

文章编号: 1001-0920(2004)09-1038-04

## 一类基于几何分析的迭代学习控制算法

田森平<sup>1</sup>, 谢胜利<sup>2</sup>, 谢振东<sup>2</sup>

(1 华南理工大学 自动化学院, 广东 广州 510640; 2 华南理工大学 无线电与自动控制研究所, 广东 广州 510640)

**摘要:** 基于几何分析, 对迭代学习控制方法的几何框架进行探索. 首先通过对 Arimoto 算法所构成的向量图进行几何分析, 导出了一类新的迭代学习算法结构; 然后从理论上对所导出的算法进行完整的收敛性分析. 该算法结构与已有算法完全不同, 但其收敛速度和精度明显提高. 仿真结果表明了新算法的有效性和优越性.

**关键词:** 迭代学习控制; 几何理论; 收敛性分析

**中图分类号:** TP273.2 **文献标识码:** A

## Iterative learning control algorithms based on geometric analysis

TIAN Sen-ping<sup>1</sup>, XIE Sheng-li<sup>2</sup>, XIE Zhen-dong<sup>2</sup>

(1 College of Automation, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China; 2 Institute of Radio and Automatic Control, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China. Correspondent: TIAN Sen-ping, E-mail: ausptian@scut.edu.cn)

**Abstract:** Based on geometric analysis, the geometric frame of iterative learning control method is dealt with. The structure of a class of new iterative learning algorithms is obtained by analyzing the vector plots of Arimoto algorithms. The structure is different from the present algorithms. It is with faster speed of convergence and higher accuracy. Simulations show the effectiveness and advantage of the new algorithm.

**Key words:** iterative learning control; geometric theory; convergence analysis

### 1 引言

迭代学习控制方法适用于具有重复运动性质的被控对象, 可实现有限时间区间上的完全跟踪任务, 且不依赖被控对象的详细模型. 迭代学习控制作为智能控制的一个重要分支, 由于其简单有效而受到控制界的广泛关注, 已经取得了大量的研究成果, 其应用范围也在不断扩大<sup>[1~4]</sup>. 迭代学习控制研究的重要内容之一是关于算法结构的研究, 包括提出新的学习算法、加快算法的收敛速度和算法的收敛性证明等. 已经提出的迭代学习控制算法有 P 型、D 型、PD 型和 PID 型以及各种改进形式<sup>[5~8]</sup>. 虽然这些算法都有自己的特点和适用范围, 但它们基本都

是沿着 Arimoto<sup>[1]</sup>所提出的算法演化而来, 可以说是同一类算法. 那么, 是否存在其他类型的更好算法, 能否在理论上建立完整的框架, 使迭代学习控制在这一理论框架下发展呢? 鉴于此想法, 文献[9]提出了迭代学习控制的几何理论方法, 并在这一方法的指导下, 得到了一类收敛速度较快的非线性迭代学习控制算法.

本文是对文献[9]提出的几何理论方法的丰富和完善, 通过对 Arimoto 算法所构成的向量图进行几何分析, 得到了一类新的迭代学习控制算法. 该算法的结构与已有的算法完全不同, 但其收敛速度和精度明显提高. 此外, 本文对所导出的新算法给出

收稿日期: 2003-06-09; 修回日期: 2004-03-12

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(60325310); 国家自然科学基金资助项目(60174006); 教育部重点科研基金资助项目(02152); 广东省自然科学基金重点基金资助项目(020826).

作者简介: 田森平(1961—), 男, 副教授, 博士, 从事非线性系统的迭代学习控制理论与算法研究; 谢胜利(1959—), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性系统学习控制、机器人系统等研究.

了完整的收敛性证明

## 2 几何分析及新算法的构造

考虑如下非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t), \\ y(t) = C(x, t) + B(t)u(t), \end{cases} \quad t \in [0, T]; \quad (1)$$

初始条件为  $x(0) = x_0$  其中:  $x, u, y, f, B$  和  $C$  是相应维数的向量或矩阵函数, 且都是 Lipschitz 连续的, 即

$$\|f(x_1, u_1, t) - f(x_2, u_2, t)\| \leq L_f (\|x_1 - x_2\| + \|u_1 - u_2\|), \quad (2)$$

$$\|C(x_1, t) - C(x_2, t)\| \leq L_C \|x_1 - x_2\|. \quad (3)$$

其中:  $L_f$  和  $L_C$  未知, 系统的理想输出为  $y_d(t)$ .

