第19卷第9期 控 制 与 决 策 2004年9月
Vol. 19 No. 9 Control and Decision Sept. 2004

文章编号: 1001-0920(2004)09-1060-04

一类交通网络模型下路段行程时间的解析解

徐 猛, 史忠科
(西北工业大学 空中交通管理系统研究所, 陕西 西安 710072)

摘 要: 针对一类路段输入流量具有时变特性的路段行程时间进行讨论, 所讨论的路段行程时间与路段流量具有指数函数关系. 因无法直接求出这类方程关于路段行程时间的解析解, 故对指数函数按级数进行展开, 得出了路段行程时间以及输出流量随输入流量变化的关系. 最后用数值试验对所得结论进行了仿真, 结论令人满意.

关键词: 路段行程时间; 交通模型; 输入流量; 输出流量
中图分类号: U491 **文献标识码**: A

Analytic solution of link travel time for a traffic network model

XU Meng, *SHI Zhong-ke*
(Air Traffic Management Institute, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China. Correspondent: XU Meng, E-mail: xm_nwpu@hotmail.com)

Abstract: The link travel time corresponding to time-varied inflows, which has an exponential function relation with the link traffic flow, is disscussed. Because analytic solution of link travel time can not be found directly, the analysis of the 1-order series expansion of exponential function is used to get the solution. The relationship between outflows and inflows is given out. The numerical simulation demonstrates that the conclusion is satisfied.

Key words: link travel time; traffic model; inflow; outflow

1 引 言

无论是交通流理论的研究, 还是交通网络的分析, 路段行程时间都是判断交通运行状态的一个非常重要的物理量. 目前, 智能运输系统(ITS)被公认为解决交通拥挤、道路阻塞和交通事故等交通问题的最佳途径, 通过利用可变信息标志将路段行程时间信息(如对主要路段行程时间的估计)提供给驾驶员, 有助于驾驶员在道路网络中选择较好的行驶路线. 恰当地估计未来路网行程时间是交通理论研究的重要问题之一, 各国学者研究建立了多种算法, 如历史趋势、时间序列、神经网络、卡尔曼滤波、交通模拟等. 然而, 在变化的交通状况和任意时段的条件下, 这些方法和模型都不能取得令人满意的预测结果.

本文试图从分析的角度来探讨一类现有的路段行程时间模型的解, 给出了路段行程时间随输入流量与输出流量的变化而变化的关系. 仿真结果表明, 所给出的变化规律符合实际交通流的情况.

2 一类路段流量与路段行程时间具有指数函数关系的模型

在动态交通分配模型中, 假设路段行程时间是路段上 t 时刻流量 x 的函数, 同时也是 t 时刻输入流量与输出流量的函数. 设 $x(t), u(t), v(t)$ 分别表示时刻 t 路段上的流量、输入流量和输出流量, $\tau(t)$ 表示时刻 t 进入路段的交通流的行程时间, 则

$$\tau(t) = f_1(x(t), u(t)) + f_2(x(t), v(t)). \qquad (1)$$

收稿日期: 2003-08-25; **修回日期**: 2004-03-07.
基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(60134010).
作者简介: 徐猛(1976—), 男, 湖北松滋人, 博士生, 从事交通运输规划、交通分配算法等研究; 史忠科(1956—), 男, 陕西岐山人, 教授, 博士生导师, 从事控制理论与工程、系统工程等研究.

其中: f_1 表示车辆在路段上的行程时间, f_2 表示车辆在路段上的延滞时间, f_1 和 f_2 是非负的且关于变量 x, u 及 x, v 的增函数. 若视 f_1 和 f_2 分别关于变量独立, 则 f_1 和 f_2 可分别写为

$$f_1 = f_{1a}(x(t)) + f_{1b}(u(t)),$$
$$f_2 = f_{2a}(x(t)) + f_{2b}(v(t)).$$

于是式(1) 可写为

$$\tau(t) = \alpha + f(x(t)) + g(u(t)) + h(v(t)). \quad (2)$$

其中: α 可视为车辆自由行驶所花费的时间, $f(0) = g(0) = h(0) = 0$.

