文章编号: 1001-0920(2005)01-0082-05

非线性相似组合大系统最优控制的逐次逼近过程

唐功友, 孙 亮
(中国海洋大学 信息科学与工程学院, 山东 青岛 266071)

摘 要: 研究一类仿射非线性相似组合大系统关于二次型性能指标的最优控制问题 首先通过模型简化, 将非线性相似组合大系统化为若干个准解耦的子系统; 然后利用非线性系统最优控制的逐次逼近设计方法, 将求解高阶强耦合的非线性两点边值问题简化为求解一族解耦的线性两点边值问题序列 该线性两点边值问题序列的解一致收敛于非线性相似组合大系统的最优控制, 得到的最优控制律由线性最优控制的解析项与非线性补偿序列的极限项组成 通过截取最优控制非线性补偿序列的有限次逼近值, 得到了非线性组合大系统的次优控制律

关键词: 非线性大系统; 相似组合大系统; 最优控制; 逐次逼近法
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Successive approximation procedure of optimal control for nonlinear similar composite systems

TANG Gong-you, SUN Liang
(College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266071, China. Correspondent: TANG Gong-you, E-mail: gtang@ouc edu. cn)

Abstract: The optimal control problem for a class of affine nonlinear large-scale systems with similar composite structure is considered. The nonlinear large-scale system is first transformed into some quasi-decoupling subsystems by using the modeling technique. Then the high order, strongly coupled, nonlinear two-point boundary value problem is transformed into a sequence of linear decoupling two-point boundary value (TPBV) problems through a successive approximation procedure. The solution sequence of the TPBV problems uniformly converges to the optimal control for the original problem. The optimal control law obtained consists of an accurate linear term and a nonlinear compensating sequence. A suboptimal control law is obtained by using a finite iterative result of the nonlinear compensating sequence

Key words: nonlinear large-scale systems; similar composite systems; optimal control; successive approximation approach

1 引 言

由于动态大系统具有规模庞大、结构复杂、因素众多、功能综合等特点[1], 使得解决动态大系统的分析与综合问题十分困难 尤其是非线性互联大系统, 采用常规的控制理论和方法处理其分析与综合, 无法解决算法的时间复杂度和空间复杂度问题 近 20 年来, 动态大系统的分析与综合问题引起了众多研究者的重视, 取得了大量研究成果 其研究成果主要体现在利用大系统的特点(如对称性、相似性和弱耦合等)研究大系统的性质、结构特征和控制策略 张嗣瀛[2]根据由具有相同发电机组电厂构成的电网系统、直升机双机提升系统及大规模并行计算机系统等应用背景, 提出了对称性与相似性组合大系统的概念, 并提出了利用组合大系统各子系统间的对称或相似结构简化大系统的思想 近年来, 对称性组合大系统[3, 4]和其他线性[5, 6]及非线性[7, 8]相似结构的

收稿日期: 2004-01-05; **修回日期**: 2004-06-07.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60074001); 山东省自然科学基金项目(Y2000G02).
作者简介: 唐功友 (1953—), 男, 山东烟台人, 教授, 博士生导师, 从事控制理论与应用、计算机控制等研究; 孙亮 (1979-), 男, 山东青岛人, 博士生, 从事控制理论与应用、计算机控制等研究

组合大系统的研究已取得了许多很好的成果, 而对非线性相似组合大系统最优控制的研究尚未见报道. 对于一般的非线性系统, 其最优控制问题往往导致求解非线性两点边值问题, 除最简单的特殊情形, 通常这一问题的解析解是不存在的[9]. 因此, 研究非线性互联大系统最优控制的近似方法是非常有意义的课题.

本文的目的是研究一类形式上类似于文献[5]的仿射非线性相似组合大系统的最优控制问题. 首先利用等价变换, 将非线性相似组合大系统化为若干个准解耦的等价子系统; 然后将非线性系统最优控制的逐次逼近设计方法[9]用于非线性相似组合大系统的最优控制设计. 首先利用该方法将求解高阶耦合的非线性两点边值问题简化为求解一族解耦的线性两点边值问题序列; 然后证明该线性两点边值问题序列的解一致收敛于非线性互联动态大系统的最优控制; 最后在最优控制律中截取共态向量序列的有限逼近项, 得到非线性互联大系统次优控制律. 仿真结果表明, 本文提出的方法是有效的.

