文章编号: 1001-0920(2005)10-1091-06

基于观测器的滑模控制非线性中立型时滞系统

吴立刚, 王常虹, 曾庆双
(哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001)

摘 要: 针对一类状态不可测的非线性不确定中立型时滞系统, 基于滑模控制理论, 采用线性矩阵不等式的处理方法, 提出了滑动模态鲁棒渐近稳定时滞相关的充分条件, 设计了一类滑模观测器, 同时给出了该观测器存在的充分条件; 然后应用滑模控制的趋近率方法和基于观测器所得到的系统估计状态, 综合了一类滑模控制器, 该控制器同时保证了估计状态下滑模面和估计误差状态下滑模面的渐近可达性; 最后通过数值实例证明了该控制方案的可行性

关键词: 滑模控制; 观测器; 非线性; 中立型时滞系统; 线性矩阵不等式
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Observer-based Sliding Mode Control for a Class of Nonlinear Neutral Delay Systems

WU Li-gang, WANG Chang-hong, ZENG Qing-shuang
(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China. Correspondent: WU Li-gang, E-mail: ligangwu@hit.edu.cn)

Abstract: The issues of sliding mode observer design and observer-based controller design are addressed for a class of uncertain nonlinear neutral delay systems. First, a delay-dependent sufficient condition is proposed for robust asymptotic stability of the sliding mode dynamics. A sliding mode observer is designed, and a sufficient condition is given for the existence of such an observer. Based on the estimated system state, a controller is synthesized by combining the sliding mode control theory with the reaching law technology. This proposed control scheme guarantees the reachability of the sliding surfaces defined in both the state estimation space and the state estimation error space. A numerical example is given to illustrate the proposed design scheme.

Key words: Sliding mode control; Observer; Nonlinear; Neutral delay systems; Linear matrix inequality (LMI)

1 引 言

线性不确定时滞系统状态观测器的设计问题一直受到人们的广泛关注, 并已取得一系列研究成果. 但当系统中含有非线性时, 设计则变得很困难. 近年来, 人们提出一种滑模观测器, 它因包含一项切换式控制而能有效处理非线性系统的状态观测问题. 关于滑模观测器的设计主要有两种方法[1~5]: 一种是在Luenberger 观测器的基础上增加一个滑模控制器, 该控制器可用于消除非线性和不确定性带来的影响[1]; 另一种是由Utkin 根据滑模面上的等价控制原理提出的[2]. 后者由于需要一系列的可观测性假设和模型变换较前者更为保守和复杂.

近年来, 关于中立型时滞系统的鲁棒稳定性分析和鲁棒镇定问题也取得一定的进展[6~8], 但这些结论和方法都是在系统状态可观测的假设条件下得到的. 因此, 关于中立型时滞系统的观测器设计和基于观测器的控制问题, 尚在进一步研究中.

本文研究了一类非线性不确定中立型时滞系统的滑模观测器设计问题和基于观测状态下的滑模控制问题. 文中首先给出滑动模态渐近稳定的时滞相关的充分条件; 其后设计了一类滑模观测器并相应地给出了观测器存在的充分条件; 在已得到的系统

收稿日期: 2004-09-27; **修回日期**: 2004-12-17.
基金项目: 国家自然科学基金项目(69874008).
作者简介: 吴立刚(1977—), 男, 江西宜黄人, 博士生, 从事时滞系统、鲁棒控制等研究; 王常虹(1961—), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能控制、鲁棒控制等研究

估计状态基础上应用趋近率的方法设计了滑模控制器, 该控制器同时保证了估计状态下的滑模面和估计误差状态下的滑模面的渐近可到达性

2 问题描述与准备知识

考虑如下非线性不确定中立型时滞系统:

$$\begin{aligned}&D(\dot{x}_t)=\\&(A+\Delta A(t))x(t)+(A_d+\Delta A_d(t))x(t-d)+B(u(t)+f(x(t),t)),\\&x(t)=\phi(t),\ \forall t\in[-\bar{d},0];\end{aligned}\tag{1}$$

$$y(t)=Cx(t);\tag{2}$$

$$D(\dot{x}_t):=\dot{x}(t)-D\dot{x}(t-\tau).\tag{3}$$

其中: $x(t)\in R^n$ 为系统状态; $u(t)\in R^m$ 为控制输入; $y(t)\in R^p$ 为测量输出; $\tau,d\geq 0$ 为未知实常数时滞且满足 $\bar{d}=\max\{\tau,d\}$; A,A_d,D,C 为具有适当维数的实常数矩阵, $f(x(t),t)\in R^n$ 为非线性函数; $\phi(t)$ 为初始条件; $\Delta A(t),\Delta A_d(t)\in R^{n\times n}$ 为实矩阵函数, 表示时变参数不确定性, 假定其范数有界且具有如下形式:

$$[\Delta A(t)\quad \Delta A_d(t)]=MF(t)[N\quad N_d].\tag{4}$$

其中: $F(t)$ 为未知的时变实矩阵; M,N,N_d 为已知实常数矩阵, 表征了不确定性的结构和相应的权系数, 使不确定性 $F(t)$ 满足 $F^T(t)F(t)\leq I,\ \forall t$ 式(4)可表示出大多数不确定系统中的参数不确定性 尽管这种表示可能比较保守, 但它是一种非常通用的参数不确定性描述, 尤其适合于时变不确定系统

