

文章编号: 1001-0920(2005)01-0059-03

运用线性反馈分析设计饱和线性系统

魏爱荣¹, 赵克友²

(1. 山东大学 控制科学与工程学院, 山东 济南 250061; 2. 青岛大学 自动化工程学院, 山东 青岛 266071)

摘 要: 给出了状态反馈控制饱和单输入系统以及动态输出反馈单输出饱和线性系统是全局渐近稳定还是区域渐近稳定的充分性条件, 并在区域渐近稳定的情况下计算其不变吸引椭球. 对于控制饱和系统, 运用 Riccati 方程迭代法设计控制器, 以使所得椭球尽量大. 仿真算例说明了所提出方法的有效性.

关键词: 执行器饱和; 输出饱和; 吸引域; 不变集

中图分类号: TP13; TP271

文献标识码: A

Analysis and design for linear systems with saturation by linear feedback

WEI A-i-rong¹, ZHAO Ke-you²

(1. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China; 2. School of Automation Engineering, Qingdao University, Qingdao 266071, China. Correspondent: WEI A-i-rong, E-mail: weiairong@sdu.edu.cn)

Abstract: For a state-feedback single-input linear system subject to actuator saturation and a dynamic output-feedback single-output linear system with output saturation, a sufficient condition is presented, which guarantees global-asymptotic stabilization (GAS) or regional-asymptotic stabilization (RAS). An invariant attractive ellipsoid for the case of RAS is calculated. An iterative Riccati equation algorithm is given to find such a controller that supports an ellipsoid as large as possible for systems with actuator saturation. The simulation example shows the effectiveness of the approach.

Key words: actuator saturation; output saturation; domain of attraction; invariant set

1 引 言

实际控制系统几乎都会遇到(执行器或输出)饱和问题, 其中输入饱和和输出饱和是控制系统最常见的问题. 1990 年以来, 人们对受限控制系统的研究已取得不少成果^[1-4], 其中大多为涉及输入受限的研究^[5,6]. 若发现所设计的控制系统在饱和介入后稳定域太小, 则需返回重新设计, 否则投运后会出现问题, 轻者使系统性能降低, 重者可能发生恶性事故^[2]. 因此, 研究使含饱和的控制系统具有尽量大的吸引域具有重要意义.

本文首先考虑单输入线性系统在状态反馈含饱

和时系统的稳定性; 然后考虑采用动态输出反馈时单饱和输出系统的稳定性. 在不存在饱和的情况下, 即便反馈使系统达到全局渐近稳定, 饱和的介入也大多会使系统降为区域渐近稳定. 对于区域渐近稳定的情况, 本文给出了计算其不变吸引椭球的算法, 并用迭代法求取反馈增益, 以使所得椭球尽量大.

2 控制饱和状态反馈系统

2.1 问题叙述

考虑如下系统:

收稿日期: 2004-03-26; 修回日期: 2004-07-05

基金项目: 国家自然科学基金项目(60174040).

作者简介: 魏爱荣(1972—), 女, 广东广州人, 讲师, 博士生, 从事受限控制、鲁棒控制系统的研究; 赵克友(1945—), 男, 山东青岛人, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒与非线性控制、交流调速与伺服控制的研究.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, \\ u = \text{sat}_\Delta(kx). \end{cases} \quad (1)$$

其中: 状态 $x \in R^n$, 控制 $u \in R$ 为饱和的状态反馈 $\text{sat}_\Delta(kx) = \text{sign}(kx) \min\{\Delta, |kx|\}^{[7,8]}$, 反馈增益 $k \in R^n$, $\Delta > 0$ 是幅值 A 和 b 为相应维数的实数阵

假设 1 在 (A, b) 可镇定的情况下, 选择非零 k 使 $A + bk$ 为 Hurwitz 稳定阵

假设 1 保证存在对称正定矩阵 P 满足 Lyapunov 方程

$$(A + bk)P + P(A + bk) + I = 0 \quad (2)$$

依据这个 P 和一个正数 r , 便可确定状态空间中的开椭圆 $\Omega(P, r) = \{x \in R^n \mid x^T P x < r\}$.

