

文章编号: 1001-0920(2005)01-0106-03

基于扩张状态观测器的混沌系统同步

祁荣宾, 罗秋滨, 冯汝鹏

(哈尔滨工业大学 控制科学与工程系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 利用 n 阶驱动系统的标量输出信号及其连续的 $n-1$ 阶导数作为状态变量, 得到一个具有 Brunow sky 规范形式的 n 阶重构系统. 对该重构系统设计状态观测器, 并将其作为响应系统. 此时只需传输由输出信号与其连续的 n 阶导数的线性组合构成的标量信号, 便可实现混沌系统的同步. 当传输信号仅为标量输出信号时, 还可通过对重构系统设计扩张状态观测器, 挖掘可测同步误差中所隐含的信息来实现混沌系统的同步. 对 Rossler 系统的仿真证明了该方法的有效性.

关键词: 状态观测器; 混沌; 同步

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Synchronizing chaos based on the extended state observer

Q I Rong-bin, LUO Q iu-bin, FEN G Ru-peng

(Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China
Correspondent: Q I Rong-bin, E-mail: rbqi@163.com)

Abstract: An n -order reconstructed system is designed in Brunow sky canonical form by using a scalar output signal of n -order driving system and its successively $n-1$ order derivatives to reconstruct state variables. A state observer is designed for the reconstructed system and regarded as the response system. Synchronizing chaos is realized via only transmitting scalar signal consisting of output signal and its successively n order derivatives. When the transmitted signal is only scalar output signal, synchronizing chaos is realized via designing the extended state observer for reconstructed system and collecting the information wrapped in observable synchronizing error. The simulation result of Rossler system manifests the effectiveness of this method.

Key words: state observer; chaos; synchronization

1 引言

在两个完全相同的混沌系统中, 当它们的初始条件有一微小差异时, 两系统的运动轨迹在同一相空间将会变得毫不相关. 因此, 许多人认为混沌系统要想达到同步似乎是完全不可能的. 然而 Pecora 和 Carroli^[1] 提出的驱动-响应同步方案改变了这一看法, 使得混沌同步的研究成为广泛关注的热点之一. 在众多同步方案中, 基于观测器的同步方案将响应系统设计成驱动系统的观测器形式, 从而使得混沌同步的设计更灵活、更系统. 但此方法要求驱动信号包含驱动系统中所有的非线性项, 甚至要求驱动系统的所有状态变量都能观测到^[2,3]. 文献[4,5]中提

出的观测器同步方案, 由于条件比较苛刻, 实际混沌系统很难满足. 文献[6~9]中分别给出了混沌系统为连续和离散时的基于观测器的设计方法, 但都要求驱动系统中含有的非线性部分仅是输出的函数.

混沌的同步与保密通信密切相关, 在响应端能够使用的信息只有信道中传输的信号和响应端的可测变量. 为了提高保密性能和节省信道资源, 信道中应尽量包含较少的发送信息资源并使用标量传输信号.

针对上述同步观测器方法的局限性和满足保密通信的要求, 本文提出了基于重构系统的状态观测器和扩张状态观测器实现混沌系统的同步. 采用该

收稿日期: 2004-01-04; 修回日期: 2004-04-06

作者简介: 祁荣宾(1974—), 女, 黑龙江哈尔滨人, 博士生, 从事混沌优化、混沌控制与同步等研究; 冯汝鹏(1938—), 男, 北京顺义人, 教授, 博士生导师, 从事飞行器导航、制导与控制、非线性控制等研究.

方法设计的响应系统不依赖于具体的驱动系统, 具有很大的灵活性, 同时对驱动系统的标量输出信号没有任何限制, 可选择为任一状态变量或状态变量的组合

2 同步方法描述

考虑非线性自治系统

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X), \\ y = h(X). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $X \in R^n$ 为系统的状态变量; $y \in R$ 为系统的输出变量; $F: R^n \rightarrow R^n, h: R^n \rightarrow R$ 均为光滑的函数

假设输出信号 y 及其连续的 n 阶导数已知, 且 $|y^{(i)}(t)| < M, \forall t \in [0, \infty), M \in R^+, i = 1, 2, \dots, n$. 利用标量输出信号 y 和其连续的 $n - 1$ 阶导数重构系统的状态, 即

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(X) \\ \dot{h}(X) \\ \vdots \\ h^{(n-1)}(X) \end{bmatrix} = H(X), \quad (2)$$

于是得到具有 Brunow sky 规范形式的重构系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = z_3, \\ \vdots \\ \dot{z}_n = y^{(n)}. \end{cases} \quad (3)$$

2.1 基于状态观测器实现混沌系统同步

对重构系统 (3) 设计状态观测器, 并将其作为响应系统

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 = \hat{z}_2, \\ \dot{\hat{z}}_2 = \hat{z}_3, \\ \vdots \\ \dot{\hat{z}}_n = y^{(n)} + k_1(\hat{z}_1 - \hat{z}_1) + \dots + k_n(\hat{z}_n - \hat{z}_n). \end{cases} \quad (4)$$

比较系统 (3) 与 (4), 得到误差系统

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2, \\ \dot{e}_2 = e_3, \\ \vdots \\ \dot{e}_n = -k_1 e_1 - \dots - k_n e_n. \end{cases} \quad (5)$$

其中: $e_i = z_i - \hat{z}_i = z_i - y^{(i-1)}, i = 1, 2, \dots, n$.