定义 1 微分算子 $D:C_{\tau,n}\to R^n$ 定义如下:

$$D(x_t)=x(t)-Dx(t-\tau),\tag{5}$$

其中 $C_{\tau,n}=C([-\tau,0],R^n)$ 表示Banach 空间上的连续函数

定义 2 称微分算子 D 为稳定的, 如果下面方程的零解是一致渐近稳定的:

$$D(x_t)=0,\ t\geq 0,\ x_0=\varphi\in\{\phi: D(\phi)=0\}.$$

为处理问题方便, 作如下假设:

假设 1 矩阵 D 为 Schur-cohn 稳定, 即 $D\neq 0$ 且满足 $\|D\|<1$.

假设 2 存在实函数 $\rho(t)>0$ 使得 $f(x(t),t)$ 满足 $\|f(x(t),t)\|\leq\rho(t)$.

假设 1 保证了微分算子 D 的稳定性[9].

设计如下形式的滑模观测器:

$$\begin{aligned}&D(\dot{\hat{x}}_t)=\\&A\hat{x}(t)+A_d\hat{x}(t-d)+Bu(t)+Bv(t)+L(y(t)-C\hat{x}(t)),\end{aligned}\tag{6}$$

$$\hat{y}(t)=C\hat{x}(t).\tag{7}$$

其中: $D(\dot{\hat{x}}_t)=\dot{\hat{x}}(t)-D\dot{\hat{x}}(t-\tau)$; $\hat{x}(t)\in R^n$ 为系统状态 $x(t)$ 的估计值; $L\in R^{n\times p}$ 为待设计的观测器增益矩阵; $v(t)$ 为待设计的外部非连续反馈补偿控制

由式(1) 和(5) 可得到如下状态估计误差动态方程:

$$\begin{aligned}&D(\dot{e}_t)=\\&(A-LC+\Delta A(t))e(t)+(A_d+\Delta A_d(t))e(t-d)+\\&\Delta A(t)\hat{x}(t)+\Delta A_d(t)\hat{x}(t-d)-B(v(t)-f(x(t),t)),\end{aligned}\tag{8}$$

$$e_y(t)=Ce(t).\tag{9}$$

其中

$$e(t)=x(t)-\hat{x}(t),$$

$$D(e_t)=e(t)-De(t-\tau).$$

因此, 本文研究的问题可描述为: 针对系统(1) 设计形如式(6) 的滑模观测器, 并基于估计状态设计滑模控制器 $u(t)$, 使得状态估计动态式(6) 和状态估计误差动态(8) 渐近稳定, 并保证在有限时间内式(6) 和(8) 的轨迹分别到达在各自空间定义的滑模面上

引理 1[10] 给定矩阵 $Q=Q^T, R=R^T>0$ 以及适当维数的矩阵 M,N, 则 $Q+MFN+N^TF^TM^T<0$, 对于任意满足 $F^TF\leq R$ 的 F 成立的充要条件是存在 $\lambda>0$ 使得 $Q+\lambda MM^T+\lambda^{-1}N^TRN<0$.

引理 2[11] 给定矩阵 $G=G^T\in R^{n\times n}$ 和 $U\in R^{n\times m}$, 假定矩阵 U 列满秩且满足 $m<n$, 那么对于标量 σ 有 $G-\sigma U^TU<0$, 当且仅当 $\tilde{U}^TG\tilde{U}<0$ 成立 这里矩阵 $\tilde{U}\in\{M\in R^{m\times n}: U^TM=0\}$.

3 滑动模态的鲁棒稳定性分析

下面首先讨论系统轨迹进入滑模面后的运动稳定性问题, 选择如下线性滑模面函数:

$$s(x(t),t)=B^TP^{-1}x(t),\ 0<P\in R^{n\times n}.\tag{10}$$

引入状态变换[11]

$$z(t)=\begin{bmatrix}z_1(t)\\z_2(t)\end{bmatrix}=Tx(t),$$

$$T=\begin{bmatrix}(\tilde{B}^TP\tilde{B})^{-1}\tilde{B}^T\\(B^TP^{-1}B)^{-1}B^TP^{-1}\end{bmatrix}.$$

其中: $z_1(t)\in R^{n-m}, z_2(t)\in R^m, \tilde{B}\in\{M:B^TM=0\}$.

