

文章编号: 1001-0920(2005)10-1177-04

基于观测器的不确定广义时滞系统保成本控制

杨帆^{1,2}, 张庆灵¹

(1. 东北大学 系统科学研究所, 沈阳 110004; 2. 通化师范学院 数学系, 吉林 通化 134002)

摘要: 讨论了基于观测器的一类不确定广义时滞系统的保成本控制问题, 给出了系统保成本控制器的设计方法。控制器的构造使得闭环系统是鲁棒稳定的。利用线性矩阵不等式以及 Lyapunov 函数方法, 给出了鲁棒保成本控制器存在的充分条件以及相应的可保成本指标, 并证明了这个条件等价于一组线性矩阵不等式(LMIs)的可解性问题, 同时推广了已知的相关结果。最后以算例验证了设计方法的有效性。

关键词: 观测器; 保成本控制; 广义时滞系统; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Guaranteed Cost Observer-based Control of Singular Time-delay Systems with Uncertainties

YANG Fan^{1,2}, ZHANG Qing-ling¹

(1. Institute of System Science, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. Department of Mathematics, Tonghua Teachers' College, Tonghua 134002, China. Correspondent: ZHANG Qing-ling, Email: qlzhang@mail.neu.edu.cn)

Abstract: The problem of guaranteed cost observer-based controller design for a class of singular systems with state delay and parameter uncertainties is investigated. The design method of guaranteed cost observer-based controller is given. Sufficient conditions for the existence of guaranteed cost observer-based state feedback control law and corresponding guaranteed cost performance index are obtained. It makes that the closed-loop system is robust stable. In terms of linear matrix inequalities and Lyapunov function, it is shown that these conditions are equivalent to the solvability of some linear matrix inequalities, and some known results are generalized. A numerical example shows the effectiveness of the proposed method.

Key words: Observer; Guaranteed cost control; Singular time-delay system; LMI

1 引言

Chang 等于 1972 年提出了不确定系统的保成本控制概念^[1], 目前人们对正常(时滞)系统的保成本控制问题的研究已取得了丰富的研究成果^[2~8]。对于广义(时滞)系统, 因为保成本控制问题不仅要求闭环系统鲁棒稳定, 性能指标值具有一个确定的上界, 而且要求闭环系统正则无脉冲, 所以广义(时滞)系统的保成本控制问题比正常系统复杂得多。对于实际控制系统的状态变量不能全部量测, 基于系统状态观测器设计不确定时滞系统的保成本控制

器已逐渐引起人们的重视。文献[9]研究了广义系统的最优保成本控制, 本文则针对具有状态滞后的不确定性广义时滞系统, 研究了基于观测器的保成本控制问题。

2 问题描述

考虑如下一类不确定广义时滞系统:

$$\begin{aligned} \dot{E}x(t) &= (A + \Delta A(t))x(t) + (A_d + \Delta A_d(t))x(t-d) + (B + \Delta B(t))u(t); \\ y(t) &= (C + \Delta C(t))x(t) + (D + \Delta D(t))u(t); \end{aligned}$$

收稿日期: 2004-09-10; 修回日期: 2004-11-19

基金项目: 辽宁省普通高校学科带头人基金项目(124210); 辽宁省科技厅基金项目(2001401041)

作者简介: 杨帆(1966—), 女, 吉林通化人, 副教授, 博士生, 从事广义系统、鲁棒控制等研究; 张庆灵(1956—), 男, 辽宁营口人, 教授, 博士生导师, 从事广义系统、鲁棒控制和分散控制等研究

$$x(t_0 + \theta) = \Phi(\theta) = [\phi(\theta) \quad \psi(\theta)]^T, \quad \forall \theta \in [-d, 0] \quad (1)$$