应用线性系统稳定性理论可得如下定理:

定理 1 当 k_1, \dots, k_n 的选择使得特征方程 $\lambda^n + k_n \lambda^{n-1} + \dots + k_1 = 0$ 的所有根都具有负实部时, 误差系统 (5) 是渐近稳定的, 有 $e_i \rightarrow 0$, 当 $t \rightarrow \infty, i = 1, 2, \dots, n$. 即状态观测器 (4) 实现了输出及其连续的 $n - 1$ 阶导数的同步, 有 $\hat{z}_i = y^{(i-1)}$, 当 $t \rightarrow \infty, i = 1,$

$2, \dots, n$. 其中观测器 (4) 还可描述成如下形式:

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 = \hat{z}_2, \\ \dot{\hat{z}}_2 = \hat{z}_3, \\ \vdots \\ \dot{\hat{z}}_n = y^{(n)} + k_1 \hat{z}_1 + \dots + k_n \hat{z}_n. \end{cases} \quad (6)$$

证明 令 $e = [e_1 \dots e_n]^T$, 于是式 (5) 可表示为 $\dot{e} = A e$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \dots & -k_n \end{bmatrix}.$$

由线性系统稳定性理论可知, 误差系统 (5) 是渐近稳定的, 当且仅当 A 阵的所有特征值都具有负实部, 即特征方程 $\lambda^n + k_n \lambda^{n-1} + \dots + k_1 = 0$ 的所有根都具有负实部

2.2 基于扩张状态观测器实现混沌系统同步

当观测器 (6) 中所需的输出变量的导数很难获得时, 可根据扩张状态观测器的思想^[10], 将重构系统 (3) 看作扩张系统; 然后针对系统 (3) 设计扩张状态观测器, 并将其作为响应系统

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 = \hat{z}_2 - \beta_1 g_1(\hat{z}_1 - z_1), \\ \dot{\hat{z}}_2 = \hat{z}_3 - \beta_2 g_2(\hat{z}_1 - z_1), \\ \vdots \\ \dot{\hat{z}}_n = -\beta_n g_n(\hat{z}_1 - z_1). \end{cases} \quad (7)$$

其中参数^[11] β_i 和 $g_i(\bullet)$ 采用如下形式:

$$\beta_i = L^i \lambda, \quad (8)$$

$$g_i(\hat{z}_1 - z_1) = \hat{z}_1 - z_1. \quad (9)$$

比较系统 (3) 与 (7), 得到误差系统

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = L e_2 - L \lambda e_1, \\ \vdots \\ \dot{e}_n = L e_{n+1} - L \lambda e_1, \\ \dot{e}_{n+1} = -y^{(n)} - L \lambda e_1. \end{cases} \quad (10)$$

令 $e_i = L^{n+1-i} (z_i - \hat{z}_i), i = 1, 2, \dots, n+1$, 即误差系统为

$$\dot{e} = LA(\lambda)e + B.$$

其中

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\lambda & 0 & \dots & 1 \\ -\lambda_{n+1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -y^{(n)} \end{bmatrix}.$$

定理 2 当 λ 的选择使得多项式 $S(n) = s^{n+1} + \lambda_{n+1} s^n + \dots + \lambda_1 = 0$ 是 Hurwitz 稳定, 增益 $L > 0$ 且

$|y^{(n)}(t)| < M$ 是有界函数时, 误差系统(10) 是渐近稳定的, 有 $e_i \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$. 这样系统(7) 就能跟踪系统(3) 的状态 $y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}$, 即实现了驱动系统的输出及其连续的 $n-1$ 阶导数的同步, 有 $\hat{z}_i = y^{(i-1)}$, 当 $t \rightarrow \infty, i = 1, 2, \dots, n$.

证明 误差系统(10) 的解为

$$e(t) = e^{LA} e(0) + \int_0^t e^{LA(t-\tau)} B d\tau$$

显然, 当 λ_i 的选择使得多项式 $S(n) = s^{n+1} + \lambda_{n+1}s^n + \dots + \lambda_1 = 0$ 是 Hurwitz 稳定的, 增益 $L > 0$ 且 $|y^{(n)}(t)| < M$ 是有界函数时, 误差系统(10) 是渐近稳定的, 有 $e_i \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$.

