文章编号: 1001-0920(2005)10-1161-04

单输入单输出切换系统的一致标准形及可镇定性

赵胜芝[1,2], 李建华[1], 赵 军[1]
(1. 东北大学 教育部暨辽宁省工业综合自动化重点实验室, 沈阳 110004; 2. 辽宁大学 数学系, 沈阳 110036)

摘 要: 提出单输入单输出非线性切换系统的一致标准形概念, 这一概念是非线性系统标准形概念的自然推广. 给出了一致标准形存在的几何条件和所需的坐标变换, 并利用一致标准形分析了非线性切换系统在任意切换下二次可镇定的条件. 仿真算例表明了该方法的有效性.

关键词: 一致标准形; 非线性切换系统; 相关度; 零动态; 共同 Lyapunov 函数
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Uniform Normal form and Stabilizability of Single-input Single-output Switched Systems

ZHAO Sheng-zhi[1,2], *LI Jian-hua*[1], *ZHAO Jun*[1]
(1. Key Laboratory of Process Industry Automation, Ministry of Education, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. Department of mathematics, Liaoning University, Shenyang 110036, China. Correspondent: ZHAO Sheng-zhi, E-mail: zzsszz2002@163.com)

Abstract: A uniform normal form of single-input single-output switched nonlinear systems is presented, which generalizes the notion of normal form of nonlinear systems. A geometric condition for the existence of the uniform normal form and corresponding coordinate transformation are derived. With the help of the uniform normal form, conditions for quadratic stabilizability of switched nonlinear systems under arbitrary switching are analyzed. A simulation example shows the effectiveness of the given strategy.

Key words: Uniform normal form; Switched nonlinear systems; Relative degree; Zero dynamics; Common Lyapunov function

1 引 言

切换系统由一组连续子系统以及协调子系统间切换的切换规则组成. 连续动态和离散动态之间的相互作用使得切换系统呈现出较为丰富和复杂的行为方式. 在稳定的子系统间进行切换可能引起不稳定, 故切换系统在任意切换下的稳定性是一个非常理想的系统性能指标. 因为可不必担心由于切换信号的变更而影响稳定性, 进而考虑系统的其他性能指标.

子系统存在共同 Lyapunov 函数可以保证切换系统在任意切换下的稳定性[1]. 对于线性切换系统, 人们将构造共同 Lyapunov 函数的问题归结为求解线性矩阵不等式的问题[2,3], 但它们不适于处理子系统个数多且维数高的情形. 文献[3]的方法易于实现, 但只适合二维情形. 文献[4]利用幂零与可解的李代数条件来保证线性切换系统各子系统同时上三角化, 进而拥有共同 Lyapunov 函数. 对于一般非线性切换系统, 很难构造共同 Lyapunov 函数, 子系统间的可交换关系在构造共同 Lyapunov 函数时发挥着重要作用[5]. 文献[6]利用系统的特殊结构讨论了三角结构切换系统的相应问题. 另一方面, 关于

收稿日期: 2004-08-19; 修回日期: 2005-02-28.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60274009); 高等学校博士学科点专项科研基金项目(20020145007); 辽宁省自然科学基金项目(20032020).
作者简介: 赵胜芝(1965—), 女, 辽宁铁岭人, 博士生, 从事非线性切换系统、鲁棒控制等研究; 赵军(1957—), 男, 辽宁海城人, 教授, 博士生导师, 从事非线性混杂系统、几何控制理论及鲁棒控制等研究.

带有连续控制变量的非线性切换系统镇定方面的结果并不多见[7~9]，这主要是由于非线性、连续控制量和离散切换信号并存且相互作用所引起的复杂性所致. 用几何方法建立的非线性系统标准形是研究非线性系统的有力工具[10]. 对于非线性切换系统，虽然各子系统可分别建立标准形，但一般不在同一坐标框架下，这很难进行分析. 文献[7]在各子系统具有相同相关度和由此导出的坐标变换相同的假设下，研究了非线性切换系统的镇定问题.