定义 1^[9] 自初始状态 $x(0) = x_0$ 出发的系统 (1) 的解 (状态函数) 记为 $\Psi(t, x_0)$. 若 $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t, x_0) = 0$, 则称 x_0 是吸引点, 吸引点的全体称为吸引域. 若全状态空间是吸引的, 则称系统 (1) 为全局渐近稳定的 (GAS); 若仅某个限定区域是吸引的, 则称系统是区域渐近稳定的 (RAS).

用式 (2) 的解 P 定义式 (1) 的备选 Lyapunov 函数 $V(x) = x^T P x$. 若存在某 $r > 0$ 使 $\forall x \in \Omega(P, r)$, 则有 $\dot{V}(x) < 0$. 显然, $\Omega(P, r)$ 是式 (1) 的不变吸引椭圆.

2.2 含饱和状态反馈系统的稳定性

引入饱和度函数 $\mu: R^n \rightarrow (0, 1]$, 即

$$\mu = \mu(x) = \begin{cases} 1, & |kx| \leq \Delta; \\ \Delta/|kx|, & |kx| > \Delta \end{cases} \quad (3)$$

易证 $\text{sat}_\Delta(kx) = \mu kx$, 故系统 (1) 可等价地写为

$$\dot{x} = (A + \mu bk)x. \quad (4)$$

求 $V(x)$ 沿式 (4) 的导数, 得 $\dot{V}(x) = x^T \{-I + (\mu - 1)E\}x$, 其中 $E = (bk)P + P(bk)$. 令 $\mu^* = \inf\{\mu \in (0, 1] \mid V(x) < 0, x \in \Omega\}$, 则 μ^* 的计算可化为矩阵不等式的特征值问题. 这涉及到计算 E 的最小特征值 $\lambda_{\min}(E)$, 结论为:

- 1) $\mu^* = 0$, 当 $\lambda_{\min}(E) = -1$;
- 2) $\mu^* = 1 + 1/\lambda_{\min}(E)$, 当 $\lambda_{\min}(E) < -1$ 时.

由数学分析不难求得函数 $\mu(\bullet)$ 在椭圆 $\Omega(P, r)$ 上的下确界 $\mu^* = \Delta \sqrt{r(kP^{-1}k)}$. 在预先得知 μ^* 的情况下, 可反解出 $r = \Delta^2 / (kP^{-1}k)\mu^{*2}$.

定理 1 设系统 (1) 满足假设 1, 计算矩阵 E 及其最小特征值 $\lambda_{\min}(E)$. 1) 若 $\lambda_{\min}(E) = -1$, 则系统为 GAS; 2) 若 $\lambda_{\min}(E) < -1$, 则系统为 RAS, 其不变吸引椭圆 $\Omega(P, r)$ 的半径为

$$r = \frac{\Delta^2}{(kP^{-1}k)(1 + 1/\lambda_{\min}(E))^2} \quad (5)$$

算法 1 (满足假设 1 的系统 (1) 的稳定性分析)

Step 1: 选择非零 k , 使 $A + bk$ 为 Hurwitz 稳定阵且具有满意性能, 并由式 (2) 解出正定对称矩阵 P ;

Step 2: 计算 $E = (bk)P + P(bk)$ 及 $\lambda_{\min}(E)$, 若 $\lambda_{\min}(E) = -1$, 则系统 (1) 为 GAS, 停止; 否则为 RAS, 转 Step 3;

