘子 $\tilde{\Pi}(j\omega)$ 是双凸的, 由注 2 知, 对于任意的 $\omega \in \bar{R}$, $W(j\omega, p, q)$ 为双凸函数. 则由引理 2 可知, 上述不等式成立当且仅当

$$\max_{p \in P^*, q \in Q^*} W(j\omega, p, q) < 0, \forall \omega \in \bar{R}. \tag{9}$$

根据引理 1, 不等式(8) 等价于定理 1 中不等式(4). □

注 4 与定理 1 相比, 定理 2 将无穷维稳定检验问题转化为有限检验问题.

推论 1 假定对所有的 $\omega \in \bar{R}$, IQC 乘子 Π 的导出乘子 $\tilde{\Pi}(j\omega)$ 是双线性的, 则图 1 所示时滞参数不确定系统是鲁棒稳定的. 若对任意的 $p \in P$ 和 $q \in Q$, $\forall \tau \in [0,1]$, $K(s; p, q)$ 和 $\tau\Delta$ 组成的互联系统是适定的, 则 $\tau\Delta$ 满足由 Π 定义的 IQC, 且

$$\max_{p \in P^*, q \in Q^*} \mathrm{Re}\{e^{j\omega h} \Pi_{12}^*(j\omega) K(j\omega, p, q)\} < 0, \quad \forall \omega \in \bar{R}. \tag{10}$$

证明 由于假设导出乘子 $\tilde{\Pi}(j\omega)$ 是双线性的, 即

$$\tilde{\Pi}(j\omega) = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\omega h}\Pi_{12}(j\omega) \\ e^{j\omega h}\Pi_{12}^*(j\omega) & 0 \end{bmatrix},$$

根据定义 1, 由乘子 Π 定义的 IQC 对 τ 是凸的. 因而若 Δ 满足由 Π 定义的 IQC, 对 $\forall \tau \in [0,1]$, $\tau\Delta$ 满足由 Π 定义的 IQC. 而定理 1 中不等式(4), 对于 $\forall \omega \in \bar{R}$ 有

$$\max_{p \in P^*, q \in Q^*} \mathrm{Re}\{e^{j\omega h} \Pi_{12}^*(j\omega) K(j\omega, p, q)\} = \frac{1}{2} \max_{p \in P^*, q \in Q^*} \begin{bmatrix} K(j\omega, p, q) \\ 1 \end{bmatrix}^* \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} K(j\omega, p, q) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

从而推论成立. □

下面考虑 IQC 的导出乘子 $\tilde{\Pi}(j\omega)$ 为凸凹的情形. 令 $p_1^*, p_2^* \in P^*$ 为多面体 P 的两个不同的顶点, $p_E = \{\lambda p_1^* + (1-\lambda) p_2^* : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ 是顶点 p_1^* 和 p_2^* 的凸组合. 若 $P_E \in \partial P$, 则 p_E 可看作多面体 P 的一个凸出棱边. 由于其棱边数是有限的, 定义 p_E 为 P 的所有凸出棱边的集合, 类似地可定义 Q_E.

定理 3 假定对所有的 $\omega \in \bar{R}$, IQC 乘子 Π 的导出乘子 $\tilde{\Pi}$ 为凸凹的, 且有 $\tilde{\Pi}_{11} \geq 0$ 和 $\tilde{\Pi}_{22} \leq 0$, 则图 1 所示时滞参数不确定系统是稳定的. 若对任意的 $p \in P$ 和 $q \in Q$, $\forall \tau \in [0,1]$, $K(s; p, q)$ 和 $\tau\Delta$ 组成的互联系统是适定的, 则 $\tau\Delta$ 满足由 Π 定义的 IQC, 且

$$\max_{p \in P^*, q \in Q_E} \begin{bmatrix} K(j\omega, p, q) \\ 1 \end{bmatrix}^* \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} K(j\omega, p, q) \\ 1 \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \omega \in \bar{R}. \tag{11}$$

证明 首先由定理假设, IQ 乘子 Π 的导出乘子 $\tilde{\Pi}(j\omega)$ 中 $\tilde{\Pi}_{22} = \Pi_{22} \leq 0$, 即由乘子 Π 定义的 IQC 关于 τ 是凸的. 因此, Δ 满足由 Π 定义的 IQC, 对于

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\forall \tau \in [0, 1]$, $\tau\Delta$ 也满足由 Π 定义的 IQC. 而对于定理 1 中的不等式(4), 由引理 1 和式(5) 可得

$$\max_{p \in P^*, q \in Q_E} \tilde{W}(\mathrm{j}\omega; A(\mathrm{j}\omega^*, p), B(\mathrm{j}\omega, q)) < 0,$$
$$\forall \omega \in \bar{R}. \tag{12}$$

