

文章编号: 1001-0920(2005)01-0055-04

## 提升多速率系统无波纹问题研究

赵 霞<sup>1</sup>, 姚 郁<sup>2</sup>

(1. 同济大学 控制科学与工程系, 上海 200092; 2 哈尔滨工业大学 控制科学与工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘 要:** 对于多速率采样控制系统, 在应用提升技术进行分析设计时闭环输出存在采样点间波纹的现象, 首先总结了控制器为比例环节时, 各种被控对象在不同参考输入信号作用下系统输出中是否有波纹及相应消除波纹的方法; 然后应用极点配置法, 分析并给出了控制器含有动态环节时消除波纹的方法, 并结合实例在 MATLAB 环境下编程实现

**关键词:** 多速率采样控制系统; 采样点间波纹; 离散提升技术; 极点配置

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## On ripple-free problem of lifted multirate control systems

ZHAO Xia<sup>1</sup>, YAO Yu<sup>2</sup>

(1. Department of Control Science and Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2 Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China Correspondent: ZHAO Xia, E-mail: zxx-zhao@sina.com)

**Abstract:** In allusion to the phenomena that there exist intersample ripples in closed-loop outputs of multirate system when analyzing or designing the system using lifting technology, firstly, whether there existing intersample ripples and the methods to eliminate the existing intersample ripple are summarized for diversified plants under different reference signals in proportional controller case. Then, by applying pole-placement approach, an approach to avoid intersample ripples in dynamic controller case is proposed. The concrete examples are realized under MATLAB environment.

**Key words:** multirate sampled-data system; intersample ripples; discrete lifting technology; pole-placement

### 1 引 言

在实际工程中, 多速率采样控制系统有着广泛的应用价值<sup>[1]</sup>. 提升技术是处理多速率采样控制系统的主要方法之一, 但提升和逆提升操作会引起系统闭环输出采样点间的波纹现象<sup>[2~4]</sup>. 非采样时刻的波纹现象, 不仅造成系统非采样时刻的误差, 而且浪费执行机构的功率, 增加机械磨损<sup>[5]</sup>. Grasselli 等研究了多速率系统闭环输出采样点间存在波纹时的有限拍跟踪问题, 通过将多速率系统转换成离散周期系统, 得到了系统实现无波纹、有限拍跟踪时对控制输出的限制条件. 结果表明, 对控制输出的限制条件等价于连续时间被控对象中包含参考信号的内部模型, 即所谓的内模原理<sup>[6]</sup>. Jetto 等应用多项式法

研究了多速率系统无波纹有限拍问题, 给出了以 Diophantine 方程通解表示的控制器的参数表示形式<sup>[7]</sup>. 但应注意, 文献[6, 7]中的波纹是由数字控制的离散时间特性造成的, 并不是提升或逆提升操作所引起的波纹. Tangirala 不但表明多速率系统输出中确实存在采样点间的波纹, 而且研究了怎样对控制器进行限制以避免波纹产生的方法<sup>[2~4]</sup>. 但他只针对纯比例控制器情形进行了研究, 而大多实际系统中控制器都含有动态环节, 并不是单纯的比例环节. 所以上述方法仍没有完全解决闭环输出中存在波纹的问题.

本文在文献[2~4]的基础上, 对 Tangirala 的结论进行了进一步的总结与扩展, 并对文献[2]中波

收稿日期: 2004-02-16; 修回日期: 2004-05-24

作者简介: 赵霞(1974—), 女, 内蒙包头人, 讲师, 博士, 从事系统辨识、采样控制系统分析等研究; 姚郁(1963—), 男, 黑龙江佳木斯人, 教授, 博士生导师, 从事采样控制系统分析与设计等研究

纹抑制第 2 种方法的实质进行了分析和说明;尤其是应用极点配置法,分析并给出了控制器含有动态环节时消除波纹的方法

### 2 波纹存在原因

图 1 和图 2 分别为同步多速率系统提升前后的图形,其中:采样器  $S_{nh}$  的采样周期为  $nh$ ,保持器  $H_h$  的采样周期为  $h$  对控制器  $K$  提升得到线性时不变提升控制器  $K = L_n K L_n^{-1} = L_n K$ ,  $K$  有单一输入和  $n$  个输出,是  $n$  维传递函数 提升后广义被控对象为线性时不变  $P_L = S_{nh} P H_h L_n^{-1}$ ,  $P_L$  有  $n$  个输入和单一输出,也是  $n$  维传递函数 提升技术是目前应用于采样控制系统直接设计法中最为普遍的一种方法,它在使得时变系统变为线性时不变系统的同时,也增加了控制器和被控对象的维数