增益 L 影响误差的收敛速率. 参数 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}$ 也可不按式(8) 选取, 而由经验直接给出. 函数 $g_i(z_1 - \hat{z}_1)$ 可选为

$$g_i(z_1 - \hat{z}_1) = abs(z_1 - \hat{z}_1)^{a_i} sign(z_1 - \hat{z}_1). \quad (11)$$

其中: 参数 a_i 可根据经验灵活选择, 一般选 $a_i > 0$; $sign(\cdot)$ 为符号函数

注1 观测器(6) 中所需的驱动信号 $y^{(n)} + k_1 y + \dots + k_n y^{(n-1)}$ 是标量信号, 而扩张状态观测器(7) 中所需的驱动信号 $z_1 = y = h(X)$ 仅为输出标量信号, 这对于将混沌同步用于保密通信特别重要, 因为这样可节省用于传送发送端状态变量的信道资源

注2 对于不同结构的驱动系统, 或同一驱动系统的不同标量输出, 只要其驱动系统的阶数相同, 就可以用同一结构的状态观测器或扩张状态观测器作为响应系统来实现同步. 因此, 即使驱动系统改变, 或可观测的标量输出改变, 响应系统也不需要重新设计.

注3 输出信号 y 可以是任意指定的单个状态变量或多个状态变量的线性或非线形组合形成的标量信号

注4 当由坐标变换(2) 可获得状态变量 X 的唯一解 $X = H^{-1}(Z)$ 时, 上述两个观测器还能实现所有驱动系统的状态变量的同步.

3 仿真实例

作为本文理论的应用, 本节研究具有确定物理意义的 Rossler 混沌系统. 因篇幅有限, 在此只给出基于扩张状态观测器的仿真结果

考虑混沌系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + ax_2, \\ \dot{x}_3 = x_1x_3 - bx_3 + c \end{cases}$$

假定输出 $y = x_2$, 定义重构(扩张) 状态变量为 $z_1 =$

$$y = x_2, z_2 = \dot{y} = x_1 + ax_2, z_3 = \ddot{y} = ax_1 + (a^2 -$$

$1)x_2 - x_3$, 于是得到如下扩张系统及其观测器:

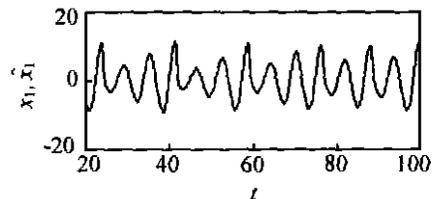
$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = z_3, \\ \dot{z}_3 = \alpha(t); \\ \dot{\hat{z}}_1 = \hat{z}_2 - \beta_1 g_1(\hat{z}_1 - z_1), \\ \dot{\hat{z}}_2 = \hat{z}_3 - \beta_2 g_2(\hat{z}_2 - z_2), \\ \dot{\hat{z}}_3 = -\beta_3 g_3(\hat{z}_3 - z_3). \end{cases}$$

Rossler 系统参数选择为 $a = 0.2, b = 5.7, c = 0.2$. 取 $\alpha(t) = y^{(3)}$. 驱动系统和响应系统的初值分别为 $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = -2; z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = 0$. 扩张状态观测器的参数形式如式(8) 和(9), 具体选择为 $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 12, \lambda_3 = 6, L = 10$. 积分步长 $h = 0.001$.

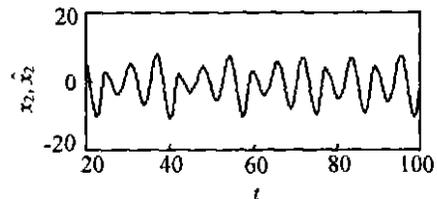
根据重构状态变量时的坐标变换, 有

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = \hat{z}_2 - a\hat{z}_1, \\ \hat{x}_2 = \hat{z}_1, \\ \hat{x}_3 = -\hat{z}_1 + a\hat{z}_2 - \hat{z}_3 \end{cases}$$

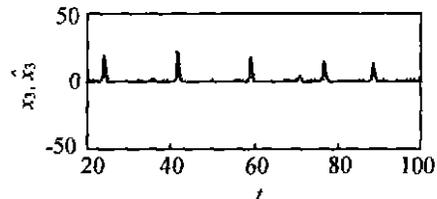
当 $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3$ 分别同步于 z_1, z_2, z_3 时, 由响应系统的状态变量经坐标变换后得到的 $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ 同步于驱动系统的状态变量 x_1, x_2, x_3 . 采用 Matlab 5.1 进行仿真, 仿真结果如图 1 所示. 图中: 实线代表驱动系统的状态变量 x_1, x_2, x_3 ; 虚线代表响应系统的状态变量 $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$. 从图中可见状态变量实现了同步.