本文利用微分几何方法，提出非线性切换系统的一致标准形概念，并研究其镇定问题. 首先提出非线性切换系统一致标准形的概念，这一概念是一般非线性系统标准形概念的自然推广；然后讨论如何将非线性切换系统通过非线性坐标变换转换成一致标准形问题，给出了一致标准形存在的几何条件，这样便将各子系统纳入了同一坐标框架下且均具有标准形，将非线性切换系统分解成了线性和较低维的非线性两部分，从而更便于非线性切换系统的研究；最后利用一致标准形导出非线性切换系统在任意切换下二次可镇定的条件. 这里指出与文献[7]的几点差别：文献[7]要求一致标准形中非线性部分不含有控制输入，而本文无此限制；文献[7]借助一致标准形讨论非线性切换系统在某一切换律下的可镇定性，条件是一致标准形中的非线性部分满足输入对状态稳定(ISS)，并未分析如何由非线性切换系统转化成一致标准形，而本文借助一致标准形讨论非线性切换系统在任意切换下的可镇定问题，条件是一致标准形的零动态稳定，该条件弱于文献[7]中的 ISS，而且本文给出了由非线性切换系统转化成一致标准形的条件.

2 非线性切换系统的一致标准形

考虑以下系统：

$$\dot{x} = f_i(x) + g_i(x)u_i,\ y = h(x),\quad i = 1,\cdots,m. \tag{1}$$

其中：$x \in R^n$ 表示状态向量；$u_i \in R$；f_i, g_i 为光滑向量函数；$f_i(x_0) = 0,\ i = 1,\cdots,m$；$h(x)$ 为光滑纯量函数；指标 i 为切换信号. 本文始终设平衡点 $x_0 = 0$. 记 $\xi = (z_1,\cdots,z_r)^{\mathrm T}$，$\eta = (z_{r+1},\cdots,z_n)^{\mathrm T}$，$I$ 为单位矩阵.

首先将(非切换)系统标准形概念[10]推广到非线性切换系统.

定义 1 若在 x_0 的某邻域内存在坐标变换，$z = \Phi(x) = (\phi_1(x),\cdots,\phi_n(x))^{\mathrm T}$，其中 $\Phi(x_0) = 0$，$\partial\Phi/\partial x\,|_{x_0} \neq 0$，使得在 z 坐标下，切换系统(1)呈以下形式：

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \quad\vdots \\ \dot{z}_{r-1} = z_r, \\ \dot{z}_r = b_i(z) + a_i(z)u_i, \\ \dot{z}_{r+1} = q_{i\,r+1}(z) + p_{i\,r+1}(z)u_i, \\ \quad\vdots \\ \dot{z}_n = q_{in}(z) + p_{in}(z)u_i, \\ y = z_1, \\ i = 1,\cdots,m, \end{cases} \tag{2}$$

且 $a_i(\Phi(x_0)) \neq 0,\ i = 1,\cdots,m$，则称式(2)是(1)的一致标准形.

由以上概念易知，式(1)的各子系统具有相同的相关度是式(1)转化成一致标准形的必要条件. 但各子系统具有相同的相关度，式(1)却不一定有一致标准形，这是因为各子系统不一定存在共同的坐标变换.

下面给出一致标准形存在的条件：

条件 1 1) 在 x_0 的某邻域内，满足 $g_i(x)$，$f_i(x) - f_j(x) \in (\mathrm{span}\{\mathrm dh, \mathrm dL_{f_1}h,\cdots,\mathrm dL_{f_1}^{r-2}h\})^{\perp}$，$\forall i,j \in \{1,\cdots,m\}$，$i \neq j$；2) $L_{g_i}L_{f_1}^{r-1}h(x_0) \neq 0$，$i = 1,\cdots,m$.

命题 1 条件 1 是切换系统(1)存在一致标准形(2)的充分条件.

证明 由于 $\forall i \in \{1,\cdots,m\}$，有 $f_i(x) - f_j(x) \in (\mathrm{span}\{\mathrm dh, \mathrm dL_{f_1}h,\cdots,\mathrm dL_{f_1}^{r-2}h\})^{\perp}$，故有

$$\begin{aligned} &L_{f_i}h = L_{f_1}h, \\ &L_{f_i}^2h = L_{f_i}L_{f_1}h = L_{f_1}^2h, \\ &\quad\vdots \\ &L_{f_i}^{r-1}h = L_{f_i}L_{f_i}^{r-2}h = L_{f_1}L_{f_1}^{r-2}h = L_{f_1}^{r-1}h. \end{aligned}$$

