

文章编号: 1001-0920(2004)09-0973-05

## 模糊双曲模型的混沌反控制

王智良<sup>1</sup>, 张化光<sup>1</sup>, 刘德荣<sup>2</sup>

(1 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004;

2 伊利诺伊大学芝加哥分校 电子与计算机工程系, 芝加哥 IL 60607)

**摘 要:** 针对模糊双曲模型(FHM)的混沌反控制问题, 提出一种新的反控制方法, 即采用非线性反馈与脉冲控制相结合的方法使其混沌化. 从理论上严格地证明了使用该方法产生的混沌满足 Devaney 的定义. 进而, 研究了系统模型未知时的混沌反控制方法, 并通过计算机仿真验证了理论分析的正确性.

**关键词:** 模糊双曲模型; 混沌反控制; 混沌化; 非线性反馈; 脉冲控制

**中图分类号:** TP18 **文献标识码:** A

## Anticontrol of fuzzy hyperbolic model

WANG Zhi-liang<sup>1</sup>, ZHANG Hua-guang<sup>1</sup>, LIU De-rong<sup>2</sup>

(1. School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2 Department of Electrical and Computer Engineering, University of Illinois at Chicago, Chicago IL 60607, USA. Correspondent: WANG Zhi-liang, Email: wang\_zhi\_liang@tom.com)

**Abstract:** To the anticontrol problems of the fuzzy hyperbolic model(FHM), a new method combining nonlinear feedback and impulsive control is proposed. The chaos produced with the method can be proved satisfying Devaney's definition. Furthermore, the problem of chaotification of systems with unknown model is studied. The simulation shows the correction of the theoretical analysis.

**Key words:** fuzzy hyperbolic model; anticontrol; chaotification; nonlinear feedback; impulsive control

### 1 引 言

近年来, 混沌反控制问题已引起越来越多研究者的兴趣. 研究表明, 可用一系列具有一致有界增益的状态反馈控制器使任何离散系统产生 Devaney 或 Li-Yorke 意义下的混沌<sup>[1-3]</sup>. 然而, 尽管已有关于连续时间系统的混沌反控制的研究<sup>[4-7]</sup>, 但一般的连续时间系统的混沌反控制问题, 特别是模型未知的连续时间非混沌系统的混沌反控制问题, 仍然有待解决.

由于很多模糊系统具有万能逼近性<sup>[8]</sup>, 对于那些难以通过机理分析方法建立数学模型的复杂系统, 通过模糊建模方法建立模型是一条可行的出

路<sup>[9,10]</sup>. 如果一个模糊模型能够很好地逼近原系统, 那么在很大程度上可以相信, 将针对该模型设计的控制器直接作用在原始系统上也会取得很好的控制效果.

本文致力于研究一种新的模糊模型——模糊双曲模型(FHM)的混沌反控制问题. 这种模糊模型在建模与控制方面的优点在文献[11]中已有阐述. 本文结合非线性反馈控制与脉冲控制方法<sup>[12,13]</sup>给出一种模糊双曲模型的混沌反控制的有效方法. 通过严格的理论证明, 这种控制方法会产生 Devaney 意义下的混沌. 进而, 通过仿真验证, 如果一个模型未知的系统能由 FHM 很好地描述, 则针对该 FHM

收稿日期: 2003-10-15; 修回日期: 2004-01-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60274017); 国家教委博士点基金资助项目(20011045023).

作者简介: 王智良(1974—), 男, 辽宁沈阳人, 博士, 从事混沌控制的研究; 张化光(1959—), 男, 吉林省吉林市人, 教授, 博士生导师, 从事模糊控制等研究.

设计的混沌反控制器也会使真实系统产生混沌

### 2 预备知识

首先回顾一下Devaney 的混沌定义和 FHM 的基本定义

定义 1<sup>[14]</sup> 集合  $S$  上的映射  $\varphi: S \rightarrow S$  是混沌的, 如果:

1)  $\varphi$  具有初值敏感性, 即对于任意的  $x \in S$  和任意的  $x$  的在  $S$  中的邻域  $N$ , 存在一个  $\delta > 0$  使得对于任意的  $y \in N$  和  $m > 0$ , 有  $\varphi^m(x) - \varphi^m(y) > \delta$  其中  $\varphi^m$  是  $\varphi$  的  $m$  次迭代, 即  $\varphi^m = \varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi$  ( $m$  次).

