

文章编号: 1001-0920(2004)09-0978-05

基于结构 Lyapunov 矩阵的静态输出反馈镇定

项 基, 张晓宇, 苏宏业, 褚 健

(浙江大学 工业控制技术国家重点实验室, 先进控制研究所, 浙江 杭州 310027)

摘 要: 线性时不变系统的静态输出反馈控制可行性等价于两个耦合的线性矩阵不等式解的存在性问题, 这导致了一个非线性最优化问题, 是无法直接求解的。针对线性时不变系统(LTI), 深入研究这两个矩阵不等式的关系, 通过构造一个结构 Lyapunov 矩阵, 给出了一个问题有解的充分条件, 并在此基础上提出一个静态输出反馈镇定算法。利用线性矩阵不等式(LMI)方法, 可直接求解出相应的输出反馈增益。数值实例证明了该方法的有效性。

关键词: 静态输出反馈; 结构 Lyapunov 矩阵; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Static output feedback stabilization based on structured Lyapunov matrix

X I A N G J i, Z H A N G X i a o-yu, S U H o n g-y e, C H U J i a n

(National Key Laboratory of Industrial Control Technology, Institute of Advanced Process Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China. Correspondent: X I A N G J i, Email: jxiang@ipc.zju.edu.cn)

Abstract: The existence of a static output feedback for linear time-invariant systems is equivalent to the solvability of two coupled linear matrix inequalities (LMI), which is a non-linear optimization problem and can not be solved directly. For linear time-invariant (LTI) systems, the relation of the two inequalities is studied in detail and a structured Lyapunov matrix is proposed to derive a sufficient condition of the solvability for the stabilization problem. The corresponding algorithm is addressed, which is simple and solvable by LMI method. The simplicity and effectiveness of the proposed approach are demonstrated by some numerical examples.

Key words: static output feedback; structured Lyapunov matrix; linear matrix inequality

1 引 言

在实际控制系统中, 由于状态变量的不可获得或测量代价的昂贵, 相比状态反馈, 静态输出反馈具有更广泛的应用背景。但是, 困扰静态输出反馈的一个关键问题是稳定性的判断。为了解决这个问题, 国内外众多学者们进行了大量的研究, 并给出了一些解决方法。Benton 和 Gerome1 等^[1~5]证明了一个输出反馈镇定存在的充分必要条件, 该条件由两个相

耦合的矩阵不等式组成, 其中一个的解是另一个解的逆矩阵, 并给出了两个相应的代数解法。在文献[2]中, Gerome1 等提出了一个 min/max 的迭代算法, 并在文献[3~5]中加以完善和扩展。Benton 等在文献[1]中详述了一个同时可稳可测(SSD)的概念, 并基于这个概念给出了一个非迭代方法。该方法的可行性受初始状态反馈增益的影响, 而如何确定合适的初始状态反馈非常困难。Cao 等^[6]提出另一

收稿日期: 2003-10-02; 修回日期: 2003-12-15

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(NO YSFC 60025308); 高等学校优秀青年教师教学和科研奖励基金资助项目

作者简介: 项基(1974—), 男, 浙江温州人, 博士生, 从事变结构控制的研究; 褚健(1963—), 男, 浙江淳安人, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制等研究

个不同的充分必要条件, 该条件是一个二次矩阵不等式, 同样无法直接求解 Cao 等给出了一个迭代算法, 该算法需要一个标准的 Riccati 代数方程的解作为初始矩阵, 算法的全局收敛性与此矩阵的选择相关 以上解法中, 都仅仅是保证了充分性, 即解法不成功并不能说明该系统无法通过输出反馈镇定 因此寻找保守性更弱的充分解法或者更进一步的充要性解法仍然是控制理论界研究的热门课题

Prem Pain 等^[7]针对一类满足一定条件的最小相位系统提出一个基于结构 Lyapunov 矩阵的静态输出反馈设计方法 该方法将相耦合的矩阵对化简为直接的线性矩阵不等式, 从而直接求解输出反馈增益