由于系统的不确定性, 要寻求理想输入  $u_d(t)$ , 使其所对应的系统输出恰为  $y_d(t)$  较为困难. 因此, 人们试图通过如下“学习”的方式寻找  $u_d(t)$ , 即

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + L(t)e_k(t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

其中:  $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ , 而  $y_k(t)$  是系统(1)的输入  $u_k(t)$  所对应的输出,  $L(t)$  是待定的增益矩阵. 若由式(4)所确定的输入序列  $\{u_k(t)\}$  能收敛, 则其极限  $u^*(t)$  便是要寻找的理想输入.

从式(4)可看出, 学习的过程就是通过当前(第  $k$  步)的输入输出及相应误差的信息来确定下一步(第  $k+1$  步)的输入, 使得输入序列  $u_k(t)$  尽快收敛. 记  $\bar{u}_k(t) = u_k(t) - u_d(t)$ , 则式(4)可变为

$$\bar{u}_{k+1}(t) = \bar{u}_k(t) + L(t)e_k(t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

要使  $u_k(t)$  尽快收敛, 就需使  $\|\bar{u}_k(t)\|$  尽快减少至零. 为方便起见, 将  $\bar{u}_k(t)$  仍写为  $u_k(t)$ . 将式(5)中的3项看成向量, 便得到图1(a)所示的向量图. 在图1(a)中考虑向量  $u_{k-1}(t)$  便得到图1(b).

在图1(b)中向量  $L e_{k-1}$  上任取一点  $d$ , 以  $d$  为起点作  $L e_k$  的等效向量  $\vec{dg}$  ( $\vec{dg}$  记为  $\hat{e}_k$ ), 连接  $\vec{od}$  和  $\vec{og}$  (分别记为  $\hat{u}_k$  和  $\hat{u}_{k+1}$ ), 如图1(c)所示. 则有

$$u_{k+1} = u_k + \hat{e}_k = u_k + L e_k \quad (6)$$

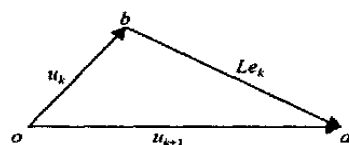
从图1(c)可知,  $\|\hat{u}_{k+1}\| < \|u_{k+1}\|$ . 记  $\hat{u}_k(\alpha) = u_k - \alpha(u_k - u_{k-1})$ , 则有  $\hat{u}_k(0) = u_k$ ,  $\hat{u}_k(1) = u_{k-1}$ . 故存在  $\alpha \in (0, 1)$ , 使得  $\hat{u}_k(\alpha) = \vec{od} = \hat{u}_k$ . 从而式(6)可写为

$$u_{k+1} = u_k - \alpha(u_k - u_{k-1}) + L e_k \quad (7)$$

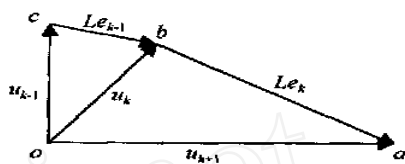
因此, 对应图1(a)情况的新算法具有如下结构:

$$u_{k+1} = u_k - \alpha(u_k - u_{k-1}) + L e_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

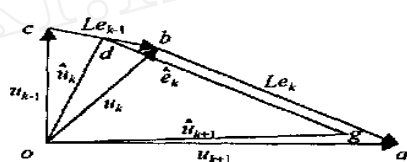
由于对应式(5)的向量图除图1外还有其他情



(a) 向量图 1



(b) 向量图 2



(c) 向量图 3

图1 向量分析图

况, 通过对其进行类似的分析可知, 新算法要么具有结构(8)的形式, 要么具有如下结构:

$$u_{k+1} = u_k + \alpha(u_k - u_{k-1}) + L e_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

故改进算法应具有如下形式:

$$u_{k+1} = u_k \pm \alpha(u_k - u_{k-1}) + L e_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

## 3 新算法的收敛性分析

上一节导出的形如式(10)的新算法结构, 是通过几何直观得到的, 其有效性还有待于理论分析. 另外, 在算法结构(10)中, 正负号在迭代过程中可能交替进行, 如何刻画这种交替来实现新的算法也是一个需要考虑的问题.