又 $g_i(x) \in (\mathrm{span}\{\mathrm dh, \mathrm dL_{f_1}h,\cdots,\mathrm dL_{f_1}^{r-2}h\})^{\perp}$，有

$$L_{g_i}L_{f_i}^kh(x) = L_{g_i}L_{f_1}^kh(x) = 0,\ 0 \leq k \leq r-2,$$

由条件 1 中 2) 得

$$L_{g_i}L_{f_i}^{r-1}h(x_0) = L_{g_i}L_{f_1}^{r-1}h(x_0) \neq 0,$$

故各子系统均有共同的相关度 r. 由文献[10]知，$\mathrm dh(x_0), \mathrm dL_{f_1}h(x_0),\cdots,\mathrm dL_{f_1}^{r-1}h(x_0)$ 线性无关，则

$$\begin{aligned} z_1 &= \phi_1(x) = h(x), \\ z_2 &= \phi_2(x) = L_{f_1}h(x), \\ &\ \ \vdots \\ z_r &= \phi_r(x) = L_{f_1}^{r-1}h(x) \end{aligned}$$

成为构造各子系统标准形的前 r 个坐标变换函数. 补充其余的 $n-r$ 个坐标变换函数 $\phi_{r+1}(x),\cdots,\phi_n(x)$，则在 z 坐标下，切换系统(1)呈一致标准形(2). □

注 1 与一般非线性系统标准形不同，式(2)中

的 $p_{i,r+1},\cdots,p_{in}$ 不一定等于零, 这是由于不一定能选择到 $\phi_{r+1}(x),\cdots,\phi_n(x)$, 使

$$L_{g_i}\phi_j = 0,\ i = 1,\cdots,m,\ j = r+1,\cdots,n.$$

3　任意切换下的二次可镇定性

利用一致标准形讨论系统(1) 在任意切换下的二次可镇定问题.

定义 2　若存在 $u_i = u_i(x)$ 满足 $u_i(0) = 0$, $i = 1,\cdots,m$, 及正定二次型 $w(x)$, 满足

$$L_{f_i(x)+g_i(x)u_i(x)}w(x) \leq -\alpha\|x\|^2,$$

其中常数 $\alpha > 0$, $\forall i \in \{1,\cdots,m\}$, 则称非线性切换系统(1) 在任意切换下二次可镇定.

对于系统(2), 记

$$Q_i(\xi,\eta) = q_i(\xi,\eta) + p_i(\xi,\eta)\left(-\frac{b_i(\xi,\eta)}{a_i(\xi,\eta)}\right).$$

其中

$$q_i(\xi,\eta) = (q_{ir+1}(\xi,\eta),\cdots,q_{in}(\xi,\eta))^{\mathrm T},$$
$$p_i(\xi,\eta) = (p_{ir+1}(\xi,\eta),\cdots,p_{in}(\xi,\eta))^{\mathrm T}.$$

则一致标准形(2) 的零动态为

$$\dot\eta = Q_i(0,\eta),\ i = 1,\cdots,m.$$

在适当的条件下, 零动态在任意切换下的稳定性可保证切换系统在任意切换下可镇定.

定理 1　假设系统(1) 有一致标准形(2), 如果存在正定二次型 $U(\eta)$, 常数 $\beta_i > 0$, $i = 1,\cdots,m$, 满足 $L_{Q_i(0,\eta)}U(\eta) \leq -\beta_i\|\eta\|^2$, $i = 1,\cdots,m$, 则切换系统(1) 在任意切换下二次可镇定.

证明　取

$$u_i(\xi,\eta) = \frac{1}{a_i(\xi,\eta)}(-b_i(\xi,\eta) - c_{i0}\xi_1 - \cdots - c_{ir-1}\xi_r).$$

其中常数 $c_{i0}, c_{i1},\cdots,c_{ir}$ 使得

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -c_{i0} & -c_{i1} & -c_{i2} & \cdots & -c_{ir-1} \end{bmatrix}$$

的特征值均具负实部, $i = 1,\cdots,m$, 且存在正定矩阵 P 满足 $PA_i + A_i^{\mathrm T}P \leq -I$, $\forall i = 1,\cdots,m$. 令

$$H_i(\xi,\eta) = q_i(\xi,\eta) + p_i(\xi,\eta)(-b_i(\xi,\eta) - c_{i0}\xi_1 - \cdots - c_{ir-1}\xi_r)(1/a_i(\xi,\eta)),$$

则有 $H_i(0,\eta) = Q_i(0,\eta)$. 将 $u_i(\xi,\eta)$ 代入系统(2), 得闭环系统

$$\dot\xi = A_i\xi,\ \dot\eta = H_i(\xi,\eta),\ i = 1,\cdots,m. \tag{3}$$

下面证明式(3) 在任意切换下二次稳定.