容易得出

$$\begin{aligned}&T^{-1}=[P\tilde{B}\quad B],\\&s(z(t),t)=\\&B^TP^{-1}T^{-1}z(t)=B^TP^{-1}Bz_2(t).\end{aligned}\tag{11}$$

因此, 在滑模面 $s(z(t),t)=0$ 上的 $(n-m)$ 维滑动模态方程可描述为

$$\begin{aligned}&\dot{z}_1(t)=\\&(\tilde{B}^TP\tilde{B})^{-1}\tilde{B}^T[(A+\Delta A(t))P\tilde{B}z_1(t)+(A_d+\Delta A_d(t))P\tilde{B}z_1(t-d)+DP\tilde{B}\dot{z}_1(t-\tau)].\end{aligned}\tag{12}$$

定义微分算子 $\bar{D}(z_{1t}) := z_1(t) - \bar{D} z_1(t-\tau)$, 为处理问题简便, 并进一步假定适当地择矩阵 P 和 $\tilde{B}$ 使得矩阵 $\bar{D} := (\tilde{B}^{\mathrm{T}} P \tilde{B})^{-1} \tilde{B}^{\mathrm{T}} D P \tilde{B}$ 为 Schur-Cohn 稳定

限于篇幅, 下面给出降阶滑动模态(12) 渐近稳定的时滞相关的充分条件(证明略).

定理 1　对于任意的时滞 $\tau > 0$ 和 $d\ (0 \le d \le \bar{d})$, 滑动模态(12) 渐近稳定, 如果矩阵 $\bar{D}$ 是 Schur-Cohn 稳定的且存在适当维数的矩阵 $P > 0$, $R_1 > 0, R_2 > 0, Q_j > 0\ (j = 1, 2, \cdots, 4)$ 以及常数 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} (1,1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & PA_d & \bar{d}PA_d & \bar{d}PA_d & (N+N_d)^{\mathrm{T}} \\ * & (2,2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -Q_1-\lambda_1 B^{\mathrm{T}}B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_2-\lambda_1 B^{\mathrm{T}}B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -P-\lambda_1 B^{\mathrm{T}}B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -P-\lambda_1 B^{\mathrm{T}}B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -2P-\lambda_1 B^{\mathrm{T}}B & 0 & 0 & N_d^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & * & * & * & * & \bar{d}R_1-\lambda_1 B^{\mathrm{T}}B & 0 & \bar{d}N_d^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \bar{d}R_2-\lambda_1 B^{\mathrm{T}}B & \bar{d}N_d^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0 \qquad (13)$$

其中

$$(1,1) = (A + A_d)^{\mathrm{T}}P + P(A + A_d) - \lambda_1 B^{\mathrm{T}}B + PMM^{\mathrm{T}}P,$$

$$(2,2) = Q_1 + Q_2 + \bar{d}Q_3 + \bar{d}Q_4 - \lambda_1 B^{\mathrm{T}}B,$$

符号 * 表示由矩阵对称性得到的矩阵块(以下同).

4　滑模观测器设计和基于观测器的控制器设计

下面设计具有形如式(6) 的滑模观测器. 首先, 分别在状态估计空间和状态估计误差空间中定义如下滑模面函数:

$$\hat{s}(\hat{x}_t) = B^{\mathrm{T}}R(\hat{x}(t) - D\hat{x}(t-\tau)), \qquad (14)$$

$$s_e(e_t) = B^{\mathrm{T}}R(e(t) - De(t-\tau)), \qquad (15)$$

其中 $0 < R \in \mathrm{R}^{n\times n}$.

设计如下外部非连续反馈补偿控制:

$$v(t) = \epsilon_1 s_e(e_t) + (\rho(t) + \epsilon_1)\,\mathrm{sign}(s_e(e_t)). \qquad (16)$$

其中: ϵ_1 为正实常数; $\rho(t)$ 为 $f(x(t), t)$ 的上界函数

根据滑动模态存在的条件, 选择指数趋近率[12], 得到如下的基于估计状态的等价控制和切换控制:

$$u_{eq}(t) = -B^{\mathrm{T}}R(A\hat{x}(t) + A_d\hat{x}(t-d)), \qquad (17)$$

$$u_n(t) = -\epsilon_2\hat{s}(\hat{x}_t) - (\rho(t) + \epsilon_1 + \epsilon_2)\,\mathrm{sign}(\hat{s}(\hat{x}_t)), \qquad (18)$$

其中常数 ϵ_2 满足 $\epsilon_2 \ge \epsilon_1/2 > 0$. 因此, 系统控制输入为 $u(t) = u_{eq}(t) + u_n(t)$.