2　问题描述

考虑一类可分解为下列 N 个子系统的仿射非线性相似组合大系统:

$$\begin{aligned}&\mathring{z}_i(t) = \\ &G(z)z_i(t) + H(z)\overline{u}_i(t) + \\ &\sum_{j=1, j\neq i}^{N} D(z)z_j(t) + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} E(z)\overline{u}_j(t),\ t > t_0;\\ &\qquad z_i(t_0) = z_{i0},\quad i = 1, 2, \cdots, N.\end{aligned} \tag{1}$$

其中: $z_i \in R^n$ 和 $\overline{u}_i \in R^m$ 分别为状态向量和控制向量; $G, D: C^1(R^{Nn}) \to \Omega_1 \subset R^{n\times n}$; $H, E: C^1(R^{Nn}) \to \Omega_1 \subset R^{n\times m}$. 假设大系统(1) 在所研究的区域内满足 Lipschitz 条件. 问题是要找到一个控制向量 $\overline{u}$ 使得下列二次型性能指标极小化:

$$\begin{aligned}J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Big\{&z_i^{\mathrm T}(t_f)\overline{F}_i z_i(t_f) + \int_0^{t_f}[z_i^{\mathrm T}(t)\overline{Q}_i z_i(t) + \\ &\overline{u}_i^{\mathrm T}(t)\overline{R}_i\overline{u}_i(t)]\mathrm{d}t\Big\},\end{aligned} \tag{2}$$

其中矩阵 $\overline{F}_i, \overline{Q}_i$ 和 $\overline{R}_i$ 满足通常的状态调节器条件.

大系统(1) 可表示为如下紧凑形式:

$$\mathring{z} = \overline{A}(z)z + \overline{B}(z)\overline{u}. \tag{3}$$

其中

$$z = (z_1^{\mathrm T}, z_2^{\mathrm T}, \cdots, z_N^{\mathrm T})^{\mathrm T},\ \overline{u} = (\overline{u}_1^{\mathrm T}, \overline{u}_2^{\mathrm T}, \cdots, \overline{u}_N^{\mathrm T})^{\mathrm T},$$

$$\overline{A}(z) = \begin{bmatrix} G(z) & D(z) & \cdots & D(z)\\ D(z) & G(z) & \cdots & D(z)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ D(z) & D(z) & \cdots & G(z)\end{bmatrix},$$

$$\overline{B}(z) = \begin{bmatrix} H(z) & E(z) & \cdots & E(z)\\ E(z) & H(z) & \cdots & E(z)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ E(z) & E(z) & \cdots & H(z)\end{bmatrix}.$$

对于式(1) 或(3) 描述的大系统, 考虑 $N_i \times N_i$ 阶非奇异常量矩阵

$$T_i = \begin{bmatrix} I_i & 0 & \cdots & 0 & I_i\\ 0 & I_i & \cdots & 0 & I_i\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & I_i & I_i\\ -I_i & -I_i & \cdots & -I_i & I_i\end{bmatrix},\ i = n, m, \tag{4}$$

其中 I_i 为 i 阶单位矩阵. 令 $z = T_n x$, $\overline{u} = T_m u$, 则大系统(3) 等价于

$$\mathring{x} = A(x)x + B(x)u. \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned}&A(x) = T_n^{-1}\overline{A}(T_n x)T_n = \\ &\mathrm{Block}\text{-}\mathrm{diag}\{A_1(x), \cdots, A_1(x), A_N(x)\},\\ &B(x) = T_n^{-1}\overline{B}(T_n x)T_m = \\ &\mathrm{Block}\text{-}\mathrm{diag}\{B_1(x), \cdots, B_1(x), B_N(x)\}.\end{aligned} \tag{6}$$

并有

$$\begin{aligned}&A_1(x) = G(z) - D(z),\\ &A_N(x) = G(z) + (N-1)D(z),\\ &B_1(x) = H(z) - E(z),\\ &B_N(x) = H(z) + (N-1)E(z).\end{aligned} \tag{7}$$

大系统(5) 可分解为如下 N 个子系统:

$$\begin{aligned}&\mathring{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + f_i(x, u_i),\\ &x_i(t_0) = x_{i0},\quad i = 1, 2, \cdots, N.\end{aligned} \tag{8}$$

其中: $x = (x_1^{\mathrm T}, x_2^{\mathrm T}, \cdots, x_N^{\mathrm T})^{\mathrm T}$, $u^{\mathrm T} = (u_1^{\mathrm T}, u_2^{\mathrm T}, \cdots, u_N^{\mathrm T})^{\mathrm T}$, $f_i: C^1(R^{Nn} \times R^m) \to U_i \subset R^n$, 而

$$\begin{aligned}&A_i = A_1(0), B_i = B_1(0),\quad i = 1, 2, \cdots, N-1;\\ &A_N = A_N(0), B_N = B_N(0).\end{aligned} \tag{9}$$