2)  $\varphi$  是拓扑传递的, 即对任意的子集  $U, V \subset S$ , 存在一个整数  $m > 0$  使得  $\varphi^m(U) \cap V \neq \emptyset$ .

3)  $\varphi$  的周期点在  $S$  中稠密

定义 2 对于给定的具有  $n$  个输入  $x = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$  和一个输出  $\overset{\circ}{x}$  的多输入单输出系统, 我们称一个模糊规则库为“双曲型模糊规则库”, 如果其满足以下条件:

1) 每个模糊规则具有下面的形式:

$$R^l: \text{If } x_1 \text{ is } F_{x_1} \text{ and } x_2 \text{ is } F_{x_2}, \dots, \text{ and } x_n \text{ is } F_{x_n}, \\ \text{then } \overset{\circ}{x} = \pm c_{x_1} \pm \dots \pm c_{x_n}, \quad l = 1, \dots, 2^n,$$

其中  $F_{x_i} (i = 1, \dots, n)$  是  $x_i$  的模糊集, 包括  $P$  (positive) 和  $N$  (negative) 两个语言值,  $c_{x_i} (i = 1, \dots, n)$  是对应于  $F_{x_i}$  的正常数,  $\pm$  表示正负号. then 部分的实际符号确定如下: 如果  $F_{x_i}$  是  $P$ , 那么 then 部分的  $c_{x_i}$  取正号; 否则,  $c_{x_i}$  取负号.

2) then 部分中的常数项  $c_{x_i}$  与 If 部分中的  $F_{x_i}$  是一一对应的, 即如果 If 部分有  $F_{x_i}$ , 则 then 部分必须有  $c_{x_i}$ ; 若 If 部分没有  $F_{x_i}$ , 则 then 部分中也不能有  $c_{x_i}$ .

3) 规则库中共有  $2^n$  条模糊规则, 即 If 部分模糊变量包括所有可能的  $P$  和  $N$  组合, then 部分输出常数包括所有可能的符号组合.

定理 1<sup>[11]</sup> 对于给定的双曲型规则库, 如果  $P_{x_i}$  和  $N_{x_i}$  的隶属函数如下定义:

$$\mu_{P_{x_i}}(x_i) = e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_i - k_{x_i}}{k_{x_i}} \right)^2}, \quad \mu_{N_{x_i}}(x_i) = e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_i + k_{x_i}}{k_{x_i}} \right)^2}, \quad (1)$$

其中  $k_{x_i} > 0$  则可得到模型

$$\overset{\circ}{x} = A \tanh(Kx). \quad (2)$$

其中

$$K = \text{diag}[k_{x_1}, \dots, k_{x_n}], \\ \tanh(x) =$$

$$[\tanh_1(x_1), \tanh_2(x_2), \dots, \tanh_n(x_n)]^T,$$

$A$  为常数矩阵

关于 FHM 的万能逼近性的证明可参看文献 [15], 此处不再赘述

### 3 主要结果

考虑如下系统:

$$\overset{\circ}{x} = Af(x) + Bu, \quad (3)$$

其中:  $x \in R^n, f(x) \triangleq \tanh(Kx) \in R^n$  和  $u = u(x(t)) \in R^{m \times 1}$  是  $n$  维的向量函数,  $A \in R^{n \times n}$  和  $B \in R^{n \times m}$  是常数矩阵

假设 1 ( $A, B$ ) 完全可控

引理 1 对于系统 (3), 如果控制器  $u$  选择如下:

$$u(x(t)) = L \tanh(Kx(t)), \quad (4)$$

其中  $L \in R^{m \times n}$  是常数矩阵, 使得  $(A + BL)$  是 Hurwitz 对角稳定<sup>[16]</sup> 矩阵. 则闭环控制系统 (3) 是全局渐近稳定的