定理 2　如果矩阵 D 是 Schur-Cohn 稳定的且存在适当维数的矩阵 $Y, R > 0, X_j > 0\ (j = 1, 2, 3, 4)$ 和常数 $\delta_j > 0\ (j = 1, 2, 3, 4)$ 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\bar{\Pi} = \begin{bmatrix} \bar{\Pi}_{11} & \bar{\Pi}_{12} & RA_d & (YC)^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_3 \\ * & \Pi_{22} & 0 & (YCD)^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Pi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \bar{\Pi}_{44} & \Pi_{45} & RA_d & \kappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \bar{\Pi}_{55} & 0 & 0 & \sqrt{2}D^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}R & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \bar{\Pi}_{66} & 0 & 0 & A_d^{\mathrm{T}}R & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\kappa_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\kappa_4 \end{bmatrix} < 0, \qquad (19)$$

则包含状态估计动态(6) 和状态估计误差动态(8) 的整个闭环系统将渐近稳定, 且观测器增益阵 L 可表示为 $L = R^{-1}Y$. 其中

$$\kappa_1 = \{\sqrt{2}RBB^{\mathrm{T}}, \sqrt{2}A^{\mathrm{T}}R\},$$

$$\kappa_2 = \mathrm{diag}\{I, I\},$$

$$\kappa_3 = \{RM, RM, RM, RM\};$$

$\kappa_4 = \mathrm{diag}\{\delta_1 I, \delta_2 I, \delta_3 I, \delta_4 I\}$;

$\overline{\Pi}_{11} = RA - YC + (RA - YC)^{\mathrm{T}} + X_1 + X_2 + \delta_1 N^{\mathrm{T}} N$,

$\overline{\Pi}_{12} = (RA - YC + X_1 + X_2 + \delta_1 N^{\mathrm{T}} N) D$,

$\overline{\Pi}_{44} = RA + A^{\mathrm{T}} R + X_3 + X_4 + \delta_3 N^{\mathrm{T}} N$,

$\overline{\Pi}_{55} = D^{\mathrm{T}} (X_3 + X_4 + \delta_3 N^{\mathrm{T}} N) D - X_3$,

$\overline{\Pi}_{66} = \delta_4 N_d^{\mathrm{T}} N_d - X_4$,

$\Pi_{jj}\ (j = 2, 3)$ 和 Π_{45} 的定义见式(25).

证明 取如下 Lyapunov-Krasovskii 范函:

$$V_1 = \mathcal{D}^{\mathrm{T}}(e_t) R \mathcal{D}(e_t) + \int_{t-\tau}^{t} e^{\mathrm{T}}(\theta) X_1 e(\theta) \mathrm{d}\theta + \int_{t-d}^{t} e^{\mathrm{T}}(\theta) X_2 e(\theta) \mathrm{d}\theta + \mathcal{D}^{\mathrm{T}}(\hat{x}_t) R \mathcal{D}(\hat{x}_t) + \int_{t-\tau}^{t} \hat{x}^{\mathrm{T}}(\theta) X_3 \hat{x}(\theta) \mathrm{d}\theta + \int_{t-d}^{t} \hat{x}^{\mathrm{T}}(\theta) X_4 \hat{x}(\theta) \mathrm{d}\theta \tag{20}$$

求 V_1 的导数, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = &\ 2\mathcal{D}^{\mathrm{T}}(e_t) R (A - LC) e(t) + 2\mathcal{D}^{\mathrm{T}}(e_t) R A_d e(t-d) + \\ & 2\mathcal{D}^{\mathrm{T}}(\hat{x}_t) R A \hat{x}(t) + 2\mathcal{D}^{\mathrm{T}}(\hat{x}_t) R A_d \hat{x}(t-d) + 2\mathcal{D}^{\mathrm{T}}(\hat{x}_t) R L C e(t) + \\ & 2\mathcal{D}^{\mathrm{T}}(e_t) R [\Delta A(t) e(t) + \Delta A_d(t) e(t-d) + \Delta A(t) \hat{x}(t) + \Delta A_d(t) \hat{x}(t-d)] + \\ & e^{\mathrm{T}}(t)(X_1 + X_2) e(t) - e^{\mathrm{T}}(t-\tau) X_1 e(t-\tau) - e^{\mathrm{T}}(t-d) X_2 e(t-d) + \\ & \hat{x}^{\mathrm{T}}(t)(X_3 + X_4)\hat{x}(t) - \hat{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau) X_3 \hat{x}(t-\tau) - \hat{x}^{\mathrm{T}}(t-d) X_4 \hat{x}(t-d) - \\ & 2\mathcal{D}^{\mathrm{T}}(e_t) R B (v(t) - f(x(t), t)) + 2\mathcal{D}^{\mathrm{T}}(\hat{x}_t) R B (u(t) + v(t)). \end{aligned} \tag{21}$$