经过上述简化, 大系统(1) 关于二次型性能指标(2) 的最优控制问题, 可转化为寻求一个控制向量 $\overline{u} = T_m u$ 使得下列二次型性能指标极小化:

$$\begin{aligned}J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Big\{&x_i^{\mathrm T}(t_f)F_i x_i(t_f) + \int_0^{t_f}[x_i^{\mathrm T}(t)Q_i x_i(t) + \\ &u_i^{\mathrm T}(t)R_i u_i(t)]\mathrm{d}t\Big\}\end{aligned} \tag{10}$$

其中: $F_i = T_n^{-1}\overline{F}_i T_n$, $Q_i = T_n^{-1}\overline{Q}_i T_n$, $R_i = T_m^{-1}\overline{R}_i T_m$.

众所周知, 由此问题的最优化的必要条件可导出下列两点边值问题:

$$\begin{aligned}&\mathring{x}_i(t) = A x_i(t) - S_i\lambda_i(t) + f_i(x, u_i),\\ &\qquad t_0 < t \le t_f;\\ &-\mathring{\lambda}_i(t) = Q_i x_i(t) + A_i^{\mathrm T}\lambda_i(t) + \sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}\lambda_j(t),\end{aligned}$$

$$t_0 \le t < t_f;$$
$$x_i(t_0) = x_{i0},\ \lambda_i(t_f) = F_i x_i(t_f),$$
$$i = 1, 2, \cdots, N. \qquad (11)$$

其中：$S_i = B_i R_i^{-1} B_i^{\mathrm{T}}$，$\sigma_{ij} = \partial f_i^{\mathrm{T}} / \partial x_j$。系统的最优控制 $\overline{u}^*$ 可描述为

$$u^*(t) = -R^{-1} B^{\mathrm{T}}(x) \lambda(t),$$
$$\overline{u}^*(t) = T_m u^*(t). \qquad (12)$$

其中

$$R = \mathrm{Block\text{-}diag}\{R_1, \cdots, R_N\},$$
$$\lambda = [\lambda_1^{\mathrm{T}}, \cdots, \lambda_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}. \qquad (13)$$

方程(11)是由 N 个具有非线性耦合的子问题构成的 Nn 阶大规模两点边值问题。对于一般的非线性函数向量 f_i，其解析解是不存在的。另外，由于互联大系统通常具有高维数特点，即使大规模互联非线性两点边值问题(11)理论上可解，其计算工作量也是不能容忍的。因此，寻找求解非线性大规模互联两点边值问题(11)近似解的有效方法是非常必要的。

3 预备知识

考虑如下可分解为 N 个子系统的非线性互联时变自治大系统：

$$\dot{x}_i(t) = G_i(t) x_i(t) + f_i(x),\ t_0 < t \le t_f;$$
$$x_i(t_0) = x_{i0},\ i = 1, 2, \cdots, N. \qquad (14)$$

其中：$x_i \in R^{n_i}$ 为状态向量，$f_i: C^1(R^{Nn_i}) \to U_i \subset R^{n_i}$，$G_i(t)$ 为适当维数的连续时变矩阵。假设大系统(14)在所研究的区域内满足 Lipschitz 条件。

定义函数向量序列 $\{x_i^{(k)}(t)\}$ 为如下向量积分方程族的解序列：

$$x_i^{(0)}(t) = \Phi_i(t, t_0) x_i(t_0),$$
$$x_i^{(k)}(t) =$$
$$\Phi_i(t, t_0) x_i(t_0) + \int \Phi_i(t, \tau) f_i(x^{(k-1)}(\tau))\, \mathrm{d}\tau;$$
$$t_0 < t \le t_f,\ i = 1, 2, \cdots, N,\ k = 1, 2, \cdots. \qquad (15)$$

其中 $\Phi_i(t, t_0)$ 为时变矩阵 $G_i(t)$ 的状态转移矩阵。

引理 1 向量积分方程族(15)的解序列一致收敛于时变非线性大系统(14)的解。

证明 将 $\{x_i^{(k)}(t)\}$ 视为 $C^N[t_0, t_f]$ 的一个序列，由式(15)得

$$x_i^{(1)}(t) - x_i^{(0)}(t) =$$
$$\int \Phi(t, \tau) f_i(x^{(0)}(\tau))\, \mathrm{d}\tau \qquad (16)$$

令 $a = \sup\limits_{t_0 \le t \le t_f} \|\Phi_i(t, t_0)\|$，$b = \sup\limits_{t_0 \le t \le t_f} \|x^{(0)}(t)\|$。注意到大系统(14)在所研究的区域内满足 Lipschitz 条件，即存在 $c > 0$，$h > 0$，使得下列不等式成立：

$$\|f_i(x)\| \le c\|x\|,$$
$$\|f_i(x) - f_i(y)\| \le h\|x - y\|,$$
$$\forall x \subset U,\ y \in U. \qquad (17)$$