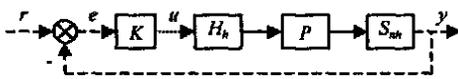


图 1 SISO 多速率系统(采样周期比值为正整数)

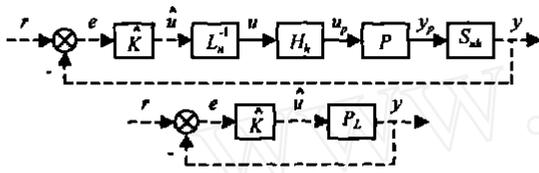


图 2 图 1 所示系统的提升系统

引理 1<sup>[2]</sup> 图 1 所示的多速率采样器和保持器分别为  $S_{nh}$  和  $H_h$  其中:  $n$  为正整数,  $P$  为 SISO 系统连续时间的 LTI 被控对象 当  $C$  和  $B$  不为零时,图 2 中的  $P_L = S_{nh} P H_h L_n^{-1}$  的  $n$  个传递函数不相同

证明 图 2 中  $P_L = S_{nh} P H_h L_n^{-1} = S_n S_h P H_h L_n^{-1} = S_n P H_h L_n^{-1}$ ,  $P_L$  的状态空间模型为<sup>[2]</sup>

$$P_L(z) = \begin{bmatrix} A_h^n & | & A_h^{n-1} B_h & A_h^{n-2} B_h & \dots & B_h \\ \hline C & & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

此时,  $P_L$  的  $n$  个传递函数为

$$P_{L,1}(z) = C(zI - A_h^n)^{-1} A_h^{n-1} B_h,$$

$$P_{L,2}(z) = C(zI - A_h^n)^{-1} A_h^{n-2} B_h,$$

⋮

$$P_{L,n}(z) = C(zI - A_h^n)^{-1} B_h$$

由引理 1 可知,图 2 中由于提升对象  $P_L$  的  $n$  个

传递函数不同,依据不同传递函数对象设计的  $n$  个控制器  $K$  也不相同,从而  $n$  个控制器输出的  $n$  个控制信号也不相同,即  $\hat{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]$  中  $u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n$  图 2 中  $\hat{u}$  经逆提升算子  $L_n^{-1}$  变为  $n$ -周期时变信号,即

$$u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n \ u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n \ \dots].$$

由于  $u$  的  $n$ -周期时变性,当  $u$  经过采样周期为  $h$  的保持器后,连续时间被控对象的输入信号  $u_p$  并不是稳态的,而是以  $h$  为周期的输入信号 因此,当以采样周期  $h$  采样被控对象的输出信号  $y_p$  时,输出信号  $y$  中存在波纹 同理,对于采样周期比值为有理数的 SISO 多速率系统和采样周期比值分别为正整数和有理数的 MIMO 多速率系统,也可根据类似引理判断系统闭环输出存在波纹

### 3 纯比例控制器时无波纹条件

基于上述分析可知,只要保证提升控制器输出的控制信号满足  $u_1 = u_2 = \dots = u_n$ ,即可保证输出无波纹 按 Tangirala 所述方法<sup>[2]</sup>,对各种被控对象在不同参考输入信号作用下消除波纹的条件进行了归纳总结,如表 1 所示

文献[2]中命题 6 表明,当被控对象为稳定系统时,在图 2 所示提升控制器后加一提升积分环节或在逆提升算子后加一离散积分环节,便可保证系统对阶跃型参考输入的无波纹响应 对命题 6 中结果进行如下分析:

$$\begin{aligned} P_L P_L^{-1} \hat{K} &= S_{nh} P H_h L_n^{-1} P_L^{-1} \hat{K} = \\ S_{nh} P H_h L_n^{-1} L_n \frac{z}{z-1} L_n^{-1} \hat{K} &= \\ S_{nh} P H_h \frac{z}{z-1} L_n^{-1} \hat{K} &= \\ S_{nh} P H_h \frac{z}{z-1} S_h H_h L_n^{-1} \hat{K} &= \\ S_{nh} P \frac{1}{s} H_h L_n^{-1} \hat{K} &= \\ S_{nh} P H_h L_n^{-1} \hat{K}. \end{aligned}$$