另外, 以下不等式总成立:

$$\begin{aligned} & 2\mathcal{D}^{\mathrm{T}}(e_t) R \Delta A(t) e(t) = 2\mathcal{D}^{\mathrm{T}}(e_t) R M F(t) N e(t) \leqslant \\ & \delta_1^{-1} \mathcal{D}^{\mathrm{T}}(e_t) R M M^{\mathrm{T}} R \mathcal{D}(e_t) + \delta_1 e^{\mathrm{T}}(t) N^{\mathrm{T}} N e(t), \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} & 2\mathcal{D}^{\mathrm{T}}(e_t) R \Delta A_d(t) e(t-d) = 2\mathcal{D}^{\mathrm{T}}(e_t) R M F(t) N_d e(t-d) \leqslant \\ & \delta_2^{-1} \mathcal{D}^{\mathrm{T}}(e_t) R M M^{\mathrm{T}} R \mathcal{D}(e_t) + \delta_2 e^{\mathrm{T}}(t-d) N_d^{\mathrm{T}} N_d e(t-d), \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} & 2\mathcal{D}^{\mathrm{T}}(e_t) R \Delta A(t) \hat{x}(t) = 2\mathcal{D}^{\mathrm{T}}(e_t) R M F(t) N \hat{x}(t) \leqslant \\ & \delta_3^{-1} \mathcal{D}^{\mathrm{T}}(e_t) R M M^{\mathrm{T}} R \mathcal{D}(e_t) + \delta_3 \hat{x}^{\mathrm{T}}(t) N^{\mathrm{T}} N \hat{x}(t), \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} & 2\mathcal{D}^{\mathrm{T}}(e_t) R \Delta A_d(t) \hat{x}(t-d) = 2\mathcal{D}^{\mathrm{T}}(e_t) R M F(t) N_d \hat{x}(t-d) \leqslant \\ & \delta_4^{-1} \mathcal{D}^{\mathrm{T}}(e_t) R M M^{\mathrm{T}} R \mathcal{D}(e_t) + \delta_4 \hat{x}^{\mathrm{T}}(t-d) N_d^{\mathrm{T}} N_d \hat{x}(t-d). \end{aligned} \tag{25}$$

将式(16)～(18) 代入(21) 的最后两项, 得

$$\begin{aligned} & 2\mathcal{D}^{\mathrm{T}}(\hat{x}_t) R B u_{eq}(t) = \\ & -2\mathcal{D}^{\mathrm{T}}(\hat{x}_t) R B B^{\mathrm{T}} R \times (A \hat{x}(t) + A_d \hat{x}(t-d)) \leqslant \\ & 2\mathcal{D}^{\mathrm{T}}(\hat{x}_t)(R B B^{\mathrm{T}})(B B^{\mathrm{T}} R) \mathcal{D}(\hat{x}_t) + \\ & \hat{x}^{\mathrm{T}}(t) A^{\mathrm{T}} R R A \hat{x}(t) + \hat{x}^{\mathrm{T}}(t-d) A_d^{\mathrm{T}} R R A_d \hat{x}(t-d) \end{aligned} \tag{26}$$

和如下不等式:

$$\begin{aligned} & -2\mathcal{D}^{\mathrm{T}}(e_t) R B (v(t) - f(x(t), t)) + 2\mathcal{D}^{\mathrm{T}}(\hat{x}_t) R B (u_n(t) + v(t)) = \\ & -2 s_e^{\mathrm{T}}(e_t)[\epsilon_1 s_e(e_t) + (\rho(t) + \epsilon_1)\,\mathrm{sign}(s_e) - f(x(t), t)] - 2\hat{s}^{\mathrm{T}}(\hat{x}_t)[\epsilon_2 \hat{s}(\hat{x}_t) + (\rho(t) + \epsilon_1 + \\ & \epsilon_2)\,\mathrm{sign}(\hat{s}) - \epsilon_1 s_e(e_t) - (\rho(t) + \epsilon_1)\,\mathrm{sign}(s_e)] \leqslant \\ & -(\epsilon_1 \| s_e(e_t) \|^2 + 2\epsilon_1 \| s_e(e_t) \| + (2\epsilon_2 - \epsilon_1) \| \hat{s}(\hat{x}_t) \|^2 + 2\epsilon_2 \| \hat{s}(\hat{x}_t) \|) \leqslant \\ & -2(\epsilon_1 \| s_e \| + \epsilon_2 \| \hat{\epsilon} \|) \leqslant 0,\ \epsilon_2 \geqslant \epsilon_1 / 2 > 0. \end{aligned} \tag{27}$$

