

文章编号: 1001-0920(2005)01-0096-03

## 关于波动率与投资概率之间关系的进一步研究

孟 力<sup>1,2</sup>, 孙 威<sup>2</sup>, 汪定伟<sup>1</sup>

(1. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004; 2 沈阳工业大学 管理学院, 辽宁 沈阳 110023)

**摘 要:** 对项目价值波动率与投资概率之间的关系进行了深入研究 通过建立实物期权数学模型, 将项目投资临界触发值与项目价值两者有机地融入投资概率计算中, 并利用 Matlab 语言仿真计算, 说明了波动率和有关参数对投资概率的影响 结果表明, 当波动率  $\sigma$  较小时, 投资概率会随  $\sigma$  的增加而增加; 当  $\sigma$  的值较大时则情况相反 所提出的观点对当前我国投资实践活动具有一定的理论指导意义

**关键词:** 不确定性; 实物期权; 投资概率; 期权定价

**中图分类号:** F235.2      **文献标识码:** A

## Further research of relationship between uncertainty and investment

MENGLI<sup>1,2</sup>, SUNWEI<sup>2</sup>, WANG Dingwei<sup>1</sup>

(1. School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2 School of Management, Shenyang University of Technology, Shenyang 110023, China Correspondent: MENGLI, E-mail: menliweida@vip.sina.com)

**Abstract:** The relationship between uncertainty and investment probability is studied through real option model, which involved investment critical trigger and project earning. The influence of project earning volatility on investment probability is illustrated by using software Matlab. When project earning volatility being lower than certain level, an increasing in uncertainty will increase the investment probability. When volatility higher than certain level, an increasing in uncertainty will decrease the investment probability. The result has a useful contribution to present investment practice under uncertainty.

**Key words:** uncertainty; real option; investment probability; option price

### 1 引 言

市场环境的变化, 管理制度的改革以及人们心理等诸多因素都对投资活动产生影响, 因此当前我国投资理论中的一个重要研究课题就是如何确定不确定条件下的投资问题. 对于这一问题, 传统投资理论方法如净现值 NPV 法, 由于事先一些假设而忽略了许多重要的现实影响因素, 在实际应用中存在难以解决的问题和难以说明的现象. 20 世纪后期, 以金融期权为理论基础的实物期权方法为解决这一问题提供了科学的理论基础<sup>[1-5]</sup>.

实物期权是金融期权理论在实物资产期权上的扩展. 从金融期权向实物期权转化需要一种将金融市场的规则引入企业内部战略投资决策之中的思维方式. 在确定投资机会价值和最优投资策略时, 应以市场为基础, 采用灵活、多变的投资策略, 以使项目价值获得最大化<sup>[6-10]</sup>.

研究实物期权最优投资问题, 其核心关键是深刻分析项目价值波动率  $\sigma$  与投资概率  $P$  之间的关系<sup>[11]</sup>. 本文通过建立实物期权数学模型, 将项目投资的临界触发值  $X^*$  和项目价值  $X$  两者有机地融入

收稿日期: 2003-11-20; 修回日期: 2004-03-18

基金项目: 国家自然科学基金项目 (60084003, 70171056).

作者简介: 孟力 (1961—), 男, 辽宁沈阳人, 副教授, 博士生, 从事金融工程等研究; 汪定伟 (1948—), 男, 江西彭泽人, 教授, 博士生导师, 从事系统工程、建模与优化等研究.

投资概率计算, 利用 Matlab 软件仿真计算, 说明了波动率和其他各参数的改变对投资概率的影响 本文的观点对我国当前投资实践活动具有一定的理论指导意义

## 2 模型描述

实物期权理论认为, 项目的价值由于受到多种因素的影响, 其变化规律服从几何布朗运动 因此, 它的随机过程可用如下数学模型描述:

$$dx_t = \mu x_t dt + \alpha x_t dz_t \quad (1)$$

式中:  $X_t$  为  $t$  时刻项目价值;  $\mu$  为项目价值期望瞬间增长率;  $\sigma$  为项目价值波动的标准差;  $dt$  为时间长度;  $dz_t$  为标准的几何布朗运动

$$dz_t = \epsilon \sqrt{dt},$$

其中:  $\epsilon \sim N(0, 1), E(dz_t) = 0$

在投资过程中, 企业可在任意时间点上进行投资 经归一化处理, 企业的投资可假设为: 成本为  $I$ , 市场的风险利率为  $r$ , 项目价值与市场风险证券相关系数为  $\rho$ , 市场价格的风险利率为  $\lambda$