本文基于这种结构 Lyapunov 矩阵的方法, 通过深入研究两个相互耦合的矩阵不等式的关系, 针对更普遍的线性时不变系统, 给出了一个结构 Lyapunov 矩阵存在的充分条件, 并在此基础上提出一个非迭代算法, 以有效地求解静态输出反馈增益 最后, 数值例子表明了该解法的有效性和普遍性

2 问题描述

考虑如下线性时不变系统:

$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx \quad (2.1)$$

其中: $x \in R^n$ 为状态向量; $u \in R^m$ 为控制向量; $y \in R^r$ 为输出向量; A, B, C 为适当维数的常数矩阵 矩阵对 (A, B) 和 (A, C) 分别是可镇定和可测的, 并引入如下假设:

(A1): $m = r$ and $\text{rank}(CB) = m$.

静态输出反馈问题就是寻找一个矩阵 $F \in R^{m \times r}$, 构成反馈 $u = -Fy$, 使得闭环系统稳定 也就是存在一个对称正定矩阵 $P \in R^{n \times n}$, 使得下式成立:

$$(A + BFC)^T P + P(A + BFC) < 0 \quad (2.2)$$

注意到这是一个二次线性不等式, 无法采用线性矩阵不等式的方法直接求解 Benton 等在文献 [1] 中证明了不等式 (2.2) 有解的一个充分必要条件:

引理 1^[1] 线性系统 (2.1) 是静态输出反馈可镇定的, 当且仅当存在对称正定矩阵 P 和正实数 σ_1 和 σ_2 , 使得下面的不等式对同时成立:

$$A^T P + PA - \sigma_1 P B B^T P < 0; \quad (2.3)$$

$$A^T P + PA - \sigma_2 C^T C < 0 \quad (2.4)$$

对式 (3) 两端同乘以 P^{-1} , 可得

$$P^{-1} A^T + A P^{-1} - \sigma_1 B B^T < 0 \quad (2.5)$$

不等式 (2.4) 和 (2.5) 均是线性矩阵不等式, 若同时成立必须满足: 一个的解是另一个解的逆 这样

耦合的矩阵不等式对无法直接利用 LMI 技术加以求解 注意到不等式 (2.3) 和 (2.5) 的等价性, 因此不等式 (2.3) 和 (2.4) 具有相同的耦合特性 本文研究的问题就是寻求一个直接求解不等式对 $\{(2.3) (2.4)\}$ 的办法, 从而得到矩阵不等式 (2.2) 的 Lyapunov 矩阵解 P . 下面给出的引理将在后面的证明过程中用到

引理 2^[8] (Schur 补引理) 设 $R_1^T = R_1, R_2^T = R_2$,

则 $\begin{bmatrix} R_1 & S \\ S^T & R_2 \end{bmatrix} > 0$ 成立, 当且仅当 $R_2 > 0, R_1 - SR_2^{-1}S^T > 0$, 或 $R_1 > 0, R_2 - S^T R_1^{-1}S > 0$

引理 3 对任意矩阵 $D, E \in R^{p \times n}$ 和对称正定矩阵 $X \in R^{n \times n}$, 有下式成立:

$$DE^T + D^T E - DXD^T + E^T X^{-1} E \quad (2.6)$$

证明 对一可逆对称矩阵 $R \in R^{n \times n}$, 有

$$(DR - ER^{-1})(DR - ER^{-1})^T \geq 0, \quad (2.7)$$

展开后得

$$DE^T + D^T E - DR^2 D^T + E^T R^{-2} E \quad (2.8)$$

令 $X = R^2$, 即得式 (2.6), 注意到 R 是对称的, 则 X 为对称正定阵

引入一个规范形作为后续研究分析的基础

引理 4 对于满足 (A1) 的线性时不变系统 (2.1), 必然存在一个线性变换, 使得系统在新的坐标系下有如下结构:

输入矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

输出矩阵

$$C = [C_1 \ C_2], \quad (2.10)$$

其中 $C_2 \in R^{r \times m}$ 是列满秩的

证明 定义 $\tilde{B} \in R^{n \times (n-m)}$ 为 B 的正交补矩阵,

显然有 $\tilde{B}^T B = 0$ 定义变换阵 $\Gamma: \Gamma = \begin{bmatrix} \tilde{B}^T \\ (B^T B)^{-1} B^T \end{bmatrix}$, 对系统进行坐标变换, 即得式 (2.9) 和 (2.10).