从而可得

$$\|x_i^{(1)}(t) - x_i^{(0)}(t)\| \le$$
$$\int ac\|x^{(0)}(\tau)\|\, \mathrm{d}\tau \le abc \int \mathrm{d}\tau = adc(t - t_0),$$
$$t_0 < t \le t_f,\ i = 1, 2, \cdots, N. \qquad (18)$$

又由式(15)和不等式(17)得

$$\|x_i^{(2)}(t) - x_i^{(1)}(t)\| \le$$
$$ah \int \|x^{(1)}(\tau) - x^{(0)}(\tau)\|\, \mathrm{d}\tau \le$$
$$ah \sum_{j=1}^{N} \int_0 \|x_j^{(1)}(\tau) - x_j^{(0)}(\tau)\|\, \mathrm{d}\tau \le$$
$$ah \sum_{j=1}^{N} \int_0 abc(t - t_0)\, \mathrm{d}\tau \le N a^2 bch \frac{(t - t_0)^2}{2},$$
$$t_0 < t \le t_f,\ i = 1, 2, \cdots, N. \qquad (19)$$

同理，可求得

$$\|x_i^{(k)}(t) - x_i^{(k-1)}(t)\| \le N^{k-1} a^k bch^{k-1} \frac{(t - t_0)^k}{k!},$$
$$t_0 < t \le t_f,\ i = 1, 2, \cdots, N. \qquad (20)$$

当 k 充分大时，对任意的正整数 M，有

$$\|x_i^{(k+M)}(t) - x_i^{(k-1)}(t)\| \le$$
$$\sum_{j=k}^{k+M} N^{j-1} a^j bch^{j-1} \frac{(t - t_0)}{j!} \le$$
$$\frac{bc(Nah(t - t_0))^k}{Nhk!} \Big(1 + Nah(t - t_0) +$$
$$\frac{(Nah(t - t_0))^2}{2!} + \cdots + \frac{(Nah(t - t_0))^M}{M!}\Big) \le$$
$$\frac{bc(Nah(t - t_0))^k}{Nhk!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(Nah(t - t_0))^j}{j!} =$$
$$\frac{bc(Nah(t - t_0))^k}{Nhk!} \mathrm{e}^{Nah(t - t_0)},$$
$$t_0 < t \le t_f,\ i = 1, 2, \cdots, N.$$

从而，有 $\lim\limits_{k \to \infty} \|x_i^{(k+M)}(t) - x_i^{(k)}(t)\| = 0$，$\forall M > 0$，$t_0 < t \le t_f$，$i = 1, 2, \cdots, N$。即 $\{x_i^{(k)}\}$ 是 $C^N[t_0, t_f]$ 中的 Cauchy 序列，故该序列是一致收敛的。因为 M 是任意的，所以这个序列的极限是大系统(14)的解。□

4 最优控制的逐次逼近过程

考虑下列线性两点边值问题族：

$$\dot{x}_i^{(k)}(t) = A_i x_i^{(k)}(t) - S_i \lambda_i^{(k)}(t) +$$
$$f_i(x^{(k-1)}, u_i^{(k-1)}),\ t_0 < t \le t_f;$$
$$-\dot{\lambda}_i^{(k)}(t) = Q_i x_i^{(k)}(t) + A_i^{\mathrm{T}} \lambda_i^{(k)}(t) +$$
$$\sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij}^{(k-1)} \lambda_j^{(k-1)},\ t_0 \le t < t_f;$$
$$x_i^{(k)}(t_0) = x_{i0},\ \lambda_i^{(k)}(t_f) = F_i x_i^{(k)}(t_f),$$
$$i = 1, 2, \cdots, N,\ k = 1, 2, \cdots. \qquad (21)$$

其中: $f_i(x^{(0)}, u^{(0)}) = 0$, $\sigma_{ij}^{(k-1)} = [\partial f_j^{\mathrm{T}}/\partial x_i]_{x_i = x_i^{(k-1)}}$, $\lambda^{(0)} = 0$. 并定义控制向量序列

$$u^{(k)}(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}(x^{(k)})\lambda^{(k)}(t),$$
$$\overline{u}^{(k)}(t) = T_m u^{(k)}(t),\ t_0 < t \le t_f,$$
$$i = 1, 2, \cdots, N,\ k = 1, 2, \cdots. \tag{22}$$

定理 1　满足线性两点边值问题族(21) 的控制向量序列(22) 一致收敛于非线性大系统(1) 关于性能指标(2) 的最优控制 $\overline{u}^*$.