证明 首先注意到  $f(x)$  是一个范数有界的向量函数, 仅在  $x = 0$  时有  $f(x) = 0$ , 且有  $\lim_{x \rightarrow 0} f^T(x)x = +\infty$ . 选择 Lyapunov 函数

$$V(x) = \int_0^x \sum_{i=1}^n f_i(\xi) d\xi, \quad (5)$$

其中  $f_i(\bullet)$  是  $f(x)$  第  $i$  个分量. 则  $V(x)$  是正定的且径向无界的, 即对于所有的  $x \neq 0, V(x) > 0$  并且当  $x \rightarrow 0$  时, 有  $V(x) \rightarrow +\infty$ .  $V(x)$  沿系统 (3) 的时间导数为

$$\dot{V}(x) = f^T(x)(Af(x) + Bu). \quad (6)$$

把式 (4) 代入式 (6), 并且注意到  $(A + BL)$  是 Hurwitz 对角稳定矩阵, 则有

$$\dot{V}(x) = f^T(x)(A + BL)f(x) < 0, \text{ 若 } x \neq 0, \quad (7)$$

所以闭环控制系统 (3) 是全局渐近稳定的

注 1 引理 1 意味着系统 (3) 的状态轨迹位于一个有界的区域  $D \subset R^n$  内

注 2 若令  $\tilde{A} = A + BL$ , 则式 (3) 变为

$$\overset{\circ}{x} = \tilde{A}f(x). \quad (8)$$

由于  $f(x)$  的函数形式存在常数  $\gamma > 0$ , 使得对于所有不同的  $x, y \in D$ , 有

$$f(y) - f(x) \geq \gamma |y - x|, \quad (9)$$

即  $f(x)$  在  $D$  内满足 Lipschitz 条件. 从而由常微分方程理论知, 在控制器 (4) 作用下, 通过给定点  $(t_0, x_0)$ , 式 (3) 有唯一的连续解  $\mathcal{Q}(t, t_0, x_0)$ , 并且该解连续依赖于  $x_0$ <sup>[17]</sup>.



考虑下面的脉冲控制系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{A}f(x), t \in \tau_k, \\ \Delta x &= I_k(x(t)), t = \tau_k, \\ x(t_{0+}) &= x_0, t_0 = 0, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $\tilde{A}$  如注 2 所定义,  $I_k(x(t)) (k = 1, 2, \dots)$  是定义于  $D \subset R^n$  上的脉冲控制,  $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k, \tau_k - \tau_{k-1} = T, \lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_k = +\infty, \Delta x = x(\tau_{k+}) - x(\tau_{k-})$ ,  $x(\tau_{k-})$  和  $x(\tau_{k+})$  分别是  $x(t)$  在  $t = \tau_k$  的左右极限 对于式(10), 有下面的引理:

引理 2 若选择

$$I_k(x(t)) = y_k - x(t-), t = \tau_k, k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

其中:  $y_{k+1} = g(y_k), g: Y \rightarrow Y, Y \subset D$ . 则当  $g(\bullet)$  为 Devaney 意义下的混沌映射时, 式(10) 也会产生 Devaney 意义下的混沌

证明 需要强调, 若系统(10) 产生混沌动态, 其运动轨迹必然位于一有界区域中, 即存在  $M > 0$  使得式(10) 的轨迹  $\mathcal{Q}(t, t_0, x_0)$  对于所有有定义的  $t$  满足  $\mathcal{Q}(t, t_0, x_0) \subset M$ .

