

文章编号: 1001-0920(2005)10-1133-04

## 采样系统的频率响应和 $L_2$ 诱导范数

刘彦文, 王广雄, 何 朕

(哈尔滨工业大学 控制科学与工程系, 哈尔滨 150001)

**摘 要:** 提升技术已成为采样系统设计的主要工具, 但提升变换不能保证频率响应不变, 故不适用于加权(函数)  $H$  设计. 为此, 针对采样控制系统的结构特点, 将频率响应分为两个通道进行计算. 采用经典的采样系统理论, 既可以得到频率响应, 又可以求得采样系统的  $L_2$  诱导范数. 方法简单直观, 物理概念清楚.

**关键词:** 采样系统; 提升技术; 频率响应;  $L_2$  诱导范数;  $H$  设计

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Frequency Response and the $L_2$ -induced Norm of Sampled-data Systems

L I U Yan-wen, W A N G Guang-xiong, H E Zhen

(Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China  
Correspondent: Wang Guang-xiong, Email: gxwang@hope.hit.edu.cn)

**Abstract:** It is pointed out that the lifting technique is not suitable for  $H$  synthesis with weighting functions of sampled-data systems. According to the special structure of the sampled-data control system, the signal channel is really composed of two parts: A continuous-time part and a discrete-time one. So the frequency response can be obtained via the classical sampled-data theory, and the  $L_2$ -induced norm of the system can be obtained as well. This method is simple, intuitive, and with clear physical meanings.

**Key words:** Sampled-data system; Lifting technique; Frequency response;  $L_2$ -induced norm;  $H$  synthesis

### 1 引 言

采样控制系统中的对象是连续的, 因此系统的性能分析应知道连续的输入输出信号之间的关系, 为此要求采用提升方法. 提升是一种变换, 能够保证提升前后的范数不变, 可用来计算采样系统的  $L_2$  诱导范数<sup>[1]</sup>. 目前, 提升方法已成为采样控制系统分析和设计的主要工具. 提升技术计算复杂, 而且变换前后失去了原问题的物理意义(输入输出的维数都有变化), 所以自提出以来一直在进行完善. 这方面的工作可归纳为以下 3 个方向:

1) 基于文献[1]的时间域提升的概念, 对计算过程进行简化和扩大处理的范围<sup>[2,3]</sup>;

2) 先计算提升系统的频率响应, 然后从频率响

应求取系统的  $L_2$  诱导范数<sup>[4-7]</sup>;

3) 频域提升<sup>[8,9]</sup>, 用频域提升法直接算出提升后的频率响应, 然后求采样系统的  $L_2$  诱导范数.

经过近 10 年的发展, 这几个方向都已比较完善, 也有了相应的算法. 但这些工作都只着眼于提升算法的完善, 似乎只要变换后范数等价, 就可用于  $H$  设计. 其实不然,  $H$  设计是加权设计, 是利用权函数对闭环系统的频率特性进行成形(Shaping), 设计中  $H$  范数虽然是设计指标, 但实质上要根据范数等于 1 来达到对频率特性成形的设计目的. 上述各提升方法都只是保证变换前后范数等价, 并不能保证变换前后的频率特性相等. 因此, 当将提升法应用于加权  $H$  优化设计时将达不到所要求的频率成

收稿日期: 2004-10-27; 修回日期: 2005-01-24

基金项目: 哈尔滨工业大学重点学科建设基金项目(54100179).

作者简介: 刘彦文(1976-), 女, 河北辛集人, 博士生, 从事采样系统和鲁棒控制系统设计的研究; 王广雄(1933-), 男, 上海人, 教授, 博士生导师, 从事  $H$  控制理论及应用、控制系统的鲁棒设计等研究.