注意到 $\text{rank}(CB) = m$ 和 $CB = C_2$, 则 C_2 必是列满秩

相应地, 将系统矩阵也分块表示为

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

其中 $A_{11} \in R^{(n-m) \times (n-m)}$. 式 (2.9) ~ (2.11) 被定义为系统规范型 不失一般性, 在接下来的段落中, 总认为所研究的系统具有这样的规范型

3 结构 Lyapunov 矩阵

任何一个对称正定矩阵总可表示为如下结构

形式:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 + N^T P_2 N & N^T P_2 \\ P_2 N & P_2 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

其中: $P_1 \in R^{(n-m) \times (n-m)}, P_2 \in R^{m \times m}, N \in R^{m \times (n-m)}$.

定义

$$T = \begin{bmatrix} I_{n-m} & \mathbf{0} \\ N & I_m \end{bmatrix}, \hat{P} = \begin{bmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

则有

$$P = T^T \hat{P} T, \quad (3.3)$$

显然 $P > 0$ 当且仅当 $\hat{P} > 0$

由式(3.1) ~ (3.3), 不等式对{(2.3), (2.4)}

可重写为

$$\hat{P} \hat{A} + \hat{A}^T \hat{P} - \sigma_1 \hat{P} B B^T \hat{P} < 0, \quad (3.4)$$

$$\hat{P} \hat{A} + \hat{A}^T \hat{P} - \sigma_2 \hat{C}^T \hat{C} < 0 \quad (3.5)$$

其中

$$\hat{A}^T = T A T^{-1} = T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} T^{-1},$$

$$\hat{B} = T B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I_m \end{bmatrix},$$

$$\hat{C} = C T^{-1} = [C_1 - C_2 N \quad C_2] \quad (3.6)$$

4 主要结果

本节直接给出如下定理:

定理 1 对于满足(A1)的线性时不变系统

(2.1), 当正实数 $\mu > 0$ 时, 若存在对称正定矩阵 $Q_1 \in R^{(n-m) \times (n-m)}, W \in R^{r \times r}$ 和矩阵 $Y \in R^{m \times (n-m)}$ 满足 $Q_1 > 0$,

$$\begin{bmatrix} A_{11} Q_1 - A_{12} Y + (C_1 Q_1 - C_2 Y)^T & \\ (A_{11} Q_1 - A_{12} Y)^T & \\ C_1 Q_1 - C_2 Y & -W \end{bmatrix} < 0, \quad (4.2)$$

$$0 < W < \mu I, \quad (4.3)$$

则一定有如式(3.2)结构形式的矩阵 T 和 \hat{P} 存在, 并使得不等式对{(3.4), (3.5)}成立, 其中 $N = Y Q_1^{-1}$.

证明 与结构 Lyapunov 矩阵(3.1)相对应, 将矩阵 $\hat{P} \hat{A} + \hat{A}^T \hat{P}$ 分块为

$$\hat{P} \hat{A} + \hat{A}^T \hat{P} = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ \Omega_2^T & \Omega_2 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

其中

$$\Omega_1 = P_1(A_{11} - A_{12}N) + (A_{11} - A_{12}N)^T P_1, \quad (4.5)$$

$$\Omega_2 = P_1 A_{12} + (N A_{11} + A_{21} - N A_{12} N - A_{22} N)^T P_2, \quad (4.6)$$

$$\Omega_2 = P_2(A_{22} + N A_{21}) + (A_{22} + N A_{21})^T P_2 \quad (4.7)$$

展开不等式(3.4), 有

$$\hat{P} \hat{A} + \hat{A}^T \hat{P} - \sigma_1 \hat{P} B B^T \hat{P} =$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ \Omega_2^T & \Omega_2 - \sigma_1 P_2^2 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