事实上, 当  $t \in (\tau_0, \tau_1)$ , 系统(10) 受向量场  $\tilde{A}f(x)$  的作用, 所以由引理 1, 其轨迹  $\mathcal{Q}(t, t_{0+}, x_0)$  是渐近稳定的 当  $t = \tau_1$  时, 向量场  $\tilde{A}f(x)$  停止作用,  $I_1(x(\tau_1))$  开始作用于系统(10). 系统(10) 的轨迹从  $\mathcal{Q}(\tau_1, t_{0+}, x_0)$  跳跃至  $x_0^1$  由于  $I_1(x(\tau_1))$  是具有有限强度的脉冲, 所以  $x_0^1$  也是有限的 当  $t \in (\tau_1, \tau_2)$ ,  $I_1(x(\tau_1))$  停止作用,  $\tilde{A}f(x)$  又重新开始作用于系统(10), 现在初始点变为  $(\tau_{1+}, x_0^1)$ , 系统(11) 的轨迹同样在这个区间中也是渐近稳定的 可将其记为  $\mathcal{Q}(t, \tau_{1+}, x_0^1)$ . 同样, 在时间段  $(\tau_k, \tau_{k+1}) (k = 2, 3, \dots)$  中的分析类似于  $(\tau_1, \tau_2)$ , 在时刻  $\tau_k (k = 2, 3, \dots)$  处的分析类似于  $\tau_1$ . 记每个  $\tau_k$  时刻对应的轨迹点为  $x_0^k (k = 0, 1, \dots)$ , 其中  $x_0^0 = x_0$  易知, 尽管系统轨迹在  $\tau_k (k = 1, 2, \dots)$  处是不连续的, 但整条轨迹位于一个有界的区域中

下面证明系统(10) 的轨迹产生 Devaney 意义下的混沌

本文证明该连续流的 Poincaré 映射是混沌的 假设  $\mathcal{Q}(t, t_{0+}, x_0)$  是系统(8) 的一个解, 初始条件为  $x(t_{0+}) = x_0$ , 则根据注 2,  $\mathcal{P}^1(t, t_{0+}, x_0)$  存在 定义一组 Poincaré 截面

$$S_k = \{(t, x) \mid x \in D, t = \tau_k\}, k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

并定义 Poincaré 映射为

$$P: V \rightarrow V, P = \Psi \circ g \circ \Psi^{-1}, \quad (13)$$

其中  $V = \Psi(Y)$ , 且

$$\Psi(x) = \mathcal{Q}(\tau_k + T, \tau_k, x) = \mathcal{Q}(\tau_0 + T, \tau_0, x). \quad (14)$$

首先证明  $P$  对于初值是极端敏感的, 即存在  $\epsilon > 0$  和  $x_0, \bar{x}_0 \in V$ , 存在一个  $N > 0$ , 使得

$$P^N(x_0) - P^N(\bar{x}_0) > \epsilon \quad (15)$$

由于

$$P^N = \underbrace{\Psi \circ g \circ \Psi^{-1} \circ \dots \circ \Psi \circ g \circ \Psi^{-1}}_{N \text{ times}} = \Psi \circ g^N \circ \Psi^{-1}, \quad (16)$$

所以式(15) 成立等价于下式成立:

$$\Psi(g^N(y_0)) - \Psi(g^N(\bar{y}_0)) > \epsilon \quad (17)$$

其中:  $y_0 = \Psi^{-1}(x_0), \bar{y}_0 = \Psi^{-1}(\bar{x}_0)$ .