形的目的<sup>[12]</sup>。

本文摒弃了提升的概念,提出一种新的计算频率响应的方法,既给出了采样系统的 $L_2$ 诱导范数,同时给出了具有明确物理意义的频率特性,这样可进一步用于采样系统的 $H$ 设计。

## 2 频率响应的直接计算

下面先通过一具体问题说明方法的实质,然后推广到一般情形。图1所示是一采样控制系统的扰动抑制问题。图中: $P$ 为对象, $H$ 为保持器, $S$ 为采样器, $K_d$ 为数字控制器, $K_d$ 前后的开关是强调控制器前后的信号都是离散的, $F$ 为抗混叠滤波器(低通滤波器)。现在要计算的是从扰动信号 $w$ 到输出 $z$ 的系统的扰动抑制特性。

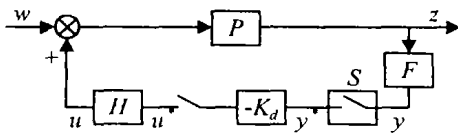


图1 采样控制系统的扰动抑制问题

为便于说明问题,这里将系统看成算子 $T$ ,将 $w$ 到 $z$ 看成从 $L_2$ 信号到 $L_2$ 信号的映射。结合图1,该算子 $T$ 形式上可写成<sup>[10]</sup>

$$T = P - PHK_d(I + SFPHK_d)^{-1}SFP. \quad (1)$$

式(1)表明,采样系统的响应由两部分组成,右侧的第1项 $P$ 表示有一部分信号是直通的,并未经过采样,是连续系统的响应;第2项则是经过采样的,经典的采样控制理论应该完全适用。这种由两部分频率特性分别计算并相加的观点,就是本文方法与现在流行的提升变换的根本区别。

下面推导具体的计算关系式时要用到一些标准的表示式:用 $*$ 号表示采样信号; $Y^*(s)$ 表示采样信号的拉氏变换,即

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(s + jk\omega), \quad (2)$$

$Y^*(j\omega)$ 表示其频谱, $T$ 为采样时间。

图1中各信号的变换式如下(在不需特殊表明时,文中仅用大写字母表示拉氏变换或频谱):

$$Z(s) = P(s)W(s) + P(s)H(s)U^*(s), \quad (3)$$

$$Y^*(s) =$$

$$(FPW)^*(s) + (FPH)^*(s)U^*(s), \quad (4)$$

$$U^*(s) = -K_d^*(s)Y^*(s). \quad (5)$$

式中: $K_d$ 为数字控制器, $H$ 为保持器,即

$$H(s) = (1 - e^{-Ts})/s \quad (6)$$

式(4)中括号内的部分表示相乘后再离散化,例如输入信号 $w$ 到 $P$ 再到 $F$ 之间没有采样开关,所以应将这3个拉氏变换/传递函数乘到一起后再离散化,表示为 $(FPW)^*$ 。

根据式(3)~(5),可得输出信号的拉氏变换式

$$Z = PW - PH \frac{K_d^*(FPW)^*}{1 + K_d^*(FPH)^*}. \quad (7)$$

下面计算系统的频率响应。设输入信号是一正弦函数 $w(t) = \exp(j\omega t)$ <sup>[5]</sup>。这种函数也称为复数正弦(phasor),其频谱为

$$W(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega). \quad (8)$$

所以根据式(2),可将 $(FPW)^*$ 的频谱整理如下<sup>[11]</sup>:

$$(FPW)^* = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(j\omega - jk\omega)P(j\omega - jk\omega)2\pi\delta(\omega - \omega - k\omega).$$

因为输入信号的频率 $\omega$ 小于 $\omega/2$ ,而 $F$ 为低通滤波,故信号 $(FPW)^*$ 的频谱并没有重叠,它的主频段的谱就在 $\omega$ 上,即

$$(FPW)^* = \frac{1}{T} F(j\omega)P(j\omega)2\pi\delta(\omega - \omega). \quad (9)$$