由引理 2, 不等式(3.4)成立, 当且仅当下两式成立:

$$\Omega_2 - \sigma_1 P_2^2 < 0, \quad (4.9)$$

$$\Omega_1 - \Omega_2(\Omega_2 - \sigma_1 P_2^2)^{-1} \Omega_2^T < 0 \quad (4.10)$$

由式(4.2), 可得

$$(A_{11} Q_1 - A_{12} Y) + (A_{11} Q_1 - A_{12} Y)^T < 0, \quad (4.11)$$

不等式(4.11)两边同乘以 Q_1^{-1} , 得

$$Q_1^{-1}(A_{11} - A_{12}N) + (A_{11} - A_{12}N)^T Q_1^{-1} < 0 \quad (4.12)$$

令 $P_1 = Q_1^{-1}$, 即得 $\Omega_1 < 0$ 又 $P_2 > 0$, 故必存在一正实数 τ_1 , 对任一对称正定矩阵 P_2 使得 $\Omega_2 - \tau_1 P_2^2 < 0$ 定义 $\tau = \sigma_1 - \tau_1$, 则有 $\Omega_2 - \sigma_1 P_2^2 < -\tau P_2^2$.

即有

$$\Omega_1 - \Omega_2(\Omega_2 - \sigma_1 P_2^2)^{-1} \Omega_2^T < \Omega_1 + \tau^{-1} \Omega_2 P_2^{-2} \Omega_2^T \quad (4.13)$$

由于 $\Omega_1 < 0$, 故当 τ 足够大时, 上式右边负定必然成立, 因此不等式(3.4)成立

定义 $C_3 = C_1 - C_2 N$, 展开不等式(3.5)为

$$M = \hat{P} \hat{A} + \hat{A}^T \hat{P} - \sigma_2 \hat{C}^T \hat{C} = \begin{bmatrix} \Omega_1 - \sigma_2 C_3^T C_3 & \Omega_2 \\ \Omega_2^T & \Omega_2 - \sigma_2 C_2^T C_2 \end{bmatrix} - \sigma_2 \left\{ \begin{bmatrix} C_3^T \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad C_2] + \begin{bmatrix} 0 \\ C_2^T \end{bmatrix} [C_3 \quad 0] \right\}. \quad (4.14)$$

由引理 3, 有

$$\begin{bmatrix} C_3^T \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad C_2] + \begin{bmatrix} 0 \\ C_2^T \end{bmatrix} [C_3 \quad 0] + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} C^T X C_3 [I \quad 0] + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} C_2^T X^{-1} C_2 [0 \quad I], \quad (4.15)$$

其中 X 为任意对称正定矩阵 式(4.14)便可化简为

$$M = \begin{bmatrix} \Omega_1 + \sigma_2 C_3^T (X - I) C_3 & \Omega_2 \\ \Omega_2^T & \Omega_2 - \sigma_2 C_2^T (I - X^{-1}) C_2 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

由式(4.2)和引理 2 可得

$$A_{11} Q_1 - A_{12} Y + (A_{11} Q_1 - A_{12} Y)^T + Q_1 C_3^T W^{-1} C_3 Q_1 < 0 \quad (4.17)$$

令 $\sigma_2(X - I) = W^{-1}$, 且不等式(4.17)两端同乘以 $P_1 = Q_1^{-1}$, 则

$$\Omega_1 + \sigma_2 C_3^T (X - I) C_3 < 0 \quad (4.18)$$

注意到不等式(4.3), 可有

$$\sigma_2(I - X^{-1}) = X^{-1/2} W^{-1} X^{-1/2} > \mu^{-1} X^{-1}, \quad (4.19)$$

即有

$$\begin{aligned} \Omega_2 - \sigma_2 C_2^T (I - X^{-1}) C_2 < \\ \Omega_2 - \mu^{-1} C_2^T X^{-1} C_2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