将式(22)～(27) 代入(21), 可得

$$\dot{V}_1 \leqslant \xi^{\mathrm{T}}(t) \Pi \xi(t). \tag{28}$$

其中

$$\xi^{\mathrm{T}}(t) := \mathrm{col}\{\mathcal{D}^{\mathrm{T}}(e_t), e^{\mathrm{T}}(t-\tau), e^{\mathrm{T}}(t-d), \mathcal{D}^{\mathrm{T}}(\hat{x}_t), \hat{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau), \hat{x}^{\mathrm{T}}(t-d)\},$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & RA_d & (RLC)^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & \Pi_{22} & 0 & (RLCD)^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & \Pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Pi_{44} & \Pi_{45} & RA_d \\ * & * & * & * & \Pi_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & \Pi_{66} \end{bmatrix}, \tag{29}$$

$\Pi_{11} = R(A - LC) + (A - LC)^{\mathrm{T}} R + X_1 + X_2 + \delta_1 N^{\mathrm{T}} N + (\delta_1^{-1} + \delta_2^{-1} + \delta_3^{-1} + \delta_4^{-1}) R M M^{\mathrm{T}} R$,

$\Pi_{12} = [R(A - LC) + X_1 + X_2 + \delta_1 N^{\mathrm{T}} N] D$,

$\Pi_{22} = D^{\mathrm{T}} (X_1 + X_2 + \delta_1 N^{\mathrm{T}} N) D - X_1$,

$\Pi_{33} = \delta_2 N_d^{\mathrm{T}} N_d - X_2$,

$\Pi_{44} = RA + A^{\mathrm{T}} R + X_3 + X_4 + \delta_3 N^{\mathrm{T}} N + 2(R B B^{\mathrm{T}})(B B^{\mathrm{T}} R) + 2 A^{\mathrm{T}} R R A$,

$\Pi_{45} = (RA + X_3 + X_4 + \delta_3 N^{\mathrm{T}} N) D$,

$\Pi_{55} = D^{T}(X_3 + X_4 + \delta_3 N^{T}N + 2A^{T}RRA)D - X_3$,

$\Pi_{66} = \delta_4 N_d^{T}N_d - N_4 + A_d^{T}RRA_d$.

从式(28) 可以看出, 如果 $\Pi < 0$, 那么对任意的 $\xi(t) \neq 0$ 均有 $\mathring{V} < 0$. 因此, 根据假设 1 可知包含状态估计动态(6) 和状态估计误差动态(8) 的整个闭环系统渐近稳定. 最后令 $Y = RL$ 且应用 Schur 补, 即可得到定理 2 中的LMI(19). □

这里, 若矩阵 $D \equiv 0$, 则系统(1) 变成一般的时滞系统, 对此本文给出以下推论:

推论 1　当 $D \equiv 0$ 时, 包含状态估计动态(6) 和状态估计误差动态(8) 的整个闭环系统渐近稳定, 如果存在适当维数的矩阵 $Y, R > 0, X_2 > 0, X_4 > 0$ 和常数 $\delta_j > 0\ (j = 1, 2, 3, 4)$ 使得以下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & RA_d & (RLC)^{T} & 0 & 0 & 0 & \kappa_3 \\ * & \Theta_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Theta_{33} & RA_d & \kappa_5 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Theta_{44} & 0 & A_d^{T}R & 0 \\ * & * & * & * & -\kappa_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\kappa_4 \end{bmatrix} < 0 \tag{30}$$

其中

$\kappa_5 = \{\sqrt{2}RBB^{T}, A^{T}R\}$,

$\Theta_{11} = R(A - LC) + (A - LC)^{T}R + X_2 + \delta_1 N^{T}N$,

$\Theta_{22} = \delta_2 N_d^{T}N_d - X_2$, $\Theta_{44} = \delta_4 N_d^{T}N_d - X_4$,

$\Theta_{33} = RA + A^{T}R + X_4 + \delta_3 N^{T}N$.

另外, 观测器增益阵 L 可表示为 $L = R^{-1}Y$. $\kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ 的定义见定理 2.

5　滑模面的可到达性分析

下面主要分析在滑模控制 $u(t)$ 作用下, 滑模面 $\hat{s}(\hat{x}_t) = 0$ 和 $s_e(e_t) = 0$ 的可到达性问题.

定理 3　如果矩阵 D 是 Schur-Cohn 稳定的且存在适当维数的矩阵 $Y, R > 0, X_j > 0\ (j = 1, 2, 3, 4)$ 和常数 $\delta_j > 0\ (j = 1, 2, 3, 4)$ 使得线性矩阵不等式(19) 成立, 而且观测器增益矩阵 L 也给定为 $L = R^{-1}Y$, 则在滑模控制 $u(t)$ 作用下, 状态估计动态轨迹和状态估计误差动态轨迹将分别渐近趋近于滑模面 $\hat{s}(\hat{x}_t) = 0$ 和滑模面 $s_e(e_t) = 0$ 上.