证明　先证明两点边值问题族(21) 的可解性. 当 $k = 1$ 时, 由式(21) 可得

$$\mathring{x}_i^{(1)}(t) = A_i x_i^{(1)}(t) - S_i\lambda_i^{(1)}(t);$$
$$-\dot{\lambda}_i^{(1)}(t) = Q_i x_i^{(1)}(t) + A_i^{\mathrm{T}}\lambda_i^{(1)}(t),$$
$$t_0 < t \le t_f;$$
$$x_i^{(1)}(t_0) = x_{i0},\ \lambda_i^{(1)}(t_f) = F_i x_i(t_f),$$
$$i = 1, 2, \cdots, N.$$

这是一个线性齐次两点边值问题. 众所周知, 令 $\lambda_i^{(1)} = P_i x_i^{(1)}$, 则 $x_i^{(1)}$ 可由下列方程求解:

$$\mathring{x}_i^{(1)}(t) = (A_i - S_i P_i(t))x_i^{(1)}(t),\ t_0 < t \le t_f;$$
$$x_i^{(1)}(t_0) = x_{i0},\ i = 1, 2, \cdots, N.$$

其中 P_i 是下列矩阵 Riccati 微分方程的唯一正定解

$$\mathring{P}_i(t) + P_i(t)A_i + A_i^{\mathrm{T}}P_i(t) -$$
$$P_i(t)S_iP_i(t) + Q_i = 0,\ t_0 \le t < t_f;$$
$$P_i(t_f) = F_i,\ i = 1, 2, \cdots, N. \tag{23}$$

由 $x_i^{(1)}$ 可以方便地求出 $u_i^{(1)}$, $\lambda_i^{(1)}$, $f_i(x^{(1)}, u_i^{(1)})$ 和 $\sigma_{ij}^{(1)}$.

假设在第 $k-1$ 次迭代时, 函数向量 $x_i^{(k-1)}$, $\lambda_i^{(k-1)}$ 和 $u_i^{(k-1)}$ 已经求出. 由此, 可方便地求出 $f_i(x^{(k-1)}, u_i^{(k-1)})$ 和 $\sigma_{ij}^{(k-1)}$. 在第 k 次迭代时, 由式(21) 得

$$-\dot{\lambda}_i^{(k)}(t) =$$
$$Q_i x_i^{(k)}(t) + A_i^{\mathrm{T}}\lambda_i^{(k)}(t) + \sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}^{(k-1)}\lambda_j^{(k-1)},$$
$$\mathring{x}_i^{(k)}(t) =$$
$$A_i x_i^{(k)}(t) - S_i\lambda_i^{(k)}(t) + f_i(x^{(k-1)}, u^{(k-1)}),$$
$$x_i^{(k)}(t_0) = x_{i0},\ \lambda_i^{(k)}(t_f) = F_i x_i(t_f),$$
$$i = 1, 2, \cdots, N. \tag{24}$$

注意到 $f_i(x^{(k-1)}, u3_i^{(k-1)})$, $\lambda_j^{(k-1)}$ 和 $\sigma_{ij}^{(k-1)}$ 已知, 所以式(24) 是一个线性非齐次两点边值问题. 令

$$\lambda_i^{(k)}(t) = P_i(t)x_i^{(k)}(t) + g_i^{(k)}(t),$$
$$i = 1, 2, \cdots, N. \tag{25}$$

则将式(25) 代入(24), 得共态向量微分方程族和状态向量微分方程族分别为

$$\mathring{g}_i^{(k)}(t) =$$
$$(P_i(t)S_i - A_i^{\mathrm{T}})g_i^{(k)}(t) - P_i(t)f_i(x^{(k-1)}, u_i^{(k-1)}) -$$
$$\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}^{(k-1)}\lambda_j^{(k-1)},\ t_0 \le t < t_f;$$
$$g_i^{(k)}(t_f) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, N,\ k = 1, 2, \cdots. \tag{26}$$
$$\mathring{x}_i^{(k)}(t) =$$
$$(A_i - S_iP_i(t))x_i^{(k)}(t) - S_i g_i^{(k)}(t) +$$
$$f_i(x^{(k-1)}, u_i^{(k-1)}),\ t_0 < t \le t_f;$$
$$x_i^{(k)}(0) = x_{i0},\ i = 1, 2, \cdots, N,\ k = 1, 2, \cdots. \tag{27}$$

对微分方程(26) 反向积分可求出 $g_i^{(k)}$. 将 $g_i^{(k)}$ 代入式(27) 可解出 $x_i^{(k)}$, 从而由式(22) 可求出 $u_i^{(k)}$. 再由 $x_i^{(k)}$ 和 $u_i^{(k)}$ 可方便地求出 $\lambda_i^{(k)}$, $f_i(x^{(k)}, u_i^{(k)})$ 和 $\sigma_{ij}^{(k)}$. 所以两点边值问题族(21) 是可解的.