其中: $x(t), u(t), y(t)$ 分别为具有适当维数的系统的状态向量、控制输入和量测输出; 时滞常数 $d > 0$; $\Phi(t)$ 为 $[-d, 0]$ 上的满足相容性条件的已知连续可微初始函数; E, A, A_d, B, C 和 D 为已知的适维实常数矩阵; 矩阵 E 是奇异矩阵; 不确定参数矩阵 $\Delta A(t), \Delta B(t), \Delta A_d(t), \Delta C(t), \Delta D(t)$ 是允许的, 即满足

$$\begin{bmatrix} \Delta A(t) & \Delta B(t) \\ \Delta C(t) & \Delta D(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} F(t) [E_1 \quad E_2],$$

$$\Delta A_d(t) = M_3 F(t) E_3, F^T(t) F(t) \leq I, \quad (2)$$

$M_i, E_i (i = 1, 2, 3)$ 为已知适维实常数矩阵. 设 (A, B) 可控, (A, C) 可观. 则系统(1)的性能指标为

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt, \quad (3)$$

其中: Q, R 为给定的正定对称加权矩阵

本文的目的是, 对于不确定广义时滞系统(1), 设计观测器型控制器

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A \hat{x}(t) + A_d \hat{x}(t-d) + B u(t) + L(y - C \hat{x}(t) - D u(t)), \\ u(t) = K \hat{x}(t), \hat{x}(t_0 + \theta) = 0, \\ \forall \theta \in [-d, 0], \end{cases} \quad (4)$$

使系统(1)是鲁棒可镇定, 且对于允许的不确定性指标(3)不超过某个确定常数 J^* , 即 $J \leq J^*$. 其中 $x(t), L, K$ 分别为适维的观测器状态向量、观测器增益矩阵和反馈控制器增益矩阵. 不失一般性, 设

$$E = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix},$$

$$A_d = \begin{bmatrix} A_{d1} & A_{d2} \\ A_{d3} & A_{d4} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

$$C = [C_{11} \quad C_{12}]$$

引入误差向量 $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, 则误差动态方程及闭环系统分别为

$$\dot{e}(t) = \Delta \tilde{A} e(t) + (A_L - \Delta A_L K) e(t) + A_d e(t-d) + \Delta A_d x(t-d), \quad (5)$$

$$\dot{Ex}(t) = (A_K + \Delta A_K)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t-d) - (B + \Delta B)K e(t). \quad (6)$$

其中

$$\begin{cases} A_K = A + BK; A_L = A - LC; \\ \Delta A_K = \tilde{M}_1 F(t) \tilde{E}_1; \Delta A_L = \tilde{M}_4 F(t) \tilde{E}_3; \\ \Delta \tilde{A} = \tilde{M}_3 F(t) \tilde{E}_2; \\ \tilde{M}_i = [M_i \quad M_i], i = 1, 2; \\ \tilde{M}_3 = [\tilde{M}_1 \quad -L\tilde{M}_2]; \\ \tilde{M}_4 = [M_1 \quad -LM_2]; \tilde{E}_1 = [E_1^T \quad K^T E_2^T]; \\ \tilde{E}_2 = [\tilde{E}_1^T \quad \tilde{E}_1^T]^T; \tilde{E}_3 = [E_3^T \quad E_2^T]^T. \end{cases} \quad (7)$$

定义 1 若存在控制律(4)和正数 J^* , 使得对于允许的不确定性, 闭环系统鲁棒稳定且满足 $J \leq J^*$, 则称 J^* 为系统(1)的一个可保成本指标, 式(4)称为系统(1)的基于观测器的保成本控制器

定义 2^[10] 若存在反馈控制律 $u(t) = Kx(t)$, 正定对称矩阵 S 和可逆矩阵 P , 对不确定性(2)有

$$\begin{cases} E^T P = P^T E = 0, \\ (A_K + \Delta A_K)^T P + P^T (A_K + \Delta A_K) + \\ P^T (A_d + \Delta A_d) S^{-1} (A_d + \Delta A_d)^T P < 0, \end{cases}$$

则系统(1)是广义二次可镇定的. 其中: $A_K = A + BK, \Delta A_K = \Delta A + \Delta B K$.