证明　选择如下 Lyapunov 函数:

$$V_2 = 0.5[\hat{s}^{T}(\hat{x}_t)(B^{T}RB)^{-1}\hat{s}(\hat{x}_t) + s_e^{T}(e_t)(B^{T}RB)^{-1}s_e(e_t)], \tag{31}$$

求 V_2 的导数并根据式(27) 对其进行处理, 得

$$\begin{aligned} \mathring{V}_2 = {}& \hat{s}^{T}(\hat{x}_t)(B^{T}RB)^{-1}B^{T}R[A\hat{x}(t) + A_d\hat{x}(t-d) + LCe(t)] + \\ & s_e^{T}(e_t)(B^{T}RB)^{-1}B^{T}R \times [(A - LC + \Delta A(t))e(t) + (A_d + \Delta A_d(t))e(t-d) + \Delta A(t)\hat{x}(t) + \Delta A_d(t)\hat{x}(t-d)] + \\ & \hat{s}^{T}(\hat{x}_t)(u_n(t) + v(t)) - s_e^{T}(e_t)(v(t) - f(x(t), t)) \leq \\ & -\|\hat{s}(\hat{x}_t)\|(-\gamma_1\gamma_2\|\hat{x}(t)\| - \gamma_1\gamma_3\|\hat{x}(t-d)\| - \gamma_1\gamma_4\|e(t)\| + \epsilon_2) - \\ & \|s_e(e_t)\|(-\gamma_1\gamma_2\|e(t)\| - \gamma_1\gamma_4\|e(t)\| - \gamma_1\gamma_5\|e(t)\| - \gamma_1\gamma_3\|e(t-d)\| - \\ & \gamma_1\gamma_6\|e(t-d)\| - \gamma_1\gamma_5\|\hat{x}(t)\| - \gamma_1\gamma_6\|\hat{x}(t-d)\| + \epsilon_1). \end{aligned} \tag{32}$$

其中

$\gamma_1 = \|(B^{T}RB)^{-1}\|$, $\gamma_2 = \|B^{T}RA\|$,

$\gamma_3 = \|B^{T}RA_d\|$, $\gamma_4 = \|B^{T}RLC\|$,

$\gamma_5 = \|B^{T}RM\|\|N\|$, $\gamma_6 = \|B^{T}RM\|\|N_d\|$.

定义如下区域:

$$\Sigma := \left\{ \begin{aligned} & w: \gamma_1[\gamma_2\|\hat{x}(t)\| + \gamma_3\|\hat{x}(t-d)\| + \gamma_4\|e(t)\| < \epsilon_2 - \eta, \\ & \gamma_1[(\gamma_2 + \gamma_4 + \gamma_5)\|e(t)\| + \gamma_6\|\hat{x}(t-d)\| + \gamma_5\|\hat{x}(t)\| + (\gamma_3 + \gamma_6)\|e(t-d)\|] < \epsilon_1 - \eta \end{aligned} \right\}. \tag{33}$$

其中: $w := \mathrm{col}\{\hat{x}(t), \hat{x}(t-d), e(t), e(t-d)\}$, 常数 η 满足 $0 < \eta < \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$.

从式(32) 可以看出, 在区域 Σ 内有

$$\dot{V}_2 < -\eta\|\hat{s}(\hat{x}_t)\| - \eta\|s_e(e_t)\| < 0. \tag{34}$$

因此, 根据 Lyapunov 稳定性定理可知: $\hat{s}(\hat{x}_t) \to 0$, $s_e(e_t) \to 0$. □

6　应用实例

考虑系统(1) ～ (3), 并已知

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0.5 & 2.5 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 & 0 \\ -1 & 0.8 & 0 \\ 1 & 2 & -0.6 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N_d = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} \sin t & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & \cos t \end{bmatrix},$$

$$f(x,t) = [\sin(x(t)) \quad \cos(x(t))]^{\mathrm{T}},$$

$$\tau = 1, d = 2,$$

$$x(t) = (-1, 1, 0), t \in [-2, 0].$$

利用LMI控制箱的feasp(·)函数对线性矩阵不等式(19)求解,得

$$R = \begin{bmatrix} 0.019\,6 & -0.019\,9 & -0.027\,6 \\ -0.019\,9 & 0.236\,4 & -0.253\,8 \\ -0.027\,6 & -0.253\,8 & 0.275\,2 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} -0.117\,6 & 0.143\,0 \\ -0.026\,1 & 0.032\,7 \\ 0.144\,0 & 0.006\,9 \end{bmatrix}.$$