由于 $U(\eta)$ 是二次型, 故存在 $\alpha_0 > 0$, 使得 $\|\partial U/\partial\eta\| \leq \alpha_0\|\eta\|$. 取

$$K_0 = \frac{\alpha_0^2L^2}{2\beta_0},\ \theta_0 = \sqrt{\frac{\beta_0}{\alpha_0L} + \frac{\alpha_0L}{4K_0}}.$$

其中: $\beta_0 = \min\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$, L 为 $H_i(\xi,\eta)$ 的局部李普希兹系数, 即

$$\|H_i(\xi,\eta) - H_i(0,\eta)\| \leq L\|\xi\|,\ i = 1,\cdots,m.$$

令 $V(\xi,\eta) = K_0\xi^{\mathrm T}P\xi + U(\eta)$, 则沿式(3) 的轨线有

$$\begin{aligned}\dot V \leq{}& -K_0\|\xi\|^2 + L_{H_i(0,\eta)}U(\eta) + L_{(H_i(\xi,\eta)-H_i(0,\eta))}U(\eta) \leq \\ & -K_0\|\xi\|^2 + L_{Q_i(0,\eta)}U(\eta) + \alpha_0L\|\eta\|\|\xi\| \leq \\ & -K_0\|\xi\|^2 - \beta_0\|\eta\|^2 + \alpha_0L\left(\frac{\theta_0^2}{2}\|\eta\|^2 + \frac{1}{2\theta_0^2}\|\xi\|^2\right) \leq \\ & -\tilde K(\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2),\end{aligned}$$

其中 $\tilde K = \min\left\{K_0 - \frac{\alpha_0L}{2\theta_0^2}, \beta_0 - \frac{\alpha_0L\theta_0^2}{2}\right\}$, 易验证 $\tilde K > 0$. 所以 $V(\xi,\eta)$ 是闭环系统(3) 的共同二次 Lyapunov 函数. 故反馈 $u_i = u_i(\phi(x))$ 使得系统(1) 的闭环系统在任意切换下二次稳定. 其中 $z = \phi(x)$ 是定义 1 中的坐标变换. □

4　仿真算例

考虑系统

$$\dot x = f_i(x) + g_i(x)u_i,\ y = x_4,\ i = 1,2 \tag{4}$$

其中

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} 21x_3 - 8x_1 \\ 16x_1^2 - 42x_1x_3 + x_4x_3 \\ 5x_3 - 2x_1 \\ x_1^2 + x_2 \end{bmatrix},$$

$$f_2(x) = \begin{bmatrix} -52x_3 + 9x_1 \\ 104x_1x_3 - 17x_1^2 + x_2 \\ -16x_3 + 3x_1 \\ x_1^2 + x_2 \end{bmatrix},$$

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + 2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ g_2(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

易验证条件 1 成立, 且 $r = 2$. 选择坐标变换 $z = \phi(x) = (x_4, x_2 + x_1^2, x_3, x_1)^{\mathrm T}$, 有 $\phi(0) = 0$, 且其雅可比矩阵在 $x_0 = 0$ 非齐异. 切换系统(4) 的一致标准形为

$$\begin{cases}\mathring{z}_1 = z_2,\\ \mathring{z}_2 = z_1 z_3 + (2 + 2z_3)u_1,\\ \mathring{z}_3 = 5z_3 - 2z_4 + u_1,\\ \mathring{z}_4 = 21z_3 - 8z_4\\ y = z_1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathring{z}_1 = z_2,\\ \mathring{z}_2 = z_2 + (2z_4^2 + 1)u_2,\\ \mathring{z}_3 = -16z_3 + 3z_4 + u_2,\\ \mathring{z}_4 = -52z_3 + 9z_4 + z_4u_2,\\ y = z_1.\end{cases}$$