式(9)表明, $(FPW)^*$ 也是一个正弦信号,其频谱等于输入正弦信号的频谱乘以相应的传递函数 $F(j\omega)P(j\omega)/T$ ,因此可将式(9)写成

$$(FPW)^* = \frac{1}{T} FPW. \quad (10)$$

当然,式(10)只对正弦输入有效。

将式(10)代入(7),整理得

$$Z = PW - P \frac{K_d^* \left( \frac{1}{T} FPH \right)}{1 + K_d^* (FPH)^*} W = \left( P - P \frac{K_d^* (FPH)^*}{1 + K_d^* (FPH)^*} \right) W. \quad (11)$$

式(11)的第2个等式是因为系统中存在抗混叠滤波器 $F$ ,当 $|\omega| > \omega/2$ 时 $|FPH| = 0$ ,即频率特性没有重叠。因此根据式(2),对于 $\omega < \omega/2$ 的正弦输入,有

$$(FPH)^* = \frac{1}{T} FPH.$$

如果换成通用的广义对象的符号,则式(11)可写成

$$Z = (G_{11} + G_{12}K_d^*(I - G_{22}K_d^*)^{-1}G_{21}^*)W, \quad (12)$$

或改用现有文献中通用的符号,用脚标 $d$ 表示相应的离散化传递函数,则式(12)可写成

$$Z = (G_{11} + G_{12}K_d(I - G_{22}K_d)^{-1}G_{21})W. \quad (13)$$

式(13)表明,采样控制系统的频率响应可根据如下线性分式关系 $F(G, K_d)$ 进行计算:

$$Z = F(G, K_d)W, \quad (14)$$

式中

$$G = \begin{bmatrix} G_{11}(j\omega) & G_{12}(j\omega) \\ G_{21d}(e^{j\omega T}) & G_{22d}(e^{j\omega T}) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

式(14)和(15)表明,采样系统的频率响应可根据传递函数和离散化传递函数直接算得,频率响应的幅值最大值就是采样系统的 $L_2$ 诱导范数<sup>[9]</sup>。于

是, 在计算系统频率响应的同时, 也得到了  $L_2$  诱导范数。该方法比通过提升计算简单直观, 易于掌握。

当然, 该方法的唯一限制是要求系统中有合适的抗混叠滤波器, 但这对实际的采样控制系统而言是都能够满足的。

### 3 算 例

设图 1 中对象  $P$  和滤波器  $F$  为

$$P(s) = \frac{20 - s}{(5s + 1)(s + 20)},$$

$$F(s) = \frac{25\pi^2}{(s + 5\pi)^2},$$

并取控制器  $K_d$  为

$$K_d(z) = \frac{8.3868(z - 0.918)(z - 0.1246)}{(z - 0.9998)(z + 0.07344)}.$$

取采样周期  $\tau = 0.1$  s, 根据式(11)可计算出采样系统的频率响应如图 2 所示。频率响应上的峰值就是该采样系统的  $L_2$  诱导范数, 为 0.172 9 (等于 -15.244 dB)。为了进行比较, 用文献[1]的提升法计算系统的  $L_2$  诱导范数, 也是 0.172 9, 与根据式(11)算出的频率响应的最大幅值相同(计算过程略)。