因此,若取 $\epsilon_1 = 1$,则 $\epsilon_2 = 0.8 > \epsilon_1/2 = 0.5$,可得

$$L = R^{-1}Y = \begin{bmatrix} -2.279\,1 & -1.044\,4 \\ 1.428\,7 & -3.555\,9 \\ 1.161\,23 & -3.359\,0 \end{bmatrix},$$

$$u_{eq}(t) = -B^{\mathrm{T}}R(A\hat{x}(t) + A_d\hat{x}(t-d)) =$$

$$\begin{bmatrix} 0.034\,1 & -0.221\,5 & 0.383\,4 \\ 0.071\,4 & 0.049\,7 & 0.032\,5 \end{bmatrix}\hat{x}(t) -$$

$$\begin{bmatrix} 0.029\,0 & 0.003\,4 & 0.000\,8 \\ 0.009\,3 & 0.007\,1 & 0.002\,8 \end{bmatrix}\hat{x}(t-d),$$

$$u_n(t) = -0.8\hat{s}(\hat{x}_t) - \rho(t)\,\mathrm{sign}(\hat{s}(\hat{x}_t)),$$

$$v(t) = s_e(e_t) + \rho(t)\,\mathrm{sign}(s_e(e_t)),$$

$$s_e(e_t) = B^{\mathrm{T}}R(e(t) - De(t-\tau)) =$$

$$\begin{bmatrix} -0.008\,0 & -0.273\,7 & 0.247\,6 \\ -0.027\,9 & -0.037\,3 & -0.006\,2 \end{bmatrix}e(t) +$$

$$\begin{bmatrix} -0.525\,3 & 0.268\,2 & 0.148\,6 \\ -0.045\,1 & 0.070\,1 & -0.003\,7 \end{bmatrix}e(t-1),$$

$$\hat{s}(\hat{x}_t) = B^{\mathrm{T}}R(\hat{x}(t) - D\hat{x}(t-\tau)) =$$

$$\begin{bmatrix} -0.008\,0 & -0.273\,7 & 0.247\,6 \\ -0.027\,9 & -0.037\,3 & -0.006\,2 \end{bmatrix}\hat{x}(t) +$$

$$\begin{bmatrix} -0.525\,3 & -0.268\,2 & 0.148\,6 \\ -0.045\,1 & 0.070\,1 & -0.003\,7 \end{bmatrix}\hat{x}(t-1).$$

7 结 语

本文针对一类状态不可测的非线性不确定中立型时滞系统,进行了滑模观测器的设计以及基于观测器的滑模控制器的设计,给出了观测器存在的充分条件. 基于系统的观测状态,设计了滑模控制器,该控制保证了状态估计动态轨迹和状态估计误差动态轨迹分别渐近趋近于各自的滑模面上. 另外,当系统轨迹进入滑模面后,对滑动模态稳定性也进行了分析,给出了渐近稳定的时滞相关的充分条件. 本文克服了反馈控制中系统状态不可测的缺点,同时本文结论均是线性矩阵不等式的形式,便于计算求解. 通过实例进一步表明了该设计方案的可行性.

参考文献(References)

[1] Tan C P, Edwards C. An LMI Approach for Designing Sliding Mode Observers[J]. *Int J Control*, 2001, 74(16): 1559-1568.

[2] Haskara I, Ozguner U, Utkin V I. On Sliding Mode Observers Via Equivalent Control Approach[J]. *Int J Control*, 1998, 71(6): 1051-1067.

[3] Edwards C, Spurgeon S, Hebden R. On the Design of Sliding Mode Output Feedback Controllers[J]. *Int J Control*, 2003, 76(9/10): 893-905.

[4] Koshkouei A, Zinober A. Sliding Mode State Observation for Nonlinear System[J]. *Int J Control*, 2004, 77: 118-127.

[5] Alessandri A. Sliding-Mode Estimators for A Class of Nonlinear System Affected by Bounded Disturbances[J]. *Int J Control*, 2003, 76(3): 226-236.

[6] Niculescu S I. Further Remarks on Delay-dependent Stability of Linear Neutral Systems[A]. *Proc of MTNS* 2000[C]. Perpignan, 2000.

[7] Fridman E. New Lyapunov-Krasovskii Functionals for Stability of Linear Retarded and Neutral type Systems[J]. *System and Control Letters*, 2001, 43(4): 309-319.

[8] Ivanescu D, Niculescu S I, Verriest E I. On Delay-dependent Stability for Linear Neutral System[J]. *Automatica*, 2003, 39(2): 255-261.

[9] Wang Z, Lam J, Burnham K J. Stability Analysis and Observer design for Neutral Delay Systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(3), 478-483.

[10] Xie L. Output Feedback H_∞ Control of Systems with Parameter Uncertainty[J]. *Int J Control*, 1996, 63: 741-750.

[11] Niu Y, Lam J, Wang X. Observer-based Sliding Mode Control for Nonlinear State-delayed Systems[J]. *Int J Systems Science*, 2004, 35(2): 139-150.

[12] Gao W B, Hung J C. Variable Structure Control of Nonlinear Systems: A New Approach[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 1993, 40(1): 45-55.