(a) x_1, \hat{x}_1



(b) x_2, \hat{x}_2



(c) x_3, \hat{x}_3

图 1 Rossler 混沌系统状态变量的同步曲线
(下转第 116 页)

以上两例的式(3)和式(6)表明:定平面折返控制法是变结构控制,当相点位于区域 D_1 时,不对系统施加控制,相点按原系统规律运动;当相点位于区域 D_2 时,改变系统结构,将原系统非线性项用一线性项代替。在混沌电路中,采用电子开关进行切换,这种控制较易实现。

5 结 语

文献[2~4]阐述的混沌吸引子理论指出,混沌系统的随机性主要在于其单向折返运动的不确定性。本文提出的定平面折返控制法对混沌系统的单向折返运动进行控制,破坏其随机性,使系统稳定运行于某些周期轨道。该方法只需在折返平面对系统状态方程中的一项进行切换,控制简单,电路实现也较为方便。混沌系统的仿真实验结果表明了该控制方法的有效性。

参考文献(References)

- [1] 方锦清. 非线性系统中混沌的控制与同步及其应用前景(一)[J]. *物理学进展*, 1996, 16(1): 1-74
- [2] 丘水生. 奇异吸引子的细胞模型及混沌存在定理的建立[J]. *华南理工大学学报*, 1996, 24(6): 134-137.
(Qiu S S. A cell model of strange attractor and two theorems of chaos existence [J]. *J of South China University of Technology*, 1996, 24(6): 134-137.)
- [3] 丘水生. Refind and extended description of the cell model of chaotic attractors—Part I: Theory[J]. *J of South China University of Technology*, 2000, 28(12): 18-23
- [4] 丘水生. 混沌吸引子周期轨道理论研究(1)[J]. *电路与系统学报*, 2003, 8(6): 1-5.
(Qiu S S. Study on periodic orbit theory of chaotic attractors (I) [J]. *J of Circuits and Systems*, 2003, 8(6): 1-5.)
- [5] 钟晓旭. 三阶混沌系统的仿真与分析[D]. 广州, 华南理工大学, 1998

(上接第108页)

4 结 论

本文提出了基于重构系统的观测器实现混沌系统的同步方法,其中驱动信号为标量信号。仿真表明,该方法不但能实现输出及其导数的同步,当满足一定条件时,还可实现所有状态变量的同步。

参考文献(References):

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems[J]. *Physical Review Letters*, 1990, 64(8): 821-824
- [2] Grassi G, Mascolo S. Nonlinear observer design to synchronize hyperchaotic systems via a scalar signal[J]. *IEEE Trans on Circuits and System: I*, 1997, 44(10): 1011-1014
- [3] 周平. 一类3维连续混沌系统观测器[J]. *物理学报*, 2003, 52(5): 1108-1111.
(Zhou P. Observers for a class of 3D continuous chaotic systems[J]. *Acta Physica Sinica*, 2003, 52(5): 1108-1111.)
- [4] Morgullo O, Solak E. Observer based synchronization of chaotic system [J]. *Physical Review E*, 1996, 54(5): 4803-4811
- [5] 杨绿溪, 李克, 何振亚. 用于混沌同步的非线性观测器的稳定性分析[J]. *中国科学(E 辑)*, 2001, 31(4): 355-362
(Yang L X, Li K, He Z Y. Stabilizing analysis of nonlinear observer for chaotic synchronization[J]. *Science in China (Series E)*, 2001, 31(4): 355-362.)
- [6] Nijmeijer H, Mareels IM Y. An observer looks at synchronization [J]. *IEEE Trans on Circuits System I*, 1997, 44(10): 882-890
- [7] Millerieux G, Mira C. Finite-time global chaos synchronization for piecewise linear maps[J]. *IEEE Trans on Circuits System I*, 2001, 48(1): 111-116
- [8] Millerieux G, Daafouz J. Global chaos synchronization and robust filtering in noisy context[J]. *IEEE Trans on Circuits System I*, 2001, 48(10): 1170-1176
- [9] Millerieux G, Daafouz J. Polytopic observer for global synchronization of systems with output measurable nonlinearities [J]. *Int J Bifur Chaos*, 2003, 13(3): 703-712
- [10] 韩京清. 一类不确定对象的扩张状态观测器[J]. *控制与决策*, 1995, 10(1): 85-88
(Han J Q. The extended state observer of a class of uncertain systems [J]. *Control and Decision*, 1995, 10(1): 85-88.)
- [11] Femat R, Alvarez-Ramirez J. Synchronization of a class of strictly different chaotic oscillators[J]. *Phys Lett A*, 1997, 236: 307-313