其零动态为

$$\mathring{\eta} = Q_i(0, \eta),\ i = 1, 2, \tag{5}$$

其中

$$\eta = (z_3, z_4)^{\mathrm{T}},$$

$$Q_1(0, \eta) = \begin{bmatrix} 5z_3 - 2z_4 \\ 21z_3 - 8z_4 \end{bmatrix},$$

$$Q_2(0, \eta) = \begin{bmatrix} -16z_3 + 3z_4 \\ -52z_3 + 9z_4 \end{bmatrix}.$$

易验证定理 1 成立 事实上, 可取

$$u_1(z) = \frac{-z_1z_3 - 3z_1 - 4z_2}{2 + 2z_3},$$

$$u_2(z) = \frac{-2z_1 - 4z_2}{2z_4^2 + 1}, \tag{6}$$

则闭环系统(4) 和(6) 在任意切换下二次稳定 图 1 为在 x 坐标系下每个子系统运行 0.08 s 时, 闭环系统(4), (6) 的状态响应曲线

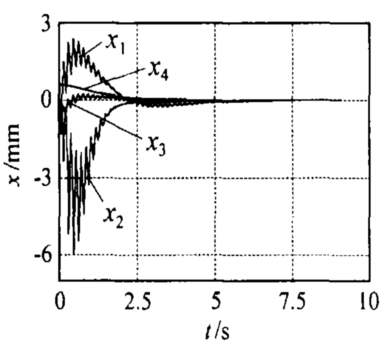

图 1 闭环系统(4), (6) 的状态响应曲线

5 结 论

本文提出了非线性切换系统一致标准形的概念, 并得到了非线性切换系统具有一致标准形的几何条件 这样便将各子系统纳入同一坐标系下且均具有标准形, 即切换系统具有一致标准形, 从而降低了问题的难度 借此进一步讨论了非线性切换系统在任意切换下二次可镇定问题 尽管每个子系统零动态的渐近稳定可以保证该子系统的渐近稳定, 但这不足以保证切换系统在任意切换下的渐近稳定 本文指出, 零动态存在共同 Lyapunov 函数能够提供系统的共同 Lyapunov 函数 本文讨论了比文献[7]更广泛的系统, 在借助一致标准形讨论非线性切换系统的镇定问题时, 这里采用的零动态稳定条件弱于文献[7]中的 ISS.

应该指出, 虽然一致标准形的概念是一般非线性系统标准形概念的自然推广, 它的存在性条件却很严格 尽管如此, 本文的结果说明了一致标准形是解决非线性切换系统镇定问题的一个有力工具

参考文献(References)

[1] Liberzon D, Morse A S. Basic Problems in Stability and Design of Switched Systems[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, 19(5): 59-70.

[2] Liberzon D, Tempo R. Gradient Algorithms for Finding Commom Lyapunov Functions[A]. *Proc of the 42nd IEEE Conf on Decision and Control*[C]. Maui, Hawaii, 2003: 4782-4787.

[3] Cheng D Z. Stabilization of Planar Switched Systems [J]. *Systems Control Letters*, 2004, 51(1): 79-88.

[4] Agrachev A A, Liberzon D. Lie-algebraic Stability Criteria for Switched Systems[J]. *SIAM J Control Optim*, 2001, 40(2): 253-269.

[5] Mancilla-Aguilar J L. A Condition for the Stability of Switched Nonlinear Systems [J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 2000, 45(11): 2077-2079.

[6] Liberzon D. *Switching in Systems and Control*[M]. Boston: Birkhäuser, 2003.

[7] Nael H El-Farra, Panagiotis D Christofides. Feedback Control of Switched Nonlinear Systems Using Multiple Lyapunov Functions[A]. *Proc of the American Control Conf*[C]. Arlington, 2001: 3496-3502.

[8] Cheng D Z, Chen H F. Accessibility of Switched Linear Systems[A]. *Proc 42nd Conf on Decision and Control* [C]. Maui, Hawaii, 2003: 5759-5764.

[9] Zhao J, Spong Mark W. Hybrid Control for Global Stabilization of Cart-penduluum System [J]. *Automatica*, 2001, 37(12): 1941-1951.

[10] Isidori A. *Nonlinear Control Systems*[M]. 3rd Edition. Berlin: Springer, 1995.