式(2) 的一个重要特殊情形是 $\tau(t) = \alpha + f(x(t))$, 即假设路段行程时间仅与路段上的交通流量有关, 文献[1～4] 对此均有介绍. Carey 等[5] 对路段行程时间依赖于流量的如下形式:

$$\tau(t) = \alpha + \beta(x(t))^n, n \geq 1, \alpha, \beta > 0 \quad (3)$$

的路段行程时间模型进行研究, 对一些简单情形给出了关于 $\tau(t)$ 的解的一些结果.

在动态交通网络模型中, 对于 $\tau(t)$ 与流量具有的指数函数关系

$$\tau(t) = \beta_1 \exp(\beta_2 x(t)), \beta_1, \beta_2 > 0, \quad (4)$$

在许多模型中均可见到[2], 其中 β_1 和 β_2 是模型参数, 由交通调查所获得的数据确定. 显然, 由级数展开理论可知, 当 $\beta_2 x(t) \in (0, 1)$ 时, $\exp(\beta_2 x(t))$ 可表示为

$$\exp(\beta_2 x(t)) = \sum_{n=0}^{n} \frac{(\beta_2 x(t))^n}{n!} + \frac{(\beta_2 x(t))^{n+1}}{(n+1)!} \exp(\theta \beta_2 x(t)),$$
$$0 < \theta < 1. \quad (5)$$

式(5) 对分析与流量具有指数函数关系的路段行程函数 $\tau(t)$ 具有重要意义. 本文将对输入流量具有时变特性的路段行程函数 $\tau(t)$ 进行研究.

3　输入流量具有时变特性的路段行程时间

考虑一种最简单的路段流量输入函数

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ U_0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

假设在 $t = 0$ 时, $x(t) = v(t) = 0$, 则由式(4) 得 $\tau(0) = \beta_1$. 假定路段上无匝道, 车流进入和离开仅在路段的起点与终点, 可得路段上在 t 时刻的流量

$$x(t) = x(0) + \int [u(w) - v(w)] \mathrm{d}w =$$
$$\int [u(w) - v(w)] \mathrm{d}w. \quad (7)$$

设路段上在 t 时刻进入的流量在 $t + \tau(t)$ 时刻离开, 则

$$\int u(w) \mathrm{d}w = \int^{\tau(t)} v(w) \mathrm{d}w. \quad (8)$$

对式(8) 两端关于 t 微分, 得

$$u(t) = v(t + \tau(t)) \left(1 + \frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t} \right),$$

或

$$v(t + \tau(t)) = \frac{u(t)}{1 + \mathrm{d}\tau(t)/\mathrm{d}t} \quad (9)$$

取式(5) 的一阶展开式, 即

$$\tau(t) = \beta_1 (1 + \beta_2 x(t)), \quad (10)$$

两边关于 t 微分, 并由式(7) 得

$$\mathrm{d}\tau(t)/\mathrm{d}t = \beta_1 \beta_2 (u(t) - v(t)), \quad (11)$$

代入式(9), 得

$$v(t + \tau(t)) = \frac{u(t)}{1 + \beta_1 \beta_2 (u(t) - v(t))}. \quad (12)$$

由式(6) 和(10), 路段上车流的自由行程时间为 $\tau_0 = \beta_1$, 即在 $t = 0$ 时刻进入路段的车流量, 经过路段行程时间 $\tau_0 = \beta_1$ 后流出. 于是在 $0 \leq t \leq \beta_1$ 内, 路段上的输出流量 $v_0 = 0$, 路段上的流量为 $x(t) = U_0 \tau_0$. 同样地, 在时刻 $t = \tau_0$ 进入路段的流量, 设经过行程时间 τ_1 后从路段上流出, 于是在时段 $\tau_0 \leq t < \tau_0 + \tau_1$ 内的输出流量, 由式(12) 得

$$v_1(t) = \frac{U_0}{1 + \beta_1 \beta_2 U_0}, \quad (13)$$

其中

$$\tau_1(t) = \beta_1 (1 + \beta_2 x(t)) =$$
$$\beta_1 \left(1 + \beta_2 \int^{\tau_0} (U_0 - v_0) \mathrm{d}\omega \right) =$$
$$\beta_1 \sum_{i=0}^{1} (\beta_1 \beta_2 U_0)^i. \quad (14)$$