基于上述描述, 项目投资可被看作研究美式期权问题, 最优投资就是研究在一定时间点上投资, 使其项目的期权大于延迟投资所具有的期权 这一问题的核心是研究项目价值波动率  $\sigma$  与投资概率  $P$  之间的关系

## 3 项目投资价值和临界触发值研究

正如上述分析所指出: 项目价值在不确定条件下是随机变化的, 投资具有机会期权价值 当项目价值达到一定最佳水平时, 即临界触发值时企业应立即投资, 此时可获得最大期权价值 应用资产组合无套利原则和伊藤定理, 推导计算得出:

项目的实物期权价值

$$F(x) = AX^\alpha, \quad (2)$$

项目投资临界触发值

$$X^* = \frac{\alpha(Y + \lambda\rho\sigma - \mu)}{\alpha - 1}, \quad (3)$$

当  $X = X^*$  时应投资 式中

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\mu - \lambda\rho\sigma}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu - \lambda\rho\sigma}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2Y}{\sigma^2}}, \quad (4)$$

$$A = \frac{(X^*)^{1-\alpha}}{(Y + \lambda\rho\sigma - \mu)\alpha}. \quad (5)$$

观察式 (3) 可发现,  $\sigma$  的增加会引起  $X^*$  的增加, 使投资的概率降低; 然而,  $\sigma$  增加的同时也意味着  $X$  到达  $X^*$  的可能性变大, 即使得投资的概率加大 因此, 有必要就  $\sigma$  的变化范围对投资概率的影响进行全面深入的分析

## 4 项目投资概率

项目价值达到临界触发值时, 企业应立即投资 在给定项目价值波动率  $\sigma$  下, 最优投资概率为

$$\text{Prob}(X > X^*) = \Phi\left(\frac{\ln(x_0/x^*) + (\mu - 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \left(\frac{x^*}{x_0}\right)^{2\mu/(\sigma^2-1)} \Phi\left(\frac{\ln(x_0/x^*) - (\mu - 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \quad (6)$$

这里:  $X_0$  为 0 时刻的项目价值,  $\Phi(\cdot)$  为标准正态分布 将  $X^*$  用式 (3) 代替, 则有

$$\text{Prob}(\text{Inv}) = \Phi\left(\frac{\ln x_0(1 - 1/\alpha) + (\mu - 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \left(\frac{\rho + \lambda\rho\sigma - \mu}{x_0(1 - 1/\alpha)}\right)^{2\mu/(\sigma^2-1)} \times \Phi\left(\frac{\ln x_0(1 - 1/\alpha) - (\mu - 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \quad (7)$$

由于  $dp/d\sigma$  无法用解析式表达, 下面用数值方法研究波动率的增加对投资概率的影响

## 5 投资概率数值分析

假设取:  $\mu = 0, Y = 10\%, \rho = 0.7, \lambda = 0.4, X_0 = 0.1, T = 5 \text{ a}$  本文主要关注波动率对投资概率的影响, 故取  $\mu = 0, \rho = 0.7$  表明风险资产的组合与项目价值不完全相关

用 Matlab 软件仿真数值计算投资概率  $P$  随项目价值波动率  $\sigma$  变化情况如图 1 所示, 图中参数:  $\mu = 0, Y = 10\%, \rho = 0.7, \lambda = 0.4, X_0 = 0.1, T = 5 \text{ a}$

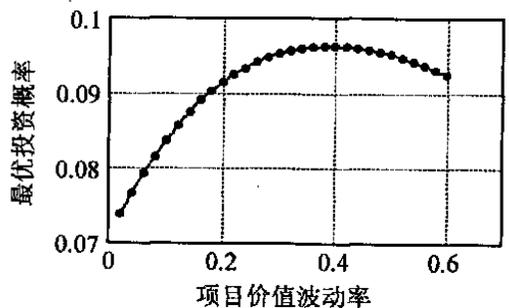


图 1 波动率  $\sigma$  与投资概率  $P$  之间关系

从图 1 中可以看到, 初始阶段  $\sigma$  小于 0.37 时, 概率  $P$  是  $\sigma$  的增函数; 当  $\sigma$  大于 0.37 时, 概率  $P$  是  $\sigma$  的减函数 因此, 波动率  $\sigma$  与概率  $P$  之间是非线性关系

## 6 参数讨论

1) 由式(7)可以得到, 投资概率 $P$ 随 $\lambda$ ,  $\rho$ 和 $\gamma$ 值的增加而增加, 随 $\mu$ 和 $T$ 值的减少而增加

2) 投资临界触发值随项目价值波动率增加而增加 仿真计算结果如图2所示, 图中参数:  $\mu = 0$ ,  $r = 10\%$ ,  $\rho = 0.7$ ,  $\lambda = 0.4$