若式(17) 不成立, 则对所有的  $n \geq 0$ , 存在一个  $\epsilon_0 > 0$ , 使得

$$\Psi(g^n(y_0)) - \Psi(g^n(\bar{y}_0)) < \epsilon_0 \quad (18)$$

由于  $\Psi(x)$  连续, 对于这个  $\epsilon_0$ , 存在一个  $\delta_0$  使得

$$g^n(y_0) - g^n(\bar{y}_0) < \delta_0, \forall n \geq 0 \quad (19)$$

这与  $g$  是 Devaney 意义下的混沌映射矛盾 故  $P$  满足 Devaney 混沌定义的第 1 条

下面, 证明  $P$  是拓扑传递的, 即对任意子集  $E, F \subset V$ , 存在一个整数  $N > 0$ , 使得

$$P^N(E) \cap F \neq \emptyset. \quad (20)$$

已知对于任意两个子集  $\Psi^{-1}(E), \Psi^{-1}(F) \subset Y$ , 存在整数  $N > 0$ , 使得

$$g^N[\Psi^{-1}(E)] \cap \Psi^{-1}(F) \neq \emptyset. \quad (21)$$

对式(22) 的两边作用  $\Psi$ , 有

$$\Psi\{g^N[\Psi^{-1}(E)]\} \cap F \neq \emptyset. \quad (22)$$

注意到式(16), 则有式(20) 成立

最后, 证明  $P$  的周期点在  $V$  中稠密 记映射  $f$  的周期点集为  $\text{Per}(f)$ . 由于  $\text{Per}(g) = Y$  并且  $\Psi$  是一对一的, 所以  $\text{Per}(P) = V$ .

总结以上结论, 有下面的定理:

定理 2 考虑下面的系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Af(x) + Bu, t \in \tau_k; \\ \Delta x &= I_k(x(t)), t = \tau_k; \\ x(t_{0+}) &= x_0, t_0 = 0, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (23)$$

如果控制  $u$  按照式(4) 设计,  $I_k(x(k))$  根据式(11) 选择, 则系统(23) 将表现出 Devaney 意义下的混沌

注 3 若选择脉冲控制为  $I_k(x(t)) = h \circ g(y_k) - x$ , 其中  $h: Y \rightarrow Y$  为同胚, 则定理 2 的结论也成立 一种特殊情形为  $h$  是常数矩阵  $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ , 其中  $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, n$ , 这说明可用很小的能量使

原始系统混沌化

注4 若所考虑的系统模型未知,则如果能对其建立模糊双曲模型,只要建模的精度满足一定的要求,就有理由相信,使该模糊双曲模型混沌化的控制器也会使真实系统产生混沌

4 仿真研究

考虑下面的分段线性系统

x-dot = { Ax, x < 1; A sign(x), x >= 1 (24)

假设(25)的模型是未知的,用下面的模糊规则建立该系统的模糊双曲模型,即

- If x1 is P\_x1 and x2 is P\_x2, then x3-dot = C\_x1 + C\_x2;
If x1 is N\_x1 and x2 is P\_x2, then x3-dot = - C\_x1 + C\_x2;
If x1 is P\_x1 and x2 is N\_x2, then x3-dot = C\_x1 - C\_x2;
If x1 is N\_x1 and x2 is N\_x2, then x3-dot = - C\_x1 - C\_x2;
If x1 is P\_x1 and x3 is P\_x3, then x2-dot = C\_x1 + C\_x3;
If x1 is N\_x1 and x3 is P\_x3, then x2-dot = - C\_x1 + C\_x3;
If x1 is P\_x1 and x3 is N\_x3, then x2-dot = C\_x1 - C\_x3;
If x1 is N\_x1 and x3 is N\_x3, then x2-dot = - C\_x1 - C\_x3;
If x2 is P\_x2 and x3 is P\_x3, then x1-dot = C\_x2 + C\_x3;
If x2 is N\_x2 and x3 is P\_x3, then x1-dot = - C\_x2 + C\_x3;
If x2 is P\_x2 and x3 is N\_x3, then x1-dot = C\_x2 - C\_x3;
If x2 is N\_x2 and x3 is N\_x3, then x1-dot = - C\_x2 - C\_x3

这里,假设选择隶属度函数 P\_xi 和 N\_xi 如下:

mu\_P\_xi(x) = e^(-1/2(x\_i - k\_i)^2), mu\_N\_xi(x) = e^(-1/2(x\_i + k\_i)^2) (25)

则可得到(24)的近似模型为

x-dot = A f(x) = A tanh(Kx) (26)

其中

x = [x1 x2 x3]^T, A = [0 C\_x2 C\_x3; C\_x1 0 C\_x3; C\_x1 C\_x2 0] = [0 1 3; 2 0 3; 2 1 0]

K = diag[k1 k2 k3] = diag[1 1 1]

系统(26)是不稳定的,根据定理2,受控系统为

x-dot = (A + BL)f(x), t in [tau\_k, tau\_k + 1); Delta x = I\_k(x(t)), t = tau\_k, k = 1, 2, ...; x(t\_0+) = x\_0 (27)