其中:  $P$  为 I 型被控对象,  $P$  为零型被控对象

由上述关系可知,文献[2]中命题 6 实质上是将被控对象由零型变为 I 型

表 1 SISO 和采样周期比值为正整数时控制器限制条件

系统	信 号		
	阶跃信号	速度信号	加速度信号
零型	$\hat{K}_1(1) = \dots = \hat{K}_n(1)$	有无波纹与增益无关	有无波纹与增益无关
I 型	对增益无限制时也无波纹	$\hat{K}_1(1) = \dots = \hat{K}_n(1)$	有无波纹与增益无关
II 型	对增益无限制时也无波纹	对增益无限制时也无波纹	$\hat{K}_1(1) = \dots = \hat{K}_n(1)$

#### 4 控制器包含动态环节时无波纹条件

由上节内容可知, 当采样周期的比值为正整数时, 只需让提升控制器的稳态增益相同便可达到消除波纹的目的。大多实际系统中控制器都含有动态环节, 而不是单纯的比例环节, 所以上述方法仍没有完全解决闭环输出波纹的问题。波纹产生的根本原因是由于  $n$  个提升对象不同造成的, 如果能将  $n$  个提升对象等价为一个对象, 那么最终只需为此对象设计一个控制器, 系统输出便不会产生波纹。因此, 当控制器含有动态环节的控制器时, 应考虑如何将  $n$  个提升对象等价为一个对象, 使得为等价离散对象设计的控制器, 也会使  $n$  个提升对象同时满足稳定性和性能要求。

图 2 中提升对象  $P_L$  的  $n$  个传递函数为

$$\begin{aligned} P_{L,1}(z) &= C(zI - A_h^n)^{-1}A_h^{n-1}B_h, \\ P_{L,2}(z) &= C(zI - A_h^n)^{-1}A_h^{n-2}B_h, \\ &\vdots \\ P_{L,n}(z) &= C(zI - A_h^n)^{-1}B_h \end{aligned}$$

其中:  $n$  个传递函数的系统矩阵均为  $A_h^n$ ; 而输入矩阵各不相同, 分别为  $A_h^{n-1}B_h, A_h^{n-2}B_h, \dots, B_h$ , 这表明  $n$  个提升对象具有完全相同的特征值, 只是输入矩阵不同而已。

由于  $n$  个提升对象极点完全相同, 仅存在零点差异, 为此本文考虑对提升对象传递函数  $P_{L,i}(i = 1, 2, \dots, n)$  进行加权求和, 并得到离散对象

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{i=1}^n q_i P_{L,i}(z) = \\ &= C(zI - A_h^n)^{-1}(q_1 A_h^{n-1} + \\ &\quad q_2 A_h^{n-2} + \dots + q_n I)B_h \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $B_h = \int_0^h e^{A\tau} d\tau \bullet B$ ,  $q_i$  为加权系数

由式(1)可看出, 离散对象  $G$  的极点和原  $n$  个提升对象的极点完全相同。因此, 使对象  $G$  满足稳定性要求的控制器, 同样也会使  $n$  个提升对象满足稳定性的要求; 适当选择加权系数  $q_i$ , 使对象  $G$  满足性能要求的控制器, 同样也会使  $n$  个提升对象满足性能的要求。

式(1)所示离散对象  $G$  的状态空间可表示为

$$\begin{cases} x(k+1) = A_h x(k) + (q_1 A_h^{n-1} + q_2 A_h^{n-2} + \dots + q_n I)B_h u(k), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases}$$