Step 3: 按式 (5) 计算 r , 则 $\Omega(P, r)$ 是系统 (1) 的不变吸引椭圆, 其容积

$$V = \frac{\pi r^{n/2}}{(\det(P))^{1/2}}$$

2.3 控制器设计

在假设 1 的前提下, 选择实数 $\beta > 0$ 及 $\alpha \in [0, 1]$, 则一定存在对称正定矩阵 X , 满足 Riccati 方程

$$AX + XA - Xb\beta^{-1}bX + \alpha I = 0 \quad (6)$$

令反馈增益 $k = -\beta^{-1}bX$, 根据线性系统理论, $A + bk$ 必为 Hurwitz 矩阵. 迭代 $\alpha, 1/\beta_j$, 迭代范围不超过 1. 对于每个 α 和 β_j , 令 $\alpha_{i+1} = \alpha + \epsilon$ 和 $1/\beta_{j+1} = 1/\beta_j + \epsilon$, 此处 ϵ 为步长. 求所对应的 Riccati 方程 (6) 的解 X_{ij} , 并令第 ij 次迭代的反馈增益 $k_{ij} = -\beta_j^{-1}bX_{ij}$. 按照算法 1 求解与之对应的 P_{ij}, r_{ij}, V_{ij} , 求使 V_{ij} 取最大值时的 P^*, k^*, r^* , 则反馈增益 k^* 可使系统 (1) 有尽量大的不变吸引椭圆 $\Omega(P^*, r^*)$.

2.4 仿真算例

考虑系统 (1), 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \Delta = 1.$$

(1) 稳定性分析

$$\lambda(A) = \begin{bmatrix} -0.414 & 2 \\ 2 & 414 \end{bmatrix},$$

令 $k = [-3 \quad -4]$, 则

$$\lambda(A + bk) = \begin{bmatrix} -1 + i & \\ -1 - i & \end{bmatrix}.$$

按算法 1 确认饱和系统为 RAS, 其不变吸引椭圆为 $\Omega(P, r)$. 其中

$$P = \begin{bmatrix} 1.250 & 0 & 0.250 & 0 \\ 0 & 250 & 0 & 0.375 \\ 0 & 0 & 0.386 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 190.4 \end{bmatrix},$$

(2) 求使不变吸引椭圆尽量大的控制器

经迭代计算, 有 $\alpha_0 = 0.18, 1/\beta_0 = 0.4910$, 控制器

$$k = [-1.0032 \quad -2.3859],$$

$$\lambda(A + bk) = \begin{bmatrix} -0.008 & 6 \\ -0.377 & 3 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 60.882 & 9 & 154.417 & 7 \\ 154.417 & 7 & 401.491 & 4 \end{bmatrix},$$

$$r = 52.4319.$$

不变吸引椭球 $\Omega(P, r)$ 的 $V_{\max} = 6\ 729\ 4$ 仿真曲线如图 1 所示

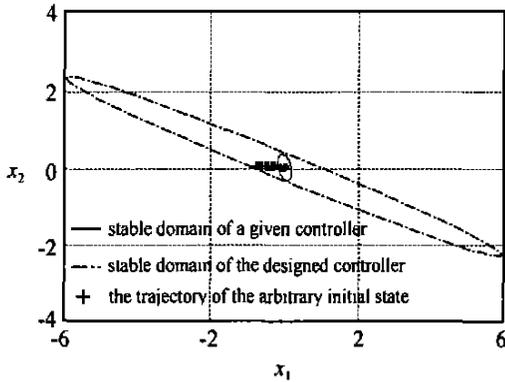


图 1 仿真曲线

3 输出饱和和动态输出反馈系统

3.1 问题叙述

考虑如下含饱和输出的系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, x \in R^n, u \in R^m; \\ y = \text{sat}_\Delta(cx), y \in R. \end{cases} \quad (7)$$

其中 A, B, c 为相应维数的实数矩阵 对式(7)构造如下动态输出反馈:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + l(y - c\hat{x}), \\ u = -K\hat{x}. \end{cases} \quad (8)$$

其中 l 和 K 分别为 n 维和 $m \times n$ 维的观测向量和反馈增益阵 令 $\tilde{x} = x - \hat{x}$, 则由式(7)和(8)组成闭环系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ - (v - 1)lc & A - lc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

其中饱和度函数 $v: R^n \rightarrow (0, 1]$, 即

$$v = v(x) := \begin{cases} 1, & |cx| \leq \Delta; \\ \Delta/|cx|, & |cx| > \Delta \end{cases} \quad (10)$$

显然 $\text{sat}_\Delta(cx) = vcx$. 若忽视式(7)的饱和, 则式(9)可化为如下线性闭环系统:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