选择 B = [1 1 1]^T, L = [-2 -1 -2], 初值取为 x\_0 = [5 2 -1]^T, 脉冲控制选为

I\_k(x) = Lambda g(y\_k) - x (28)

其中: g(y\_k) = [g1(y\_k^1) g2(y\_k^2) g3(y\_k^3)]^T, gi(.) 选为 Logistic 映射

y\_{k+1}^i = gi(y\_k^i) = ay\_k^i(1 - y\_k^i), i = 1, 2, 3 (29)

Lambda = diag[0.8 0.2 1], a = 4.0 时, Logistic 映射处于混沌状态,如图1所示

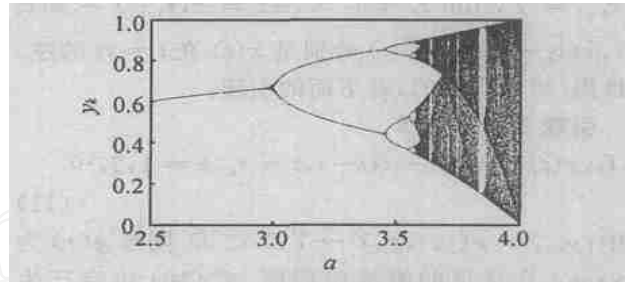


图1 Logistic 映射分岔图

无脉冲控制时,系统

x-dot = (A + BL)f(x) (30)

是全局渐近稳定的.加上脉冲控制,令 T = 0.01,由图2和图3可知,受控系统(27)展现出混沌状态.将上述控制方法作用在系统(24)上,仿真结果如图4和图5所示.可见,系统(24)产生了与(27)相似的混沌运动,这验证了注4.