引理 1^[10] 不确定广义时滞系统(1)如果是广义二次可镇定的, 那么它是鲁棒可镇定的

引理 2^[11] 广义时滞系统 $\dot{Ex}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d), A_d^{-1} A_{d4} < 1$. 若存在正数 α, β, γ 和连续函数 $V: C_n[-h, 0] \rightarrow R$ 使得: 1) $\beta |\phi(0)|^2 \leq V(\phi) \leq \gamma |\phi|^2$, 2) $\dot{V}(\phi) \leq -\alpha |\phi(0)|^2$, 则它是渐近稳定的

3 主要结论

定理 1 给定适维正定对称矩阵 Q, R . 如果存在适维正定对称矩阵 S_i , 可逆矩阵 $P_i (i = 1, 2)$ 和纯量 $\epsilon_i > 0 (i = 0, 1, \dots, 4)$, 使得对于满足式(2)的不确定性, 有如下 Riccati 不等式成立:

$$\begin{cases} \Omega_1 = \\ P_1^T (A_K + \Delta A_K) + (A_K + \Delta A_K)^T P_1 + \\ S_1 + Q + (1 + \epsilon_0) K^T R K + \epsilon_1 P_1^T B B^T P_1 + \\ \epsilon_2 P_1^T \tilde{M} \tilde{M}^T P_1 + \epsilon_3 \tilde{E}_2^T \tilde{E}_2 + P_1^T (A_d + \\ \Delta A_d) (S_1 - \epsilon_4 \tilde{E}_3^T E_3)^{-1} (A_d + \Delta A_d)^T P_1 < 0, \\ \Omega_2 = \\ P_2^T (A_L - \Delta A_L K) + (A_L - \Delta A_L K)^T P_2 + \\ S_2 + (1 + \epsilon_1) K^T R K + \epsilon_1 K^T K + \\ \epsilon_2 K^T E_2^T E_2 K + \epsilon_3 P_2^T \tilde{M} \tilde{M}^T P_2 + \\ \epsilon_4 P_2^T \tilde{M} \tilde{M}^T P_2 + P_2^T A_d S_2^{-1} A_d^T P_2 < 0, \end{cases} \quad (8)$$

和广义约束 $E^T P_i = P_i^T E = 0 (i = 1, 2)$ 成立, 那么广义时滞系统(1)是鲁棒可镇定且具有保成本上界. 其中: $A_K, \Delta A_K, A_L, \Delta A_L, \Delta A_d, \tilde{M}_3, \tilde{E}_2$ 等如式(7)所定义, 且二次保成本的一个上界为

$$J \leq J^* = \Phi^T P_1 \Phi + \text{Trace} \left[S_1 \int_{-d}^0 x(s) x^T(s) ds \right] + \text{Trace} \left[S_2 \int_{-d}^0 x(s) x^T(s) ds \right]. \quad (9)$$

证明过程类似于文献[10]中定理1的证明, 此略. 下面给出基于观测器保成本控制器存在的 LMI 方法:

定理 2 给定适维正定对称矩阵 Q, R . 对于满足式(2)的不确定性, 存在适维正定对称矩阵 $S_i (i = 1, 2)$, 可逆矩阵 $P_i (i = 1, 2)$ 和纯量 $\epsilon_j > 0 (j = 0, 1, \dots, 4)$, 有上述广义约束和式(8)成立的充分必要条件是存在正定对称矩阵 \tilde{S}_1, S_2 , 可逆矩阵 $X_i (i = 1, 2)$, 矩阵 $Y_i (i = 1, 2)$ 和纯量 $\epsilon_j > 0 (j = 0, 1, \dots, 7)$ 有广义约束 $E^T X_1 = X_1^T E = 0, E^T X_2 = X_2^T E = 0$ 和如下线性矩阵不等式成立:

$$W_1 = \begin{bmatrix} H_1 & A_d X_1 & X_1^T & Y_1^T & Y_1^T & X_1^T E_1^T \\ * & -\tilde{S}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -Q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -R^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_1 R^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}\epsilon_3 I \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ Y_1^T E_2^T & X_1^T E_1^T & Y_1^T E_2^T & 0 & X_1^T E_3^T & X_1^T E_3^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\epsilon_3 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -\epsilon_5 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\epsilon_6 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_4 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_7 I & 0 \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} H_2 & X_2^T A_d & X_2^T M_1 & Y_2 M_2 \\ * & -S_2 & 0 & 0 \\ * & * & -\frac{1}{2}\epsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{2}\epsilon_3 I \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ X_2^T M_3 & X_2^T M_1 & Y_2 M_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\epsilon_4 I & 0 & 0 \\ * & -\epsilon_1 I & 0 \\ * & * & -\epsilon_7 I \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