在时刻 $t = \tau_0 + \tau_1$ 进入路段的流量, 设经过行程时间 τ_2 后从路段上流出, 于是在时段 $\tau_0 + \tau_1 \leq t < \tau_0 + \tau_1 + \tau_2$ 内的输出流量, 由式(12) 得

$$v_2(t) = \frac{U_0 (1 + \beta_1 \beta_2 U_0)}{1 + \beta_1 \beta_2 U_0 + (\beta_1 \beta_2 U_0)^2}, \quad (15)$$

其中

$$\tau_2(t) = \beta_1 (1 + \beta_2 x(t)) =$$
$$\beta_1 \left(1 + \beta_2 \int^{\tau_0} (U_0 - v_0) \mathrm{d}w + \right.$$
$$\left. \beta_2 \int^{\tau_0 + \tau_1} (U_0 - v_1) \mathrm{d}\omega \right) =$$
$$\beta_1 \sum_{i=0}^{2} (\beta_1 \beta_2 U_0)^i. \quad (16)$$

依次类推, 得出在时刻 $t = \sum_{i=0}^{n-1} \tau_i$ 进入路段的流量, 设经过行程时间 τ_n 后从路段上流出, 于是在时段 $\sum_{i=0}^{n-1} \tau_i \leq t < \sum_{i=0}^{n} \tau_i$ 内的输出流量, 由式(12) 得

$$v_n(t) = \frac{U_0 \sum_{i=0}^{n-1} (\beta_1 \beta_2 U_0)^i}{\sum_{i=0}^{n} (\beta_1 \beta_2 U_0)^i}, \tag{17}$$

其中

$$\begin{aligned} \tau_n(t) &= \beta_1 (1 + \beta_2 x(t)) = \\ &\beta_1 \left(1 + \beta_2 \int_0^{\sum_{i=0}^{n-1} \tau_i} (U_0 - v_i) \mathrm{d}\omega \right) = \\ &\beta_1 \sum_{i=0}^{n} (\beta_1 \beta_2 U_0)^i. \end{aligned} \tag{18}$$

由式(17) 得

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \begin{cases} U_0, U_0 \le \dfrac{1}{\beta_1 \beta_2}; \\ \dfrac{1}{\beta_1 \beta_2}, U_0 > \dfrac{1}{\beta_1 \beta_2}. \end{cases} \tag{19}$$

由式(18) 得

$$\lim_{n \to +\infty} \tau_n = \begin{cases} \dfrac{\beta_1}{1 - \beta_1 \beta_2 U_0}, U_0 \le \dfrac{1}{\beta_1 \beta_2}; \\ +\infty, U_0 > \dfrac{1}{\beta_1 \beta_2}. \end{cases} \tag{20}$$

式(19) 和(20) 表明, 当 $n \to +\infty$, 输入流量 $U_0 \le 1/\beta_1\beta_2$ 时, 输出流量趋于 U_0, 路段行程时间趋于 $\beta_1/(1 - \beta_1\beta_2U_0)$. 当输入流量 $U_0 \ge 1/\beta_1\beta_2$ 时, 输出流量趋于 $1/\beta_1\beta_2$, 路段行程时间趋于 $+\infty$. 可将 $1/\beta_1\beta_2$ 视为路段通行能力, 即当输入流量大于或等于路段通行能力时, 输出流量仍按路段的通行能力流出, 但路段行程时间将变得无法估计, 这与现实中的交通流情形是相吻合的.