本文假定, 在每次学习时系统都经过相同的初始状态, 即  $x_k(0) = x_0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . 再记  $\Delta u_{k+1}(t) = u_{k+1}(t) - u_k(t)$ , 利用文献[3]中定义的范数, 不难证明如下引理:

**引理1** 对适当大的  $\lambda$  及  $\xi > 1$ , 如下估计成立:

$$\|x_{k+1} - x_k\|_{(\lambda, \xi)} \leq \frac{L_f}{\lambda(\lambda - L_f)} \|\Delta u_{k+1}\|_{(\lambda, \xi)}.$$

**引理2** 若  $\rho, \alpha \in (0, 1)$ , 且对正常数  $a, b$  有

$$\frac{\alpha \rho a}{1 - \rho} \cdot \frac{\alpha b}{1 - \alpha} < 1$$

成立. 则存在  $\xi > 1$  及适当大的正数  $\lambda$ , 使得对正常数  $c, d, l$ , 有  $G(\lambda, \xi) \in (0, 1)$  成立. 其中

$$G(\lambda, \xi) = \frac{\xi \rho}{1 - \xi \rho} \cdot \frac{\xi c d}{\lambda(\lambda - c)} \cdot \frac{\xi \alpha \xi l}{1 - \xi \alpha} +$$

$$\frac{\xi \rho \xi \alpha a}{1 - \xi \rho} \cdot \frac{\xi \alpha \xi b}{1 - \xi \alpha}$$

利用引理1和引理2,可以证明本文算法的收敛性

**定理1** 若算法(10)中的参数 $\sigma$ 及增益矩阵 $L(t)$ 满足: 1)  $\|I - B(t)L(t)\| \leq \rho \in (0, 1)$ ; 2)  $\frac{\alpha \rho L_B}{1 - \rho} \cdot \frac{\alpha l}{1 - \alpha} \in (0, 1)$ . 则由算法(10)确定的输入序列 $\{u_k(t)\}$ 在 $[0, T]$ 上是一致收敛的,且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = 0, \forall t \in [0, T]$$

其中:  $l = \sup_{0 \leq t \leq T} \|L(t)\|, L_B = \sup_{0 \leq t \leq T} \|B(t)\|$ .

**证明** 由 $e_k(t)$ 的定义及式(1), (10)及条件1)和式(3),有

$$\|e_k(t)\| \leq \rho^k \|e_0(t)\| + \sum_{i=1}^{k-1} \rho^{k-i-1} (L_C \|x_{i+1}(t)\| + \alpha L_B \|\Delta u_i(t)\|). \quad (11)$$

首先选取适当的 $\lambda$ ,使得 $\lambda - L_f > 0$ ,再因 $\rho, \alpha \in (0, 1)$ 及定理1的条件2),由引理2知,存在 $\xi > 1$ ,使得 $G(\lambda, \xi) \in (0, 1)$ .其中

$$G(\lambda, \xi) = \frac{\xi \rho}{1 - \xi \rho} \cdot \frac{\xi L_C}{\lambda(\lambda - L_f)} \cdot \frac{\xi \alpha \xi l}{1 - \xi \alpha} + \frac{\xi \rho \xi \alpha L_B}{1 - \xi \rho} \cdot \frac{\xi \alpha \xi l}{1 - \xi \alpha} \quad (12)$$

对所选取的 $\lambda$ 和 $\xi$ ,由引理1,有

$$\begin{aligned} (\|e_k(t)\| \xi^k) e^{-\lambda t} &\leq \\ (\rho \xi)^k \|e_0\|_\lambda + \sum_{i=1}^{k-1} (\rho \xi)^{k-i-1} \xi \times \\ &\left( \frac{L_f L_C}{\lambda(\lambda - L_f)} \|\Delta u_{i+1}\|_{(\lambda, \xi)} + \alpha L_B \|\Delta u_i\|_{(\lambda, \xi)} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