其中

$$H_1 = X_1^T A + A^T X_1 + B Y_1 + Y_1^T B^T + \tilde{S}_1 + \epsilon_6 B B^T + (\epsilon_2 + 2\epsilon_3) M M^T + \epsilon_6 M M^T,$$

$$H_2 = X_2^T A + A^T X_2 - Y_2 C - C^T Y_2^T + S_2 + (1 + \epsilon_1) K^T R K + \epsilon_1^1 K^T K + \epsilon_1^1 K^T E_2^T E_2 K + 2\epsilon_1^1 K^T E_2^T E_2 K.$$

此时观测器型控制器参数为 $K = Y_1 X_1^{-1}, L = X_2^{-T} Y_2$. * 代表相应的对称块矩阵, 下同

证明 为了设计观测器型的保成本控制器(4), 设 $P_1^{-1} = X_1, X_1^T S_1 X_1 = \tilde{S}_1, Y_1 = K X_1$, 利用 Schur 补引理并经过矩阵运算即可证明式(10)成立. 再将由式(10)求得的 $K, \epsilon_j (j = 0, 1, \dots, 4)$ 代入 $\Omega_2 < 0$ 中, 并设 $P_2 = X_2, X_2^T L = Y_2$, 可证明式(11)成立, 并有

$$J^* = \Phi(0) E^T X_1^{-1} \Phi(0) + \text{Trace} \left\{ X_1^{-T} \tilde{S}_1 X_1^{-1} \int_0^d \Phi(s) \Phi(s) ds \right\} + \text{Trace} \left\{ S_2 \int_0^d \Phi(s) \Phi(s) ds \right\}. \quad (12)$$

根据广义约束式 $E^T X_1 = X_1^T E = 0$, 矩阵 X_1 具有如下形式:

$$X_1 = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix},$$

其中: $X_{11}^T = X_{11} > 0, X_{22}$ 可逆

设 $\Phi(0)$ 是一个零均值随机变量, 即满足 $E\{\Phi(0)\Phi(0)\} = I$, 则式(12)中 $\Phi(0)E^T X_1^{-1} \Phi(0)$ 的数学期望值满足 $E\{\Phi(0)E^T X_1^{-1} \Phi(0)\} = \text{Trace}(X_{11}^{-1})$. 从而系统(1)的一个保成本性能上界

$$J^* = \text{Trace}(X_{11}^{-1}) + \text{Trace} \left\{ X_1^{-T} \tilde{S}_1 X_1^{-1} \int_0^d \Phi(s) \Phi(s) ds \right\} + \text{Trace} \left\{ S_2 \int_0^d \Phi(s) \Phi(s) ds \right\}. \quad (13)$$

由此, 定理 2 得证

4 数值算例

考虑具有如下参数的不确定广义时滞系统

(1):

$$E = \text{diag}[1 \ 0], A = \begin{bmatrix} -1 & -7.5 \\ -10 & 8 \end{bmatrix},$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix},$$

$$C = [-2 \ 4 \ -1], M_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 M_2 &= 1, M_3 = [-1 \ 1]^T, \\
 E_1 &= [1 \ 2], E_2 = -1, \\
 E_3 &= [1 \ -1], F(t) = \sin(3t), \\
 d &= 0.6, Q = \text{diag}[1 \ 1], R = 0.2, \\
 x(t) &= [x_1^T \ x_2^T(t)]^T, x_1(t) = e^{-t-1}, \\
 x_2(t) &= -e^{t+1}, t \in [-d, 0]
 \end{aligned}$$