由规范型描述(引理 4), 可知 C_2^T 是行满秩的, 故矩阵对 $\{(A_{22} - NA_{21}), C_2^T\}$ 可控, 即必存在对称正定矩阵 P_2 和任意正实数 ϵ 使得 $\Omega_2 - \epsilon C_2^T X^{-1} C_2 < 0$ 令 $\mu_0^{-1} = \epsilon - \mu^{-1}$, 不妨取 ϵ 足够小, 显然 $\mu_0 < 0$ 则可以放大不等式(4.20)为

$$\begin{aligned} \Omega_2 - \sigma_2 C_2^T (I - X^{-1}) C_2 < \\ \Omega_2 - \mu^{-1} C_2^T X^{-1} C_2 < \\ \mu_0^{-1} C_2^T X^{-1} C_2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

故不等式(4.16)的右端满足

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 + \sigma_2 C_3^T (X - I) C_3 & \Omega_2 \\ \Omega_2 & \Omega_2 - \sigma_2 C_2^T (I - X^{-1}) C_2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \Omega_1 + \sigma_2 C_3^T (X - I) C_3 & \Omega_2 \\ \Omega_2 & \mu_0^{-1} C_2^T X^{-1} C_2 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

考虑不等式(4.18), $\Omega_1 + \sigma_2 C_3^T (X - I) C_3 < 0$, 故当 $\mu > 0, \mu_0 < 0$, 必有

$$\begin{aligned} \Omega_1 + \sigma_2 C_3^T (X - I) C_3 - \\ \mu_0 \Omega_2 (C_2^T X^{-1} C_2)^{-1} \Omega_2 < 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

由引理 2 和不等式(4.16), (4.22), 知 $M < 0$, 即不等式(16)成立

注 1 对线性时不变系统 $\{A, B, C\}$, 定理 1 将寻找耦合矩阵对 $\{(1.3), (1.4)\}$ 的解转换为寻找一个满足式(4.1) ~ (4.3) 的矩阵 N . 如果存在这样的 N , 那么必有一个坐标变换阵 T , 使得在新坐标系下系统存在一个对角结构的 Lyapunov 矩阵 \hat{P} 为耦合矩阵对 $\{(1.3), (1.4)\}$ 的解

注 2 在(A1)中假设了 $m = r$, 即输入维数不大于输出的维数. 注意到不等式对 $\{(1.4), (1.5)\}$ 的对称性, 这个假设是不失一般性的. 如果 $m > r$, 可以求解原系统的对偶系统, 即求系统 $\{A^T, C^T, B^T\}$ 满足式(1.2)的 Lyapunov 矩阵 P , 这时仍满足假设(A1)中的输入维数不大于输出维数

注 3 对一些线性时不变系统, 如果存在满足不等式组(4.1) ~ (4.3) 的 N , 使得 $C_3 = 0$, 显然定理 1 中的 μ 可以无限接近 0, 因此定理 1 是有解的. 但在许多实际系统中这个条件往往是达不到的, 这时 μ 不仅不趋向零而且可能很大, 定理 1 将不成立, 但定理 1 给我们提供了一个寻找 N 的思路. 从定理 1 的证明可以看出, μ 越小, 此时对应的 N 使得不等式对(3.4), (3.5) 有解的可能性越大

综上所述, 给出下面的算法, 即静态输出反馈镇定控制器求解算法:

Step 1: 根据引理 4, 将线性时不变系统(2.1)转换为规范型

Step 2: 求解线性不等式(4.1) ~ (4.3), 得到 μ 取得最小的解矩阵 N .

Step 3: 由式(3.2)得到坐标变换阵 T , 由式(3.6)得新坐标系下的系统矩阵 $\{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\}$.

Step 4: 求解如下线性矩阵不等式:

$$\begin{cases} \hat{\Omega}_1 < 0, \\ \hat{P}\hat{A} + \hat{A}^T\hat{P} - \hat{\sigma}\hat{C}^T\hat{C} < 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

其中: \hat{P} 为对角对称正定阵, 具有式(3.2)的结构, $\hat{\Omega}_1$ 见式(4.5).