再由式(10)及上述类似方法可得

$$\|\Delta u_k\|_{(\lambda, \xi)} \leq (\xi \alpha)^k \|\Delta u_0\|_\lambda + \sum_{i=1}^{k-1} (\xi \alpha)^{k-i-1} \xi l \|e_i\|_{(\lambda, \xi)}. \quad (14)$$

将式(14)代入(13),有

$$\begin{aligned} (\|e_k(t)\| \xi^k) e^{-\lambda t} &\leq \\ Q + G(\lambda, \xi) \sup_{1 \leq i \leq k} \{\|e_i\|_{(\lambda, \xi)}\}. \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$Q = \|e_0\|_\lambda + \left( \frac{\xi \rho}{1 - \xi \rho} \cdot \frac{\xi L_C}{\lambda(\lambda - L_f)} + \frac{\xi \rho \xi \alpha L_B}{1 - \xi \rho} \right) \|\Delta u_0\|_\lambda$$

由于式(15)的右端与 $t$ 无关,且右端关于 $k$ 是增加的,从而有

$$\sup_{1 \leq i \leq k} \{\|e_i\|_{(\lambda, \xi)}\} \leq Q + G(\lambda, \xi) \sup_{1 \leq i \leq k} \{\|e_i\|_{(\lambda, \xi)}\}. \quad (16)$$

又 $G(\lambda, \xi) \in (0, 1)$ ,故

$$\sup_{1 \leq i \leq k} \{\|e_i\|_{(\lambda, \xi)}\} \leq \frac{Q}{1 - G(\lambda, \xi)}.$$

从而对 $t \in [0, T]$ ,有 $\|e_k(t)\| \leq \xi^k e^{\lambda t}$

$\sup_{1 \leq i \leq k} \{\|e_i\|_{(\lambda, \xi)}\} \leq \frac{Q e^{\lambda T}}{1 - G(\lambda, \xi)} \xi^k$ . 由于 $\xi > 1$ ,有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(t)\| = 0, \forall t \in [0, T]$ 关于 $\{u_k(t)\}$ 的一致收敛性证明略  $\square$

在算法(10)中,正负号对应于迭代过程中不同的情形,何时取正何时取负,在迭代中很难确定.如何刻画正负号的交替是一个值得深入探讨的问题,在此给出一个用自适应因子描述的方法.当然该方法不一定是最好的,但它确是一个近似的描述.取 $\beta = h(a - \exp(-b\|e_k\|))$ ,只要 $a \in (0, 1)$ ,便可选取 $b$ ,使得 $\beta$ 随 $\|e_k\|$ 的大小变化而正负改变.这样便可得到一种带自适应因子的改进算法,即

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) &= \\ u_k(t) + h(a - \exp(-b\|e_k\|))(u_k(t) - \\ u_{k-1}(t)) + L e_k(t), k &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (17)$$

#### 4 数值仿真比较

为了说明改进算法的有效性和优越性,考虑如下多输入多输出系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + f(x(t)) + B u(t), \\ y(t) = C x(t) + D u(t), \end{cases} t \in [0, 2] \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \\ y(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ f(x(t)) &= \begin{bmatrix} \sin(x_1(t)x_2(t)) \\ \cos(x_1(t) + x_2(t)) \end{bmatrix}, \\ y_d &= \begin{bmatrix} y_{1d}(t) \\ y_{2d}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \sin 5t \\ 4t^3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

在改进算法(17)中,取 $h = 0.095, a = 0.9, b = 1, L = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}$ ,并设系统(18)开始学习时的初始状态 $x_0 = (0, 0)^T$ ,初始输入 $u_0 = (0, 0)^T$ .图2和图3为Arimoto算法(4)和改进算法(17)在迭代

第8次、第9次和第10次时关于 $y_{1d}(t)$ 的跟踪情况而图4和图5则为相应的算法在迭代第6次、第7次和第8次时关于 $y_{2d}(t)$ 的跟踪情况从图2~图5可清楚地看出,当改进算法(17)已跟踪到目标曲线时,Arimoto算法(4)跟踪目标曲线还存在很大误差