利用 Matlab 中的 LM I 工具箱, 解线性矩阵不等式

(10) 和 $E^T X_1 = X_1^T E = 0$, 有

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \begin{bmatrix} 0.2095 & 0 \\ 0.2622 & -0.4204 \end{bmatrix}, \\
 Y_1 &= [-0.0586 \ -0.0725], \\
 \epsilon_0 &= 0.3154, \epsilon_1 = 1.3791, \\
 \epsilon_2 &= 0.8673, \epsilon_3 = 3.6756, \\
 \epsilon_4 &= 1.6772, \epsilon_5 = 1.1094, \\
 \epsilon_6 &= 0.8004 \\
 S_1 &= \begin{bmatrix} 1.0790 & -0.1695 \\ -0.1695 & 1.0512 \end{bmatrix}, \\
 S_2 &= \begin{bmatrix} 0.9378 & -0.0330 \\ -0.0330 & 0.8948 \end{bmatrix}, \\
 \int_{-d}^0 \phi(s) \phi(s) ds &= \\
 \begin{bmatrix} 0.1570 & -0.6000 \\ -0.6000 & 2.5810 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

从而控制器增益矩阵

$$K = Y_1 X_1^{-1} = [-0.4956 \ 0.1725]$$

再利用所得到的 $K, \epsilon_i (i = 0, 1, \dots, 4)$ 解线性矩阵不等式(11) 和 $E^T X_2 = X_2^T E = 0$, 有

$$\begin{aligned}
 X_2 &= \begin{bmatrix} 0.1643 & 0 \\ 0.1078 & -0.1084 \end{bmatrix}, \\
 Y_2 &= \begin{bmatrix} -0.0834 \\ -0.0889 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

从而观测器增益矩阵

$$L = X_2^{-T} Y_2 = [-1.0457 \ 0.8201],$$

且系统的保成本性能指标为 $\hat{J}^* = 33.8220$

5 结 论

利用线性矩阵不等式方法, 设计了观测器型的广义时滞系统保成本控制器, 得到了保成本控制器存在的充分条件. 该控制器的设计使得对容许的不确定性, 广义时滞系统是鲁棒可镇定的且保成本指标不超过某个确定的界, 并推广了文献[9]的相关

结果. 数值算例验证了所提出设计方法的有效性

参考文献 (References)

- [1] Chang S L, Peng T K C. Adaptive Guaranteed Cost Control of Systems with Uncertain Parameters [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1972, 17(4): 474-483
- [2] Costa E F, Oliveira V A. On the Design of Guaranteed Cost Controllers for a Class of Uncertain Linear Systems [J]. *Systems and Control Letters*, 2002, 46(1): 17-29
- [3] Yu L, Chu J. An LM I Approach to Guaranteed Cost Control of Linear Time-delay Systems [J]. *Automatica*, 1999, 35(6): 1155-1159
- [4] Park J H. Guaranteed Cost Stabilization of Neutral Differential Systems with Parametric Uncertainty [J]. *J of Computational and Applied Mathematics*, 2003, 15(2): 371-382
- [5] Chen G D, Yu L, Chu J. Guaranteed Cost Controller Design for Uncertain Linear Systems with Both State and Control Delays [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28(2): 314-316
- [6] Moheimani S O R, Pertersen I R. Optimal Guaranteed Cost Control of Uncertain Systems via Static and Dynamic Output Feedback [J]. *Automatica*, 1996, 32(4): 575-579
- [7] Mahmoud M S, Zribi M. Guaranteed Cost Observer-based Control of Uncertain Time-lag Systems [J]. *Computers and Electrical Engineering*, 2003, 29(1): 193-212
- [8] Petersen I R, McFarlane D C. Optimal Guaranteed Cost Control and Filtering for Uncertain Linear Systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(9): 1971-1977
- [9] Xiong J L, Zhang Q L. Optimal Guaranteed Cost Control for Descriptor Systems with Uncertainties [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(4): 588-591
- [10] Xu S Y, Paul Van Dooren, Radu Stefan, et al. Robust Stability and Stabilization for Singular Systems with State Delay and Parameter Uncertainty [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(7): 1122-1127
- [11] Fridman E. Stability of Linear Descriptor Systems with Delay: A Lyapunov-based Approach [J]. *J Mathematical Analysis and Application*, 2002, 273(1): 24-44