Step 5: 固定 $\hat{P} = \hat{P}$, 对新坐标系下的系统求解线性矩阵不等式(1.2), 即

$$(\hat{A} + \hat{B}\hat{F}\hat{C}^T)\hat{P} + \hat{P}(\hat{A} + \hat{B}\hat{F}\hat{C}^T) < 0 \quad (4.25)$$

注意到坐标变换并不改变输出反馈阵, 所以矩阵不等式(4.25)的解 \hat{F}^* 即为原系统的解. 如果矩阵不等式(4.25)无可行解, 则该系统不能用此方法来使得系统静态输出反馈镇定

注 4 若对 $m > r$ 的线性时不变系统, 如注 2 所述求解其对偶系统, 最后将解 \hat{F}^* 转置, 即是原系统的镇定控制器增益阵. 与以往大多算法不同的是, 该方法是一种非迭代算法, 在 Step 2, Step 4 和 Step 5 中所需求解的矩阵不等式均为线性矩阵不等式, 利用 Matlab 的 LM Ftools^[9] 可以很方便地求解

5 数值仿真

下面给出几个例子来检验本文方法的可行性

例 1 存在 N 使得 $C_3 = 0$

考虑一个具有如下参数矩阵的线性时不变系统:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 803 & 0 & 0 & 863 & 2 & 0 & 589 & 9 & 0 & 094 & 0 \\ 0 & 401 & 7 & 0 & 170 & 0 & 0 & 503 & 5 & 0 & 974 & 2 \\ 0 & 707 & 6 & 0 & 942 & 8 & 0 & 769 & 7 & 0 & 642 & 7 \\ 0 & 934 & 1 & 0 & 852 & 3 & 0 & 689 & 1 & 0 & 038 & 7 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 371 & 3 & 0 & 934 & 2 \\ 0 & 319 & 8 & 0 & 899 & 2 \\ 0 & 494 & 8 & 0 & 044 & 4 \\ 0 & 795 & 6 & 0 & 221 & 9 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 879 & 6 & 0 & 203 & 9 & 0 & 592 & 4 & 0 & 689 & 6 \\ 0 & 128 & 6 & 0 & 422 & 9 & 0 & 578 & 4 & 0 & 536 & 6 \end{bmatrix}.$$

按本文算法, 解得

$$C_3 = 10^{-18} \times \begin{bmatrix} 0 & 098 & 7 & 0 & 308 & 7 \\ 0 & 156 & 3 & 0 & 473 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mu_{\min} = 4.85 \times 10^{-12},$$

$$F^* = \begin{bmatrix} -24.6285 & -21.3325 \\ -7.9724 & 29.3704 \end{bmatrix}.$$

最终闭环系统的极点为 -31.3722, -0.2213 和 -3.3012 ± 1.8181i 注意到系统的不变零点为 -0.2244 和 -1.9357, 是稳定的, 符合文献[7]中所提的特殊系统, 亦可用[7]中选择特定N 的办法得到系统的镇定解

例 2 不满足 Davison-Kimura 定理^[10,11] 的线性时不变系统

考虑一个具有如下参数矩阵的线性时不变系统:

$$A = \begin{bmatrix} 1.0153 & -0.8442 & -0.2555 & -0.0930 \\ 0.1591 & 0.0865 & -0.0790 & -0.0102 \\ 0.6707 & -0.8587 & 0.1829 & -0.2044 \\ 1.0469 & -0.6095 & -0.5697 & 0.1019 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.1333 & 0.5660 \\ 0.4641 & 0.2553 \\ 0.0713 & 0.2385 \\ 0.5812 & 0.0160 \end{bmatrix},$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 0.3847 & 0.7573 \\ 0.5752 & 0.4081 \\ 0.1957 & 0.5122 \\ 0.7133 & 0.8674 \end{bmatrix}.$$