下面证明两点边值问题族(21) 解序列的一致收敛性.

由引理 1 知, 当 $k \to \infty$ 时, 状态向量微分方程族(27) 和共态向量微分方程族(26) 的解是一致收敛的. 从而, 两点边值问题族(21) 的解序列是一致收敛的. 再由引理 1 知, 两点边值问题族(21) 的解序列一致收敛于大规模非线性互联两点边值问题(11) 的解. 由式(22) 知, $\{\overline{u}^{(k)}\}$ 也是一致收敛的, 且一致收敛于非线性大系统(1) 的最优控制 $\overline{u}^*$, 即

$$u^*(t) = \lim_{k\to\infty}u^{(k)}(t) =$$
$$-R^{-1}\lim_{k\to\infty}B^{\mathrm{T}}(x^{(k)})[P(t)x(t) + g^{(k)}(t)];$$
$$\overline{u}^*(t) = T_m u^*(t),\ t_0 \le t \le t_f. \tag{28}$$

其中

$$P = \mathrm{Block\text{-}diag}\{P_1, \cdots, P_N\},$$
$$g^{(k)} = [g_1^{(k)\mathrm{T}}, \cdots, g_N^{(k)\mathrm{T}}]^T.$$

□

实际上无法求得 $k \to \infty$ 时该问题的解. 实际应用中, 可在式(28) 中用 $k = L$ 替代 $k \to \infty$, 即将 $g_i^{(k)}$ 和 $\partial f^{\mathrm{T}}/\partial\overline{u}^{(k)}$ 第 L 次的结果近似为它的极限, 从而得到非线性大系统(1) 关于性能指标(2) 的次优控制律

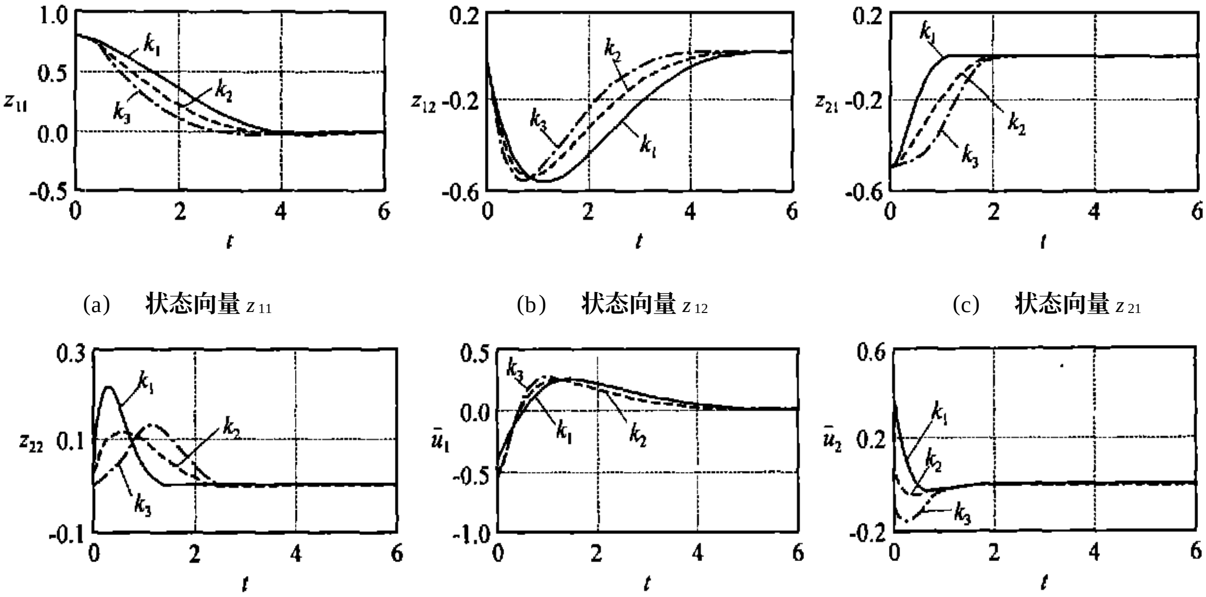
$$\overline{u}_{sL}(t) = \overline{u}^*(t) =$$
$$-T_mR^{-1}B^{\mathrm{T}}(x^{(L)})[P(t)T_n^{-1}z(t) + g^{(L)}(t)],$$
$$t_0 \le t \le t_f. \tag{29}$$

注 1　注意到式(29) 中的 z 是 $k \to \infty$ 时的精确解, 只有 $g^{(L)}$ 和 $B^{\mathrm{T}}(x^{(L)})$ 是用第 L 次逼近的结果代替它的极限 g 和 $B^{\mathrm{T}}(x)$, 因此该次优控制律 $\overline{u}_{sL}$ 比 $\overline{u}^{(L)}$ 更接近于最优控制 $\overline{u}^*$.