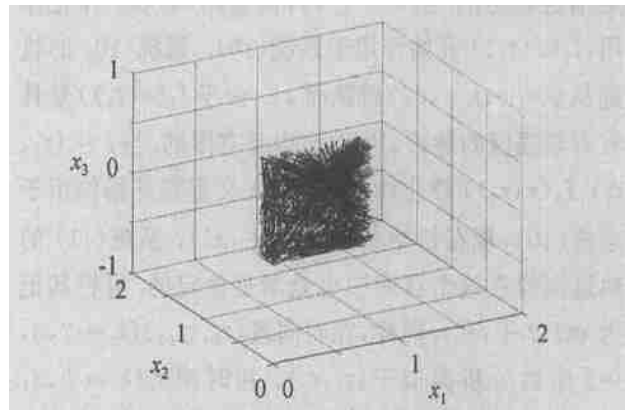


图2 系统(27)的状态曲线

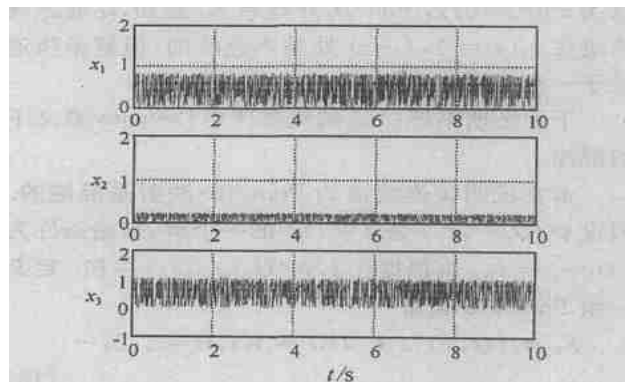


图3 系统(27)的相图

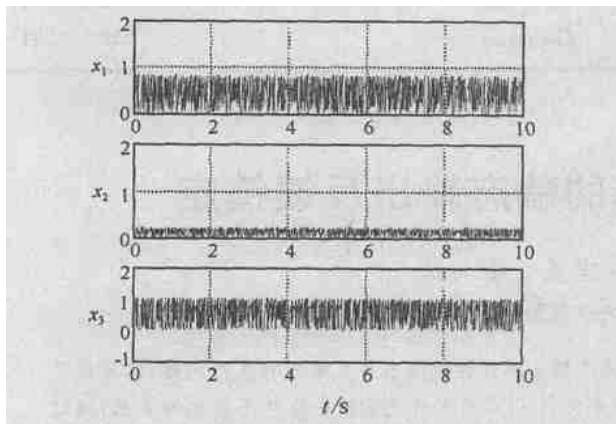


图4 系统(24)在非线性反馈和脉冲控制下的状态曲线

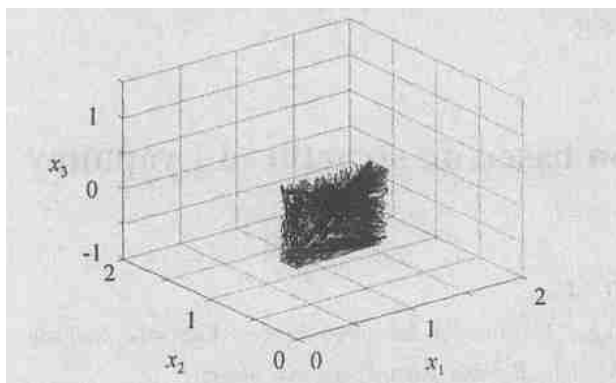


图5 系统(24)在非线性反馈和脉冲控制下的相图

## 5 结 语

本文讨论了联合利用非线性反馈控制和脉冲控制使模糊双曲模型(FHM)及一类模型未知系统混沌化的方法。文中给出了精确的理论证明。计算机仿真验证了所提方法的有效性。本文提出的方法不仅适用于FHM,也适用于任何状态有界的连续时间非混沌系统的反控制。

## 参考文献(References):

- [1] Chen G, Lai D. Feedback anticontrol of discrete chaos [J]. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 1998, 8(7): 1585-1590
- [2] Wang X F, Chen G. On feedback anticontrol of discrete chaos[J]. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 1999, 9(7): 1435-1441.
- [3] Wang X F, Chen G. Chaotification via arbitrarily small feedback controls: Theory, method, and applications [J]. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 2000, 10(3): 549-

570

- [4] Wang X F, Chen G, Yu X. Anticontrol of chaos in continuous-time systems via time-delay feedback[J]. *Chaos*, 2000, 10(4): 1-9
- [5] Sanchez E N, Perez J P, Chen G. Using dynamic neural networks to generate chaos: An inverse optimal control approach [J]. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 2001, 11(3): 857-863
- [6] Zhong G Q, Man K F, Chen G. Generating chaos via a dynamical controller [J]. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 2001, 11(3): 865-869
- [7] Yang L, Liu Z, Chen G. Chaotifying a continuous-time system via impulsive input[J]. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(5): 1121-1128
- [8] Passino K M, Yurkovich S. *Fuzzy Control* [M]. Reading: Addison Wesley, 1998
- [9] Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. A unified approach to controlling chaos via an LM F-based fuzzy control system design [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems-I: Fundamental and Applications*, 1998, 45 (10): 1021-1040
- [10] Chen L, Chen G. Fuzzy predictive control of uncertain chaotic systems using time series [J]. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 1999, 9(4): 757-767.
- [11] Zhang H, Quan Y. Modeling, identification and control of a class of nonlinear system [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2001, 9(2): 349-354
- [12] Yang T, Chua L O. Impulsive control and synchronization of nonlinear dynamical systems and application to secure communication [J]. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 1997, 7(3): 645-664
- [13] 阮炯, 顾凡杰, 蔡志杰. 神经动力学模型方法和应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2002
- [14] Devaney R L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* [M]. New York: Addison-Wesley, 1987.
- [15] 全永兵. 非线性系统的模糊建模与控制方法研究[D]. 沈阳: 东北大学, 2001.
- [16] Kaszkurwicz E, Bhaya A. *Matrix Diagonal Stability in Systems and Computation* [M]. Boston: Birkhauser, 2000
- [17] Hirsch M W, Smale S. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra* [M]. New York: Academic Press, 1974