该线性时不变系统是不满足 Davison-Kimura 定理^[10,11] 的, 即开环系统的不稳定极点数 p 不满足 $m + r - 1 > p$, 且该系统的不变零点 $0.1067 \pm 0.1967i$ 不稳定, 为非最小相位系统, 故这个系统无法用文献[7]中的方法加以镇定 而按本文的算法, 可解得其镇定解为

$$F^* = \begin{bmatrix} -3.1136 & -16.0396 \\ 6.1908 & -5.9425 \end{bmatrix},$$

闭环极点为 -10.3064, -0.0513 和 -0.5205 ± 0.5994i

例 3 可行性分析

此例研究 $n = 4$ 的线性时不变系统, 输入/输出维数从满足 Davison-Kimura 定理到不满足 Davison-Kimura 定理进行变化, 针对每一情况, 随机产生 1 000 个线性时不变系统进行测试

由于对称性, 这里略去了 (m, r) 为 $(2, 3)$ $(1, 3)$, ... 等的情况, 具体可见注 2 和注 4 从表 1 和表 2 可以看出, 当 $m + r > n$ 时, 即使所有的开环极点均不稳定, 本文方法仍十分有效 由表 1 所示, 当 $m + r > n$ 时, 因此时系统不满足 Davison-Kimura 定理, 极

表 1 对开环极点均不稳定的线性时不变系统, 在所有可能输入/输出维数下算法的可行性

(m, r)	(3, 3)	(3, 2)	(3, 1)	(2, 2)	(2, 1)	(1, 1)
失败数	0	7	911	847	990	0
成功率	1.000	0.993	0.089	0.153	0.01	0.000

表 2 对任意的线性时不变系统, 在所有可能输入/输出维数下算法的可行性

(m, r)	(3, 3)	(3, 2)	(3, 1)	(2, 2)	(2, 1)	(1, 1)
失败数	0	0	367	355	688	869
成功率	1.000	1.000	0.633	0.645	0.312	0.131

有可能系统本身就无法通过静态输出反馈镇定; 当 $m + r = n$ 时, 本文算法最低也有近 9% 的成功率, 还是有相当效果的 由表 2 所示, 当输入/输出维数降低时, 考虑到随机产生的系统不满足 Davison-Kimura 定理的比例升高, 所得的计算结果表明本文算法是比较有效的

6 结 语

本文研究了线性时不变系统的静态输出反馈可镇定问题, 针对相互耦合的矩阵不等式对的不可直接求解问题, 提出了一个基于结构 Lyapunov 矩阵的求解算法 数值例子证明了该算法不仅可以解决受限制的非最小相位系统, 对更普遍的线性时不变系统(如非最小相位系统, 不满足 Davison-Kimura 定理限制的系统等), 也能够部分地进行静态输出反馈镇定; 同以往成果不同的是: 该算法为非迭代算法, 因此求解过程简单易行 最后的随机算例表明了该方法具有较强的普遍性

参考文献(References):

- [1] Benton R E, Jr, Smith D. Static output feedback stabilization with prescribed degree of stability [J]. *IEEE Trans on Automat Contr*, 1998, 43(10): 1493-1496
- [2] Gerome J C, de Souza C C, Skelton R E. LM I numerical solution for output feedback stabilization [A]. *Proc American Control Conf [C]*. Baltimore, 1994 40-44
- [3] Gerome J C, de Souza C C, Skelton R E. Static output feedback controllers: Stability and convexity [J]. *IEEE Trans on Automat Contr*, 1998, 43(1): 120-125
- [4] Gerome J C, Peres P L D, Souza S R. Convex analysis of output feedback control problems: Robust stability and performance [J]. *IEEE Trans on Automat Contr*, 1996, 41(7): 997-1003

(下转第 993 页)