注 2　在性能指标(2) 中, 当终端时间 t_f 充分大时, 可以认为 $t_f \to \infty$, 因此该方法也适合于 $t_f \to \infty$ 的情形. 这时性能指标泛函(2) 变为

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_0^{\infty}[z_i^{\mathrm{T}}(t)\overline{Q}_iz_i(t) + \overline{u}_i^{\mathrm{T}}(t)\overline{R}_i\overline{u}_i(t)]\mathrm{d}t$$

而矩阵 Riccati 微分方程(23) 变为矩阵 Riccati 代数方程 $P_iA_i + A_i^{\mathrm{T}}P_i - P_iS_iP_i + Q_i = 0$, $i = 1, 2, \cdots, N$. 其中解 P_i 是唯一的正定常量矩阵.



(a)　状态向量 z_{11}　　(b)　状态向量 z_{12}　　(c)　状态向量 z_{21}

(d)　状态向量 z_{22}　　(e)　控制向量 $\overline{u_1}$　　(f)　控制向量 $\overline{u_2}$

图 1　$k = 1, 2, 3$ 时系统的仿真曲线

5　实例仿真

考虑如下具有两个二阶子系统的非线性相似组合大系统:

$$\begin{bmatrix}\dot z_{11}\\ \dot z_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 2\\ z_{12}-1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_{11}\\ z_{12}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1+z_{11}\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_{21}\\ z_{22}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 2+z_{11}\end{bmatrix}\overline{u_1} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\overline{u_2},$$

$$\begin{bmatrix}\dot z_{21}\\ \dot z_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 2\\ z_{12}-1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_{21}\\ z_{22}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1+z_{11}\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_{11}\\ z_{12}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 2+z_{11}\end{bmatrix}\overline{u_2} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\overline{u_1}. \tag{30}$$

性能指标为 $J = \dfrac{1}{2}\int(z_{11}^2 + z_{12}^2 + z_{21}^2 + z_{22}^2 + \overline{u_1^2} + \overline{u_2^2})\,\mathrm{d}t$

将模型简化为式(8) 所示的形式, 即

$$\begin{bmatrix}\dot x_{11}\\ \dot x_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{12}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1+x_{11}+x_{21}\end{bmatrix}u_1 + \begin{bmatrix}-x_{11}x_{12} - x_{12}x_{21}\\ x_{11}x_{12} + x_{11}x_{22}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\dot x_{21}\\ \dot x_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 3\\ -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{21}\\ x_{22}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 3+x_{11}+x_{21}\end{bmatrix}u_2 + \begin{bmatrix}x_{11}x_{22} + x_{21}x_{22}\\ x_{12}x_{21} + x_{21}x_{22}\end{bmatrix}.$$

性能指标可化为式(10) 所示的形式, 即

$$J = \frac{1}{2}\int(x_{11}^2 + x_{12}^2 + x_{21}^2 + x_{22}^2 + u_1^2 + u_2^2)\,\mathrm{d}t$$

当 $k = 1, 2, 3$ 时, $\overline{u_1}, z_{11}, z_{12}, \overline{u_2}, z_{21}, z_{22}$ 的仿真结果如图 1 所示.

由图 1 可以看出, 迭代次数越多, 控制效果越好. 经 3 次迭代控制得到的相似组合大系统(30) 的性能指标分别为 $J_1 = 1.6740, J_2 = 1.3879, J_3 = 1.3484$. 显然, $J_1 > J_2 > J_3$. 如果取 $\epsilon = 0.05$, 则有 $|(J_3 - J_2)/J_3| \doteq 0.0293 < \epsilon$, 即经过 3 次迭代可以达到控制精度要求. 从而可取 $\overline{u_{s3}}$ 作为该相似组合大系统的次优控制律.

6　结　语

本文针对一类形式上类似于文献[5]的仿射非线性相似组合大系统, 提出了一种最优控制律的逐次逼近设计算法. 利用该算法将求解高阶耦合的非线性两点边值问题简化为求解一族解耦的线性两点边值问题序列. 证明了该线性两点边值问题序列的解一致收敛于非线性互联动态大系统的最优控制, 并提出了基于系统控制精度的次优控制律的设计算法. 进一步的研究是将本文算法应用于其他相似组合大系统的最优控制律的近似设计.