3.2 输出饱和系统的稳定性

假设 2 系统(7)满足 (A, B) 可稳定, (A, c) 可检测

假设 2 保证可选定 K 和 l , 使 $A - BK$ 和 $A - lc$ 皆为 Hurwitz 稳定阵 求满足 Lyapunov 方程

$$AP + PA + I = 0 \quad (12)$$

的对称正定解阵 $P \in R^{2n \times 2n}$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - lc \end{bmatrix}.$$

据此 P 和正数 r , 仿前便可以确定超椭球 $\Omega(P, r)$

$R^{2n \times 2n}$. 用 P 定义系统(9)的 Lyapunov 函数

$$V(x, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix},$$

若对 $\forall \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} \in \Omega(P, r) \setminus \{0\}$ 有 $\dot{V}(x, \tilde{x}) < 0$, 则 $\Omega(P, r)$ 是式(9)的不变吸引椭球 求 $V(x, \tilde{x})$ 沿式(9)的时间导数

$$\dot{V}(x, \tilde{x}) = \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}^T (-I + (v - 1))E \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix},$$

其中

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -lc & 0 \end{bmatrix} P + P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -lc & 0 \end{bmatrix}.$$

定理 2 设系统(1)满足假设 2, 计算矩阵 E 及其最小特征值 $\lambda_{\min}(E)$. 1) 若 $\lambda_{\min}(E) = -1$, 则系统为 GAS; 2) 若 $\lambda_{\min}(E) < -1$, 则系统为 RAS, 其不变吸引椭球 $\Omega(P, r)$ 的半径仍按式(5)计算, 只将其中的 kE 和 P 分别换成 cE 和 P 即可.

算法 2 (满足假设 2 的系统(7)的稳定性分析)

Step 1: 选择状态反馈增益 K 和观测器增益 l , 使 $A - BK$ 和 $A - lc$ 为 Hurwitz 稳定阵且具有满意性能, 由式(12)解出正定对称矩阵 P ;

Step 2: 计算

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -lc & 0 \end{bmatrix} P + P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -lc & 0 \end{bmatrix},$$

若 $\lambda_{\min}(E) = -1$, 则系统为 GAS, 停止; 否则为 RAS, 转 Step 3;

Step 3: 按式(5)计算 r , 只将其中的 kE 和 P 分别换成 cE 和 P , 则 $\Omega(P, r)$ 是不变吸引椭球

4 结 语

本文讨论了单饱和输入系统静态状态反馈控制镇定性以及单饱和输出系统动态输出反馈控制下的镇定性 线性反馈使系统达到全局渐近镇定, 饱和介入后系统或仍为 GAS, 或降为 RAS 本文给出了镇定性判据, 对后者计算了不变吸引椭球, 并提供了寻找能得到尽量大的不变吸引椭球的反馈增益迭代法 本文提出的分析和设计方法简单且保守性低

参考文献 (References)

[1] Bernstein D S, Michel A N. A chronological bibliography on saturating actuators [J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 1995, 5(5): 375-380
 [2] Stoorvogel A, Saberi A, Guest Eds. Control problems with constraints [J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 1999, 9(10): 583-584
 [3] Ali Saberi, Lin Z, Teel A R. Control of linear systems with saturating actuators [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(3): 368-378

(下转第 68 页)

其中 $r_1 = r + d_1 - (1 + Ts)v_2^*$. 则有

$$\dot{v}^* = \frac{1}{1 + Ts} [r + d_1 - (1 + Ts)v_2^*] + v_2^* = \frac{1}{1 + Ts} (r + d_1).$$