- time-varying uncertainties [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(2): 223-226
- [3] 苏宏业, 王景成, 褚健. 一类不确定动态系统的无记忆鲁棒镇定控制[J]. *自动化学报*, 1998, 24(4): 497-501.
(Su H Y, Wang J C, Chu J. Memoryless robust stabilization of a class of uncertain linear time-delay systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 1998, 24(4): 497-501.)
- [4] 费树岷, 姜偕富, 冯纯伯. 线性时滞系统对时滞参数的自适应控制[J]. *控制理论与应用*, 2001, 18(5): 686-690.
(Fei S M, Jiang X F, Feng C B. Adaptive control for linear delay systems to aim directly at delay parameter [J]. *Control Theory and Application*, 2001, 18(5): 686-690.)
- [5] Ge Jian-Hua, Frank P M, Lin Ching-Fang. H control via output feedback for state delayed systems[J]. *Int J Control*, 1996, 64(1): 1-7.
- [6] Wang J C, Su H Y, Chu J, et al. Robust H output feedback controller design for linear time-varying uncertain systems with delayed state [J]. *Control Theory and Application*, 1999, 16(3): 334-338
- [7] Su H Y, Wang J C, Chu J. Output feedback stabilizing controller for linear time-varying uncertain systems with delayed state[J]. *Control Theory and Application*, 1998, 15(6): 939-944
- [8] Zidong W, Biao H, Unbehauen H. Robust H observer design of linear time-delay systems with parametric uncertainty[J]. *Systems & Control Letters*, 2001, 42: 303-311
- [9] 关新平, 林志云, 段广仁. 时变时滞不确定系统基于观测器的鲁棒控制器设计[J]. *信息与控制*, 1999, 28(3): 161-167.
(Guan X P, Lin Z Y, Duan G R. Design of observer-based robust controllers for uncertain systems with time-varying delay[J]. *Information and Control*, 1999, 28(3): 161-167.)
- [10] Han H C, Myung J C. Observer-based H controller design for state delayed linear systems [J]. *Automatica*, 1996, 32: 1073-1075
- [11] Petersen IR, Hollot Christopher V. A Riccati equation to the stabilization of uncertain linear systems [J]. *Automatica*, 1986, 22(4): 397-411

(上接第 982 页)

- [5] Iwasaki T, Skelton R E, Gerome I J C. Linear quadratic suboptimal control with static output feedback[J]. *Syst Contr Lett*, 1994, 23(6): 421-430
- [6] Cao Y Y, Lam J, Sun Y X. Static output feedback stabilization: An LMI approach [J]. *Automatica*, 1998, 34(12): 1641-1645
- [7] Prempain E, Postlethwaite I. Static output feedback stabilization with H performance for a class of plants [J]. *Syst Contr Lett*, 2001, 43(3): 159-166
- [8] Gahinet P, Nemirovski A, Laub A J, et al. *LMI Control Toolbox* [M]. The Math Works Inc, 1995
- [9] Boyd S, El Ghaoui L, Feron E, et al. *Linear matrix inequalities in system and control theory* [A]. *SIAM Studies in Applied Mathematics* [C]. Philadelphia, SIAM, 1994
- [10] Davison E J, Wang S H. On pole assignment in linear multivariable systems using output feedback [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1975, 20(4): 516-518
- [11] Kimura H. Pole assignment by gain output feedback [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1977, 20(4): 509-516

(上接第 987 页)

- [5] Crutchfield J P, Feldman D P. Regularities unseen, randomness observed: Levels of entropy convergence [EB/OL]. <http://www.santafe.edu/sfi/publications/working/01-02-012.pdf>, 2001-02-12
- [6] Schümann T, Grassberger P. Entropy estimation of symbol sequences[J]. *Chaos*, 1996, 6(3): 414-427
- [7] Frizelle G, Woodcock E. Measuring complexity as an aid to developing operational strategy [J]. *Int J of Operation and Production Management*, 1995, 15(5): 26-39
- [8] Puterman M L. *Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming* [M]. John Wiley & Sons, Inc, 1994
- [9] Howard R A. *Dynamic Programming and Markov Processes* [M]. Cambridge: The Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology and John Wiley & Sons, Inc, 1960