简写为

$$\begin{cases} x(k+1) = A_k x(k) + B_k u(k), \\ y(k) = C_k x(k). \end{cases}$$

其中:  $x(k)$  为离散对象  $G$  的状态变量,  $u(k)$  为控制信号,  $y(k)$  为输出信号。

假设所有状态变量是完全能控的, 则可通过加入适当的状态反馈增益阵  $K$ , 将闭环系统的极点配置在期望的任意位置上。设控制律采用线性状态反馈  $u(k) = -Lx(k)$ , 可得闭环系统的状态方程  $x(k+1) = (A - BL)x(k)$ , 从而得到闭环系统的特征方程

$$|zI - (A - BL)| = 0 \quad (2)$$

若期望的闭环系统极点为  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , 则期望的闭环系统特征方程为

$$(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \dots + \alpha_n \quad (3)$$

对比式(2)和(3), 可得到控制规律  $L$  应满足

$$|zI - (A - BL)| = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \dots + \alpha_n$$

将上式展开, 让同次幂的系数相等, 可解出  $L$  的每个元素, 即得到状态反馈阵

当式(1)中所选取的加权系数均为 1 时, 式(1)变为

$$G(z) = C(zI - A_h^n)^{-1}(A_h^{n-1} + A_h^{n-2} + \dots + I)B_h$$

采用传统的离散化方法对图 1 所示连续被控对象  $P = [A, B, C, 0]$  进行离散化, 离散化采样周期为  $nh$ , 可得到离散被控对象  $P_d = [A_{nh}, B_{nh}, C, 0]$ , 其离散传递函数为  $P(z) = C(zI - A_{nh})^{-1}B_{nh}$ 。因为有如如下关系成立:

$$\begin{aligned} A_{nh} &= e^{A_{nh}} = (e^{Ah})^n = (A_h)^n = A_h^n, \\ B_{nh} &= \int_0^{nh} e^{A\tau} d\tau \bullet B = \\ &= \int_0^h e^{A\tau} d\tau \bullet B + \int_h^{2h} e^{A\tau} d\tau \bullet B + \\ &\dots + \int_{(n-1)h}^{nh} e^{A\tau} d\tau \bullet B = \\ &= \int_0^h e^{A\tau} d\tau \bullet B + e^{Ah} \int_0^h e^{A\tau} d\tau \bullet B + \\ &\dots + e^{A(n-1)h} \int_0^h e^{A\tau} d\tau \bullet B = \\ &= B_h + e^{Ah} B_h + \dots + e^{A(n-1)h} B_h, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} P(z) &= C(zI - A_{nh})^{-1}B_{nh} = \\ &= C(zI - A_{nh})^{-1}(B_h + e^{Ah} B_h + \dots + e^{A(n-1)h} B_h) = \\ &= C(zI - A_{nh})^{-1}(I + e^{Ah} + \dots + e^{A(n-1)h})B_h = \\ &= C(zI - A_{nh})^{-1}(I + A_h + \dots + A_{(n-1)h})B_h \end{aligned}$$

即对提升对象  $P_{L,i}(i = 1, 2, \dots, n)$  直接求和后得到的离散对象和采样周期为  $nh$  时, 用传统离散化方法得到的离散对象完全相同。因此, 只要合理选择加权系数  $q_i$ , 便可得到一个适合具体问题的离散对象。这种无波纹设计方法, 加权系数的选取是较为关键的。

问题 由于没有选取加权系数的准则,具体设计时只能根据经验采用试凑的方法,具体的选取原则尚有待进一步深入研究

### 5 仿真结果

图 1 中被控对象  $P = 1/(0.5s + 1)$ ,  $n = 5$ ,  $h = 0.002$ , 采用提升技术为该对象设计控制器,得到的提升控制器为单输入-5 输出,控制器的传递函数矩阵为

$$\hat{K}(z) = \frac{1}{z^2 - 0.9381z - 0.0008} \times \begin{bmatrix} 227.6672z^2 - 213.5672z - 0.1982 \\ 17.8118z^2 - 16.7252z \\ 2.8714z^2 - 2.6907z - 0.0051 \\ 0.8344z^2 - 0.7838z + 0.0003 \\ 0.1396z^2 - 0.1307z - 0.0003 \end{bmatrix}$$

由于 5 维  $\hat{K}$  的 5 个传递函数不同,可知

$$u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_5]$$

中  $u_1 \ u_2 \ \dots \ u_5$ , 即图 2 中  $u$  为 5- 周期时变信号

$$u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_5 \ u_1 \ u_2 \ \dots \ u_5 \ \dots]$$