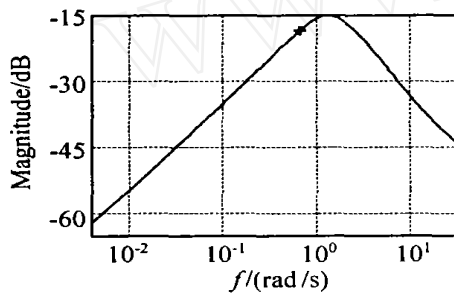


图 2 采样系统的频率响应

下面观察正弦输入下的输出。一般说, 采样系统是时变周期性系统, 如果输入正弦信号, 则其输出响应是非平稳的<sup>[5]</sup>。这个概念对“全采样”系统而言是对的, 而对这里的采样控制问题(见图 1 和式(13)), 有一个主要的信号通道没有经过采样, 所以系统的输出并不总呈现时变特性, 尤其是低频段(此时误差信号较小), 系统的响应呈现出平稳的(Stationary)特性。图 3 所示是本例中正弦频率高达  $\omega = 0.628$  rad/s 时的输出响应曲线, 与一般的时不变系统的响应一样, 看不出有时变特性。对于本例的扰动抑制问题, 峰值频率对应于系统过 0 dB 线的频率  $\omega$ , 因为那时回路增益已衰减到 1, 误差最大。本例中峰值频率为 1.3 rad/s (见图 2), 故图 3 的信号频率 0.628 rad/s 对该系统而言已相当高了, 覆盖了决定系统性能(Performance)的整个低频段。也就是说, 在反映系统性能的频段上, 这个采样系统呈现出时不变系统的特性。从图 3 可读得正弦的幅值为

0.110 8。因为输入正弦的幅值为 1, 所以输出与输入之比为 0.110 8。而根据式(11)算得的频率响应(图 2)在  $\omega = 0.628$  处的读数为 0.110 7 (-19.117 dB, 图中标 + 号的点), 可见所算得的频率响应与实际正弦输入下的响应在低频段是一致的, 是可以实验测定和验证的。所以本文所计算的频率响应具有明确的物理意义。

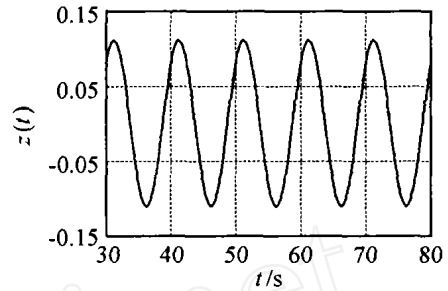


图 3  $\omega = 0.2\pi$  时的频率响应

图 3 的响应曲线是用 Simulink 混合仿真所得的曲线。仿真时对象  $P$  和滤波器  $F$  都是连续的环节, 控制器是离散的。

### 4 结 论

采样系统的提升方法在理论上虽然发展得比较完备, 但该方法是将整个系统当作“全采样”的系统来处理的, 而实际上的采样控制系统(图 1), 连续信号的一个主要通道是直通的, 并不经过采样。基于这个观点分析采样系统既简单、物理概念又很清楚, 既可得到系统的频率响应, 又可很容易地得到  $L_2$  诱导范数, 因而可进一步用于  $H_\infty$  加权(函数)的优化设计。

### 参考文献(References)

- [1] Bamieh B A, Pearson, Jr J B. A General Framework for Linear Periodic Systems with Applications to  $H_\infty$  Sampled-data Control [J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 1992, 37(4): 418-435.
- [2] Chen Tongwen, Francis B A.  $H_\infty$ -optimal Sampled-data Control: Computation and Design [J]. *Automatica*, 1996, 32(2): 223-228.
- [3] Mirkin L, Tadmor G. Yet another  $H_\infty$  discretization [J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 2003, 48(5): 891-894.
- [4] Yamamoto Y, Khargonekar P P. Frequency Response of Sampled-data Systems [A]. *Proc of the 32nd Conf on Decision and Control* [C]. San Antonio, 1993: 799-804.
- [5] Yamamoto Y, Khargonekar P P. Frequency Response of Sampled-data systems [J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 1996, 41(2): 166-175.
- [6] Yamamoto Y, Madievski A G, Anderson B D O. Computation and Convergence of Frequency Response