对于给定的 $\omega \in \bar{R}$, 由式(5) 定义的 $\tilde{W}(\mathrm{j}\omega; A(\mathrm{j}\omega, p), B(\mathrm{j}\omega, q)) < 0$ 在 $C \times C$ 上是凸凹函数, 等价于在 $R^2 \times R^2$ 上是凸凹函数, 且 $A(\mathrm{j}\omega, P)$ 和 $B(\mathrm{j}\omega, Q)$ 为实域 R^2 上的凸多边形. 由不等式(12) 可知, 对任意的 $\omega \in \bar{R}$, $0 \notin B(\mathrm{j}\omega, Q)$, 否则由棱边定理[11], 存在 $\omega \in \bar{R}$, 使得

$$0 \in B(\mathrm{j}\omega^*, Q_E),$$
$$\max_{p \in P^*, q \in Q_E} \tilde{W}(\mathrm{j}\omega^*; A(\mathrm{j}\omega^*, p), B(\mathrm{j}\omega^*, q)) < 0,$$
$$\forall \omega \in \bar{R}.$$

与不等式(12) 矛盾. 而 $\partial B(\mathrm{j}\omega, Q) \subset B(\mathrm{j}\omega, Q_E)$, 由不等式(12) 可得

$$\max_{p \in P^*, q \in \partial B(\mathrm{j}\omega, Q)} \tilde{W}(\mathrm{j}\omega; A(\mathrm{j}\omega, p), B(\mathrm{j}\omega, q)) < 0,$$
$$\forall \omega \in \bar{R}.$$

因 $\omega \in \bar{R}$, $0 \notin B(\mathrm{j}\omega, Q)$, 而且 $\tilde{W}(\mathrm{j}\omega; A(\mathrm{j}\omega, p), 0) \geq 0$, $\omega \in \bar{R}$, 由引理 3, 不等式(12) 成立, 当且仅当

$$\max_{p \in P, q \in Q} \tilde{W}(\mathrm{j}\omega; A(\mathrm{j}\omega, p), B(\mathrm{j}\omega, q)) < 0,$$
$$\forall \omega \in \bar{R}.$$

等价于定理 1 中的不等式(4). □

类似于以上情形, 可以得到如下定理.

定理 4 　假定对所有的 $\omega \in \bar{R}$, IQC 乘子 Π 的导出乘子 $\tilde{\Pi}$ 为凸凹的, 且有 $\tilde{\Pi}_{11} \leq 0$ 和 $\tilde{\Pi}_{22} \geq 0$, 则图 1 所示时滞参数不确定系统是稳定的. 若对任意的 $p \in P$ 和 $q \in Q$, $\forall \tau \in [0, 1]$, $K(s; p, q)$ 和 $\tau\Delta$ 组成的互联系统是适定的, 则 $\tau\Delta$ 满足由 Π 定义的 IQC, 且

$$\max_{p \in P_E, q \in Q} \begin{bmatrix} K(\mathrm{j}\omega; p, q) \\ 1 \end{bmatrix}^* \Pi(\mathrm{j}\omega) \begin{bmatrix} K(\mathrm{j}\omega; p, q) \\ 1 \end{bmatrix} < 0,$$
$$\forall \omega \in \bar{R}. \tag{13}$$

注 5 　IQC 乘子 Π 的导出乘子为凸凹时, 定理 3 和定理 4 给出了时滞参数不确定系统鲁棒稳定的一维棱边检验结果.

4 　结 　　语

本文基于积分二次约束方法研究了带时滞的参数不确定反馈系统的鲁棒稳定性检验问题. 利用一些已知结果(如顶点检验结果和棱边检验结果), 将无穷维稳定性检验问题转化为一维检验或有限检验问题.

参考文献(References):

[1] Safonov M G. *Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems*[M]. Cambridge: MIT Press, 1980.

[2] Megretski A, Rantzer A. Systems analysis via integral quadratic constraints[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(6): 819-832.

[3] Dong Hai-rong, Geng Zhi-yong, Huang Lin. Stability analysis for the systems with feedback norm constraint uncertaintie[J]. *Int J Control*, 2001, 74(9): 949-956.

[4] Chapellat H, Dahleh M, Bhattacharyya S P. Robust stability under structured and unstructured perturbations[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1990, 35(10): 1100-1108.

[5] Geng Zhi-yong, Huang Lin. Robust stability of the systems with mixed uncertainties under the IQC descriptions[J]. *Int J Control*, 2000, 73(9): 776-786.

[6] Geng Zhi-yong, Huang Lin. Robust stability of systems with both parametric and dynamic uncertainties[J]. *System & Control Letters*, 2000, 39(2), 87-96.

[7] Fu M, Olbrot A W, Polis M P. Robust stability for time-delay systems: The edge theorem and graphical tests[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(8): 813-820.

[8] Naimark L, Ezra Z. All constant gain stabilizing controllers for an interval delay system with uncertain parameters[J]. *Automatica*, 1997, 33: 1669-1675.

[9] Jun M, Safonov M G. Multiplier IQC's for uncertain time-delays[A]. *Proc of ACC*[C]. Arlington, 2001. 425-427.

[10] Barmish B R. *New Tools for Robustness of Linear Systems*[M]. New York: Maxwell, Macmillan Int, 1994.

[11] Bartlett A C, Hollot C V, Huang L. Root location of an entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges[J]. *Mathematic Control Signals Systems*, 1988, 1(1): 61-71.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net