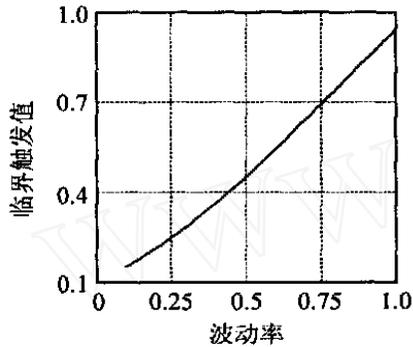


图2 波动率 $\sigma$ 与临界触发值 $x^*$ 之间关系

3) 投资临界触发值随项目价值波动率和无风险利率增加而增加 三维仿真计算结果如图3所示, 图中参数:  $\mu = 0$ ,  $\rho = 0.7$ ,  $\lambda = 0.4$

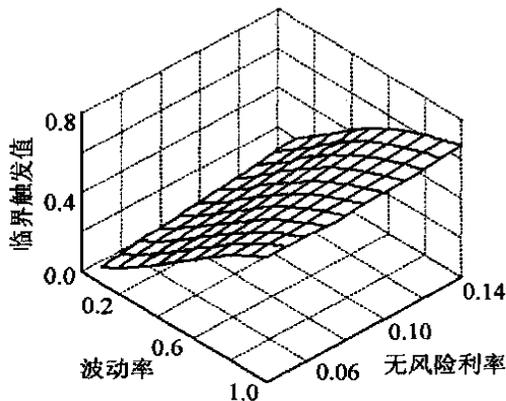


图3 波动率 $\sigma$ 和无风险利率 $\gamma$ 与临界触发值 $x^*$ 之间的关系

## 7 结论

本文对实物期权最优投资核心关键问题(项目价值波动率 $\sigma$ 与投资概率 $P$ 之间的关系)进行了深入分析和研究 通过建立实物期权数学模型, 将项目投资的临界触发值 $x^*$ 和项目价值 $x$ 两者有机地融入投资概率计算中, 利用Matlab软件仿真计算说明了波动率和模型中有关参数的变化对投资概率的影响 结果表明, 在波动率 $\sigma$ 值较小时, 投资概率是波

动率的增函数; 反之,  $\sigma$ 值较大时, 投资概率是减函数 这对当前我国投资实践活动具有一定的理论指导意义

## 参考文献(References)

- [1] Dixit A K, Pindyck R S. The option approach to investment [J]. *Harvard Business Review*, 1995, 73(6): 103-105
- [2] Cox J S, Ross R, Rubinstein M. Option pricing: A simplified approach [J]. *J of Financial Economics*, 1979, 3(7): 229-263
- [3] Amram M, Kulatilaka N. *Real Options* [M]. Beijing: China Machine Press, 2001: 201-216
- [4] Galitz L. *Financial Engineering* [M]. Beijing: Economy Science Press, 1998: 309-323
- [5] Abel A B. Options, the value of capital and investment [J]. *Quarterly J of Economics*, 1996, 111(3): 753-778
- [6] 孟力, 王崇喜, 汪定伟. 基于嵌入期权现金流量图的实物期权分析与研究 [J]. *东北大学学报(自然科学版)*, 2003, 24(9): 889-892  
(Meng L, Wang C X, Wang D W. Real option analysis based on embedded option cash flow chart [J]. *J of Northeastern University (Natural Science)*, 2003, 24(9): 889-892)
- [7] 宋逢明. *金融工程原理—无套利均衡分析* [M]. 北京: 清华大学出版社, 1999: 96-124
- [8] 孟力, 张爱玲, 汪定伟. 不确定环境下项目评估的期权决策树分析方法 [J]. *控制工程*, 2004, 11(1): 43-46  
(Meng L, Zhang A L, Wang D W. Option-decision-tree method of project evaluation under uncertainty environment [J]. *J of Control Engineering*, 2004, 11(1): 43-46)
- [9] Dixit A K. Entry and exit decisions under uncertainty [J]. *J of Political Economy*, 1989, 97(1): 620-638
- [10] 孟力, 王崇喜, 汪定伟, 等. 企业并购投资中二叉树模型、仿真计算分析与研究 [J]. *武汉理工大学学报*, 2004, 26(1): 116-120  
(Meng L, Wang C X, Wang D W. Research on binomial tree model and digital simulation of M&A [J]. *J of the Wuhan University of Technology*, 2004, 26(1): 116-120)
- [11] Caballero R J. On the sign of the investment—uncertainty relationship [J]. *American Economic Review*, 1991, 81(2): 279-288