- via Fast Sampling for Sampled-data Control Systems [A]. *Proc of the 36th Conf on Decision and Control* [C]. San Diego, 1997: 2157-2162
- [7] Yamamoto Y, Anderson B D O. Approximating Sampled-data Systems with Applications to Digital Redesign [A]. *Proc of the 41st IEEE Conf on Decision and Control* [C]. Las Vegas, 2002: 3724-3709
- [8] Araki M, Ito Y, Hagiwara T. Frequency Response of Sampled-data Systems [J]. *Automatica*, 1996, 32(4): 483-497.
- [9] Braslavsky J H, Middleton R H, Freudenberg J S.  $L_2$ -Induced Norms and Frequency Gains of Sampled-data Sensitivity Operators [J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 1998, 43(2): 252-258
- [10] Anderson B D O. Controller Design: Moving from Theory to Practice [J]. *IEEE Control Systems*, 1993, 13(4): 16-25
- [11] Franklin G F, Powell J D, Workman M. *Digital Control of Dynamic Systems* [M]. 3rd Edition. Beijing: Tsinghua University Press, 2001
- [12] Wang G X, Liu Y W, He Z, et al. The Lifting Technique for Sampled-data Systems: Useful or Useless? [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2005, 31(3): 491-494

## (上接第 1128 页)

- [8] 吴祈宗. 运筹学 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2002: 95-108  
(Wu Q Z. *Operation Research* [M]. Beijing: China Machine Press, 2002: 95-108)
- [9] Shamsur R, David K S. Use of Location-allocation Models in Health Service Development Planning in Developing Nations [J]. *European J of Operational Research*, 2000, 123(3): 437-452
- [10] Bongartz I A. Projection Method for Norm Location-allocation Problems [J]. *Mathematical Programming*, 1994, 66(3): 283-312
- [11] 赵晓煜, 汪定伟. 供应链中二级分销网络的优化设计模型 [J]. *管理科学学报*, 2001, 4(4): 22-26  
(Zhao X Y, Wang D W. Optimization Model for Bi-level Distribution Network Design Supply Chain Management [J]. *J of Management Science*, 2001, 4(4): 22-26)
- [12] Alsuwaiyel M H. *Algorithm Design Techniques and Analysis* [M]. Singapore: World scientific publishing Co Pte Ltd, 2003: 279-298

## (上接第 1132 页)

- [3] Burges C J C. A tutorial on Support Vector Machines for Pattern Recognition [J]. *Knowledge Discovery and Data Mining*, 1998, 2(2): 121-167.
- [4] 曾文华, 马健. 一种新的支持向量机增量学习算法 [J]. *厦门大学学报(自然科学版)*, 2002, 41(6): 687-691.  
(Zeng W H, Ma J. A Novel Approach to Incremental SVM Learning Algorithm [J]. *J of Xiamen University (Natural Science)*, 2002, 41(6): 687-691.)
- [5] 李凯, 黄厚宽. 支持向量机增量学习算法研究 [J]. *北方交通大学学报*, 2003, 27(5): 34-37.  
(Li K, Huang H K. Research on Incremental Learning Algorithm of Support Vector Machine [J]. *J of Northern Jiaotong University*, 2003, 27(5): 34-37.)
- [6] 萧嵘, 王继成, 孙正兴, 等. 一种 SVM 增量学习算法  $\alpha$ -ISVM [J]. *软件学报*, 2001, 12(12): 1818-1824  
(Xiao R, Wang J C, Sun Z X, et al. An Incremental SVM Learning Algorithm  $\alpha$ -ISVM [J]. *J of Software*, 2001, 12(12): 1818-1824)
- [7] Gert C, Tomaso P. Incremental and Decremental Support Vector Machine Learning [A]. *Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS \* 2000)* [C]. Cambridge MA: MIT Press, 2001, 13
- [8] Schölkopf B. *The Kernel Trick for Distances* [R]. MSR-TR-2000-51, Microsoft Research, 2000
- [9] Smola A J. *Learning with Kernels* [D]. Berlin: Technische Universität, 1998
- [10] Platt J. Fast Training of Support Vector Machines Using Sequential Minimal Optimization [A]. *Advances in Kernel Methods - Support Vector Learning* [C]. Cambridge, MA: MIT Press, 1999: 185-208