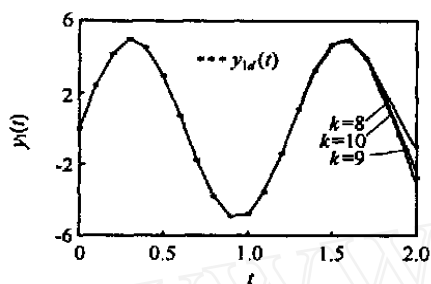


图2 算法(4)学习控制系统输出的第1分量

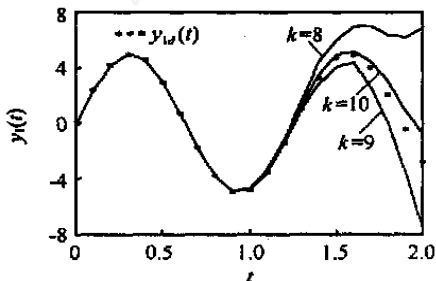


图3 算法(18)学习控制系统输出的第1分量

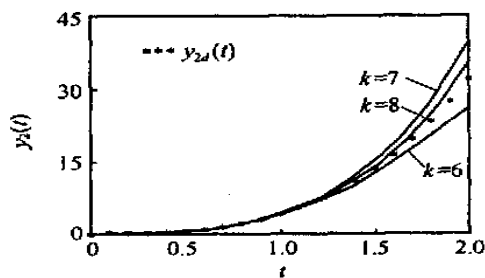


图4 算法(4)学习控制系统输出的第2分量

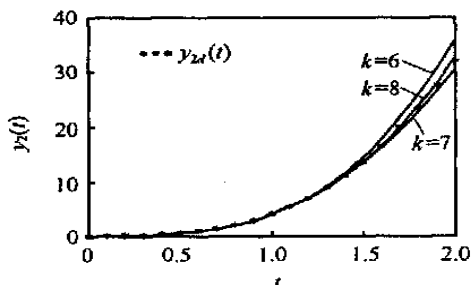


图5 算法(18)学习控制系统输出的第2分量

## 5 结 语

本文将迭代学习控制方法建立在数学几何分析这一理论框架下,通过对Arimoto算法所构成的向量图分析,获得了一类新的迭代学习控制快速算法数值仿真例子表明了新算法的优越性当然,在改进算法(10)的实现代数描述上,只给出了一种近似的刻画,较准确的实现尚需进一步深入研究

## 参考文献(References):

- [1] Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of robots by learning [J]. *J of Robotic Systems*, 1984, 1(2): 123-140
- [2] Kurek J E. Counterexample to iterative learning control of linear discrete-time multivariable systems [J]. *Automatica*, 2000, 36(2): 327-328
- [3] 谢胜利, 谢振东, 刘永清. 滞后广义系统状态跟踪的学习控制算法[J]. *系统工程与电子技术*, 1999, 21(5): 10-16  
(Xie S L, Xie Z D, Liu Y Q. Learning control algorithm for state tracking of singular systems with delay[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 1999, 21(5): 10-16)
- [4] Geng Z, Carroll R, Xie J. Two-dimensional model and algorithm analysis for a class of iterative learning control systems[J]. *Int J of Control*, 1990, 52(4): 833-862
- [5] Chien C J, Liu J S. A P-type iterative learning controller for robust output tracking of nonlinear time-varying systems[J]. *Int J of Control*, 1996, 64(2): 319-334
- [6] Wang D. A simple iterative learning controller for manipulators with flexible joints[J]. *Automatica*, 1995, 31(9): 1341-1344
- [7] Jang T J, Choi C H, Ahn H S. Iterative learning control in feedback systems[J]. *Automatica*, 1995, 31(2): 243-248
- [8] Lee H S, Bien Z. Study on robustness of iterative learning control with non-zero initial error[J]. *Int J of Control*, 1996, 64(3): 345-359
- [9] 谢胜利, 田森平, 谢振东. 基于几何分析的迭代学习控制快速算法[J]. *控制理论与应用*, 2003, 20(3): 419-422  
(Xie S L, Tian S P, Xie Z D. Fast algorithm of iterative learning control based on geometric analysis [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(3): 419-422)