4 数值仿真

假设某条路段上的输入流量为(单位: 辆/s)

$$u(t) = \begin{cases} 0, t < 0; \\ 15, t \ge 0. \end{cases}$$

根据经验数据, 取 $\beta_1 = 10$, $\beta_2 = 0.003$, 路段行程时间 $\tau(t)$ 取为模型(4) 的一阶展开式(10), 即 $\tau(t) = \beta_1(1 + \beta_2 x(t))$. 此时, 输入流量 $U_0 \le 1/\beta_1\beta_2$, 输入流量 $u(t)$ 和输出流量 $v(t)$ 关于时间的关系如图 1 所示, 路段行程时间关于时间的关系如图 2 所示, 其中图 2 中虚线为输入流量与输出流量相等时的路段行驶时间. 可知当 $n \to +\infty$ 时, 输出流量趋于 $U_0 = 15$ 辆/s, 路段行程时间趋于 $\dfrac{\beta_1}{1 - \beta_1\beta_2U_0} = 18.2$ s.

对于上述路段, 若取 $\beta_2 = 0.03$, 则 $U_0 > 1/\beta_1\beta_2$. 此时输入流量 $u(t)$ 和输出流量 $v(t)$ 关于时间的关系如图 3 所示, 路段行程时间关于时间的关系如图4所示. 可知当 $n \to +\infty$ 时, 输出流量趋于路段通行能力, 即 $U_0 = 3.33$ 辆/s, 路段行程时间将变得无法估计.

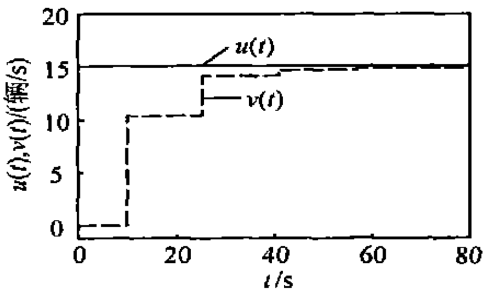

图 1 输入流量 u(t), 输出流量 v(t) 与 t 的关系

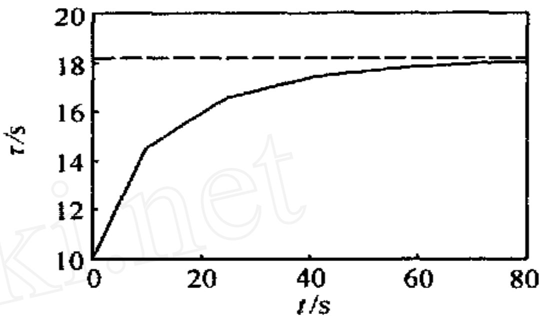

图 2 路段行驶时间与 t 的关系

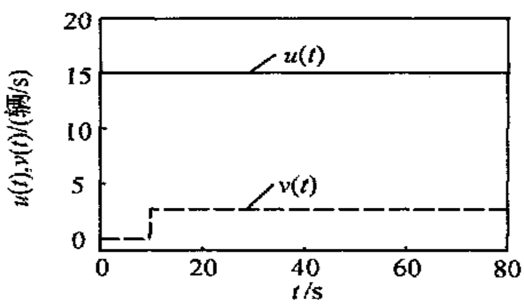

图 3 输入流量 u(t), 输出流量 v(t) 与 t 的关系

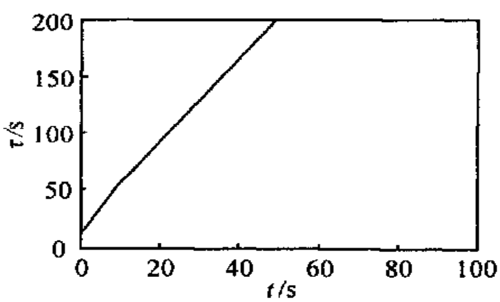

图 4 路段行驶时间与 t 的关系

5 结 语

本文对一类路段输入流量具有时变特性的路程时间进行讨论, 所讨论的路段行程时间与路段流量具有指数函数关系. 针对模型(4), 可将 $1/\beta_1\beta_2$ 视为路段通行能力, 当输入流量小于路段通行能力以

及输入流量大于或等于路段通行能力时, 输出流量的变化规律可由式(19) 表示, 路段行程时间的变化规律由式(20) 表示. 这与现实中的交通流情形是相吻合的.

利用展开式对不可解的超越方程的解进行研究, 是分析具有指数函数形式的路段行程时间的解的方法之一. 对于实际路段中的输入流量远远复杂于本文所讨论的情形, 如何利用展开式的方法得出解析解值得进一步研究.