所以该MRAS的等价参考模型为

$$\frac{\bar{y}_m(s)}{r(s)} = \frac{1}{(1 + Ts)(1 + Ts)}.$$

如果要求无静差, 则可在图1的基础上加一个含积分器的外环, 这里不详细讨论

现对文献[1]中的反例进行的仿真, 对象模型 $P(s)$ 和建模误差 $P_0(s)$ 分别为

$$P(s) = \frac{2}{s+1}, P_0(s) = \frac{229}{s^2+30s+229},$$

$r(t) = 1(t)$. 加在对象输入和输出的外扰分别为

$$d_1(t) = 2\sin(16, 1t), d_2(t) = \sin(16, 1t).$$

在文献[1]中, 外扰比此弱得多, 但系统仍然严重发散. 现按本文方法设计控制器, 并对整个MRAS进行Matlab仿真, 其结果如图2所示

值得注意的是: 图2(d) 因为有 d_2 直接加在 y_p 端, 所以 y_p 波形中直接含有 d_2 高频干扰信号, 但其均值仍是稳定的. 这是因为自适应律所用的信号 \bar{y}_p, \bar{y}_m 和 e 都经过良好的滤波, 它们所含的高频干扰幅值已经很小. 仿真结果表明, 这种MRAS具有很强的鲁棒性

4 结 论

本文给出的模型参考自适应控制系统, 其结构类似于间接式MRAS, 而整个系统又能与直接式MRAS等价. 这种特殊结构具有两方面优势: 1) 对被控对象的要求大为降低, 只要求知道阶次的上界, 而不需知道相对阶, 也不要对象最小相位和严格正实; 2) 能对自适应律中的所有信号进行低通滤波. 显然, 这两个优势大大提高了MRAS的鲁棒性. 由于只要求知道对象阶次的上界, 可将大的和小的时

间常数都纳入对象模型, 只忽略极小的时间常数, 这本身就大大减少了建模误差. 选择合适的 T 和 $\lambda(s)$ 能最大限度地削弱高频干扰对自适应律的影响. Matlab 仿真结果表明, 仿真例子中建模误差达到2阶, 高频干扰幅值高达参考输入的1~2倍

参考文献(References)

- [1] Rohrs C. Adaptive control in presence of unmodeled dynamics[D]. Department of Electric Engineering and Computer Science, MIT, 1982
- [2] Kreisselmeier G, Anderson B D O. Robust model reference adaptive control [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1986, 31(2): 127-133
- [3] Narendra K S, Annaswamy A M. A new adaptive law for robust adaptation without persistent excitation [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1985, 41(1): 193-216
- [4] Xie X J, Wu Y Q. Robust model reference adaptive control with hybrid adaptive law [J]. *Int J of System Science*, 2002, 33(14): 1109-1119
- [5] 王柏林. 水轮发电机组的模型参考自适应控制[J]. *自动化学报*, 1987, 13(6): 408-415
(Wang B L. Model reference adaptive control for hydroelectric generating set [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1987, 13(6): 408-415)
- [6] 王柏林. 极点配置模型参考自适应控制系统[J]. *控制与决策*, 1986, 11(4): 9-13
(Wang B L. Pole-placement model reference adaptive control system [J]. *Control and Decision*, 1986, 11(4): 9-13)
- [7] 王柏林. 无持续激励和严格正实条件的自适应控制系统[J]. *自动化学报*, 1990, 16(4): 317-324
(Wang B L. A type of adaptive control system without persistent excitation and strictly positive real conditions [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1990, 16(4): 317-324)

(上接第 61 页)

- [4] Ali Saberi, Jian Han. Constrained stabilization problems for linear plants [J]. *Automatica*, 2002, 38(4): 639-654
- [5] Gerhard Kreisselmeier. Stabilization of linear systems in the presence of output measurement saturation [J]. *Systems and Control Letters*, 1996, 29(1): 27-30
- [6] Zongli Lin, Tingshu Hu. Semiglobal stabilization of linear systems subject to output saturation [J]. *Systems and Control Letters*, 2001, 43(3): 211-217
- [7] Tingshu Hu, Zongli Lin. Exact characterization of invariance ellipsoids for single input linear systems subject to actuator saturation [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(1): 164-169
- [8] Tingshu Hu, Zongli Lin. On the tightness of a recent set invariance condition under actuator saturation [J]. *Systems and Control Letters*, 2003, 49(5): 389-399
- [9] Blanchini F. Set invariance in control [J]. *Automatica*, 1999, 35(11): 1747-1767.