当  $u$  经过采样周期为  $h$  的保持器后,连续时间被控对象的输入信号  $u_p$  是以  $h$  为周期的输入信号,因此,当以采样周期  $h$  采样被控对象的输出信号  $y_p$  时,输出信号  $y$  中存在的波纹也为 5- 周期的时变波纹,如图 3 所示,此时,因为系统的控制器包含动态环节,

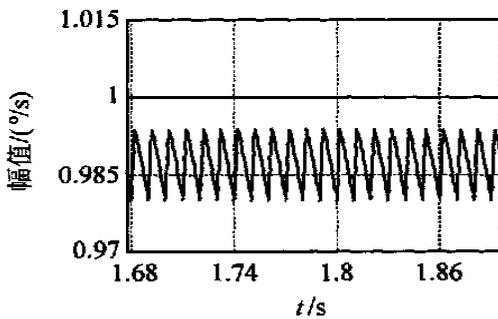


图 3 增益不等时零型系统的阶跃响应

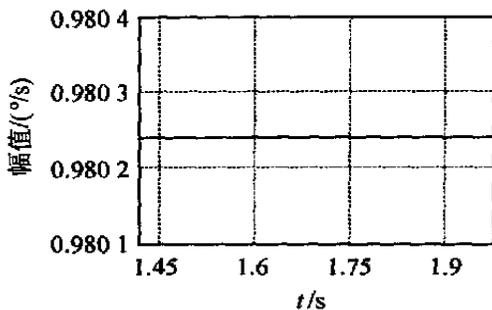


图 4 基于极点配置无波纹设计结果

所以 Tangirala 的方法不再适用

对此,采用本文方法为系统设计无波纹控制器,对 5 个极点完全相同,仅存在零点差异的提升对象进行加权求和,得到一个离散对象  $G$ ,并为此离散对象设计控制器,由前面分析可知,离散对象  $G$  的极点和原 5 个提升对象的极点完全相同,因此,使对象  $G$  满足稳定性要求的控制器,同样也会使 5 个提升对象满足稳定性的要求,用试凑法选择加权系数,使对象  $G$  满足性能要求的控制器,同样也会使 5 个提升对象满足性能的要求,此时系统的单位阶跃响应信号如图 4 所示,从图 4 可以看出,稳态响应中确实无波纹存在,仿真结果表明了该方法的正确性

### 6 结 语

本文在文献[2]的基础上,对 Tangirala 的结论进行了进一步的总结和扩展,给出了零型、I 型和 II 型被控对象在阶跃、速度、加速度输入信号作用下,消除多速率输出中波纹的方法,同时还对文献[2]中波纹抑制第 2 种方法的实质进行了说明,更重要的是,本文应用极点配置法分析并给出了控制器含有动态环节时消除波纹的方法,但这种方法也存在如何确定加权系数的问题,具体的选取原则尚有待于进一步深入研究

### 参考文献(References)

- [1] Li Qiu, Chen T. Multirate sampled-data systems: All  $H_\infty$  suboptimal controllers and the minimum entropy controller [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(3): 537-550
- [2] Tangirala A. K. Multirate control and multiscale monitoring of chemical processes [D]. Alberta: University of Alberta, 2001: 37-70
- [3] Tangirala A. K., Li D., Patwardhan R. S., et al. Ripple-free conditions for lifted multirate control systems [J]. *Automatica*, 2001, 37(10): 1637-1645
- [4] Tangirala A. K., Shah S. L., Chen T. Conditions for removing intersample ripples in multirate control [A]. *Proc of the 1999 IEEE Canadian Conf on Electrical Computer Engineering* [C]. Alberta, 1999: 1585-1589
- [5] 冯勇. 现代计算机控制系统 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1996: 197-207.
- [6] Grasselli O. M., Jetto L., Longhi S. Ripple-free dead-beat tracking for multirate sampled-data systems [J]. *Int J Control*, 1995, 61(6): 1437-1455
- [7] Jetto L., Longhi S. Parameterized solution of the dead-beat ripple-free control problem for multirate sampled-data systems [A]. *Proc of the 38th Conf on Decision and Control* [C]. Arizona, 1999: 3914-3919.