(下转第 90 页)

Strategic Management J, 1993, 14(S): 95-112.

[3] Henk W Volberda. *Building the Flexible Firm* [M]. New York: Oxford University Press, 1998.

[4] Leonard-Barton D. *Wellsprings of Knowledge: Building and Sustaining the Sources of Innovation*[M]. Boston: Harvard Business School Press, 1995.

[5] 田红云. 论企业核心刚性的成因及其超越[J]. *生产力研究*, 2003, 18(4): 273-275.
(Tian H Y. Research on the cause of formation of core rigidities and it's surpassing [J]. *Productivity Study*, 2003, 18(4): 273-275.)

[6] 王锡秋. 基于顾客价值的企业能力研究[D]. 西安: 西安交通大学, 2003.

[7] Coyne K P, Hall S J D, Clifford. Is your core competence a mirage? [J]. *The McKinsey Quarterly*, 1997, 1(S): 40-54.

[8] Prahalad C K, Hamel G. The core competency of the corporation [J]. *Harvard Business Review*, 1990, 68(3): 79-91.

[9] Woodruff R B. Customer value: The nest source for competitive advantage [J]. *J of the Academy of Marketing Science*, 1997, 25(2): 139-153.

[10] Gale B T. *Managing Customer Value: Creating Quality and Service That Customer Can See*[M]. New York: The Free Press, 1994.

[11] 陆家骝. 我们必须捍卫"劳动价值论"吗? [J]. *当代经济科学*, 1995, 17(1): 23-26.
(Lu J L. Will we have to championship the labour value theory? [J]. *Modern Economic Science*, 1995, 17(1): 23-26.)

[12] 王锡秋, 席酉民. 基于顾客价值的核心能力评估[A]. *价值工程与价值管理的发展: 中国与世界*[C]. 北京: 机械工业出版社, 2003: 76-80.

[13] 席德斯特, 斯左姆, 白瑞克, 等. *经济学家数学手册*[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2001.

(上接第 86 页)

参考文献(References)

[1] 刘永清, 唐功友. *大型动力系统的理论与应用: 滞后, 稳定与控制*[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1992.

[2] 张嗣瀛. 复杂控制系统的对称性和相似性结构[J]. *控制理论与应用*, 1994, 11(2): 231-237.
(Zhang S Y. Symmetric and similar structures of complex control systems [J]. *Control Theory & Applications*, 1994, 11(2): 231-237.)

[3] Yang G H, Zhang S Y. Structural properties of large-scale systems possessing similar structures [J]. *Automatica*, 1995, 31(7): 1011-1017.

[4] Yang G H, Zhang S Y. Stabilizing controllers for uncertain symmetric composite systems [J]. *Automatica*, 1995, 31(2): 337-340.

[5] 姜斌, 刘晓平, 张嗣瀛. 线性相似组合系统的特性分析[J]. *控制理论与应用*, 1994, 11(4): 497-501.
(Jiang B, Liu X P, Zhang S Y. Character analysis for linear composite systems with similarity [J]. *Control Theory & Applications*, 1994, 11(4): 497-501.)

[6] 张颖伟, 王剑, 张嗣瀛. 一类相似组合大系统的线性反馈镇定[J]. *控制与决策*, 2000, 15(4): 455-457, 468.
(Zhang Y W, Wang J, Zhang S Y. Linear state feedback stabilization for a class of large-scale systems with similar composite structure [J]. *Control and Decision*, 2000, 15(4): 455-457, 468.)

[7] Yan X G, Lam J, Dai G Z. Decentralized robust control for nonlinear large-scale systems with similarity [J]. *Computers & Electrical Engineering*, 1999, 25(3): 169-179.

[8] 陈兵, 井元伟, 张嗣瀛. 一类非线性组合系统的鲁棒分散控制器的设计[J]. *自动化学报*, 1999, 25(5): 677-680.
(Chen B, Jing Y W, Zhang S Y. Design of decentralized robust controller for a class of nonlinear composite systems with similarity [J]. *ACTA Automatica Sinica*, 1999, 25(5): 677-680.)

[9] 吕鹏飞, 唐功友, 贾晓波, 等. 非线性时滞系统次优控制的逐次逼近法[J]. *控制与决策*, 2004, 19(2): 230-234.
(Lu P F, Tang G Y, Jia X B, et al. Successive approximation approach of suboptimal control for nonlinear time-delay systems[J]. *Control and Decision*, 2004, 19(2): 230-234.)