参考文献(References):

[1] 黄海军. 城市交通网络平衡分析理论与实践[M]. 北京: 人民交通出版社, 1994.

[2] Carey M, McCartney M. Behaviour of a whole-link travel-time model used in dynamic traffic assignment [J]. *Trans on Research - B*, 2002, 36(1): 83-95.

[3] Daganzo C F. Properties of link travel times under dynamic load[J]. *Trans on Research - B*, 1995, 29(2): 95-98.

[4] Friesz T L, Bernstein D, Smith T E, et al. A variational inequality formulation of the dynamic network user equilibrium problem [J]. *Operations Research*, 1993, 41(2): 179-191.

[5] Papageogiou M, Blosseville J M, Hadj-Salem H. Macroscopic modeling of traffic flow on the Boulevard Peripherique in Paris[J]. *Trans on Research - B*, 1989, 23(1): 29-47.

[6] Ran B, Boyce D E, LeBlanc L J. A new class of instantaneous dynamic user-optimal traffic assignment models[J]. *Operations Research*, 1993, 41(1): 192-202.

[7] Ran B, Boyce D E. A link-based variational inequality formulation of ideal dynamic optimal route choice problem [J]. *Trans on Research - C*, 1996, 4(3): 1-12.

[8] Richards P I. Shock waves on the highway [J]. *Operations Research*, 1956, 4(3): 42-51.

[9] Wu J H, Chen Y, Florian M. The continuous dynamic network-loading problem: A mathematical formulation and solution method [A]. *Presented at the 3rd Euro Working Group Meeting on Urban Traffic and Transportation*[C]. Barcelona, 1995. 27-29.

(上接第 1056 页)

参考文献(References):

[1] 吴乃优, 吴小洪, 王晓初, 等. 新一代实时控制网络平台(ControlNet)及其应用[J]. 自动化仪表, 2000, 21(5): 19-21.
(Wu Naiyou, Wu Xiaohong, Wang Xiaochu, et al. The new generation of real-time control network platform (ControlNet) and its application [J]. *Proc Automation Instrumentation*, 2000, 21(5): 19-21.)

[2] 黄皆雨. 计算机通信网[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 2001.

[3] Andrew S, Tanenbaum. 计算机网络[M]. 第 3 版. 熊桂喜, 王小虎, 等译. 北京: 清华大学出版社, 2000.

[4] 周明. 现场总线控制[M]. 北京: 中国电力出版社, 2002.

(上接第 1059 页)

参考文献(References):

[1] Newell G F. The rolling horizon scheme of traffic signal control [J]. *Transportation Research Part A*, 1998, 32(1): 39-44.

[2] Wann-Ming Wey. Model formulation and solution algorithm of traffic signal control in an urban network [J]. *Computers, Environment and Urban Systems*, 2000, 24(4): 355-377.

[3] Hong K Lo. A novel traffic signal control formulation [J]. *Transportation Research Part A*, 1999, 33(6): 433-448.

[4] 杨煜普, 欧海涛. 基于再励学习与遗传算法的交通信号自组织控制[J]. 自动化学报, 2002, 28(4): 564-568.
(Yang Y P, Ou H T. Sef- organized control of traffic signals based on reinforcement learning and genetic algorithm [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28(4): 564-568.)

[5] Hong K Lo. Dynamic network traffic control [J]. *Transportation Research Part A*, 2001, 35(8): 721-744.

[6] 陈国良. 遗传算法及其应用[M]. 北京: 人民邮电出版社, 1996.

[7] Dorigo M, Gambardela L M. The ant system: Optimization by a colony of cooperating agents [J]. *IEEE Trans on System, Man and Cybernetics*, 1996, 26(1): 29-41.

[8] Dorigo M, Bonabeau E, Theraulaz G. Ant algorithms and stigmergy [J]. *Future Generation Computer Systems*, 2000, 16(8): 851-871.

[9] 王炜. 交通工程学[M]. 南京: 东南大学出版社, 2000.

[10] 尹宏宾, 徐建闽. 道路交通控制技术[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 2000.