文章编号: 1001-0920(2005)10-1107-04

一类广义时滞系统的极小极大控制

姜 囡[a,b], 井元伟[b], 邢 伟[c]
(东北大学 a. 教育部暨辽宁省流程工业综合自动化重点实验室, b. 信息科学与工程学院, c. 理学院, 沈阳 110004)

摘 要: 研究一类广义时滞系统的极小极大控制问题, 目的是利用构造局部检验函数的方法设计极小极大控制器, 使得在最坏的干扰下系统的性能指标上界极小. 利用线性矩阵不等式(LMI)给出了广义时滞系统极小极大控制器存在的充分条件, 讨论了闭环系统的容许性, 并将所得结果推广到含有不确定性的广义时滞系统. 最后以数值算例说明了所提出的控制器设计方法的有效性和可行性.

关键词: 广义系统; 时滞; 极小极大; 不确定性; 线性矩阵不等式
中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Minimax Control of Descriptor Systems with Time-delay

JIANG Nan[a,b], *JING Yuan-wei*[b], *XING Wei*[c]
(a. Key Laboratory of Process Industry Automation, Ministry of Education; b. School of Information Science and Engineering, c. School of Science, Northeastern University, Shenyang 110004, China. Correspondent: JIANG Nan, E-mail: qsw_jn@163.com)

Abstract: The minimax control of delay descriptor systems is discussed. A minimax controller is designed by means of structure local criterion function, which makes the plant get the minimum under condition of worst case disturbance. And the minimax controller is got to make the close-loop system admissible and the judgment is expressed by LMI. Furthermore, this kind of result is extended to the descriptor systems with uncertainty. A numerical example shows the effectiveness of the descriptor systems with uncertainty.

Key words: Descriptor system; Time-delay; Minimax control; Uncertainty; LMI

1 引　　言

近年来, 随着控制理论的不断发展和完善, 极小极大控制理论的研究已提升到了一个新的高度. 极小极大控制问题属于保性能控制的范畴, 其特点是力求在整个时间区间内综合考虑过程偏差、控制消耗能量、干扰以及不确定性几方面总的结果最小. 所设计的极小极大控制器使得在最坏的干扰下系统的性能指标上界极小. 文献[1,2]针对标准线性连续系统和离散系统的极小极大控制问题进行了充分讨论. 但随着广义系统理论的提出, 以及实际工程问题中普遍存在的时滞现象[3~5], 广义时滞系统极小极大控制理论的研究显得十分必要.

本文针对广义时滞系统, 利用文献[1,2]中的方法将极小极大控制器的问题归结为利用构造局部检验函数来求解局部极小极大控制器的问题, 并确立了局部极小极大控制器与整体极小极大控制器的一致性. 极小极大控制器的未知反馈参数可根据文献[6]中的方法, 利用求解线性矩阵不等式得到. 本文还利用文献[3,4]中的方法, 讨论了广义时滞系统的容许性. 最后考虑系统不确定性的存在, 进一步推广了上述结果, 基于不确定性的范数有界性, 研究了极小极大鲁棒控制及鲁棒镇定的问题.

2 系统描述及预备知识

考虑如下广义时滞系统:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-\tau) + Bu(t) + D\omega(t); \tag{1a}$$

收稿日期: 2004-11-30; **修回日期**: 2005-03-30.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60274009); 教育部博士点基金项目(20020145007).
作者简介: 姜囡(1979—), 女, 内蒙海拉尔人, 博士生, 从事广义系统、极小极大鲁棒控制的研究; 井元伟(1956—), 男, 辽宁西丰人, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统、相似性结构分析等研究.

$$x(t)=\phi(t),\ t\in[-\tau,0].\qquad(1b)$$

其中: $x(t)\in R^n$, $u(t)\in R^m$, $\omega(t)\in R^l$ 分别为系统的状态、控制输入和外部干扰; 矩阵 $E\in R^{n\times n}$ 奇异, 且 $\mathrm{rank}(E)<n$; A, A_d, B, D 为已知给定的相应维数的实常数阵; 式(1b) 是系统的时滞相容条件, $\tau>0$ 为时间的延滞常数, $\phi(t)$ 为相容连续函数.

针对系统(1), 考虑如下性能指标:

$$J(u,\omega)=\int_0^\infty(\xi^TQ\xi+u^Tu-\gamma^2\omega^T\omega)\,dt,\qquad(2)$$

其中: $\xi^T=[x^T(t),x^T(t-\tau)]^T$, $Q=Q^T\ge 0$, γ 为给定的常数.

引理 1[3] 如果针对广义时滞系统

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+A_dx(t-\tau),$$

存在矩阵 $Q>0$ 和矩阵 P, 满足

$$EP^T=PE^T\ge 0,$$
$$AP^T+PA^T+A_dP^TQ^{-1}PA_d^T+Q<0,$$

则称此系统为容许的(正则、稳定、无脉冲).

3 主要结果

3.1 广义时滞系统的情形

该部分的主要目的是针对广义时滞系统(1) 设计一个状态反馈控制器, 使得闭环系统容许且在最坏的干扰下性能指标(2) 的上界极小, 即

$$\min_u\max_\omega J(u,\omega)=x^T(0)E^TCx(0)+\int_{-\tau}^{0}x^T(s)Q_1x(s)\,ds.\qquad(3)$$

定理 1 对于给定的非负定对称矩阵 Q 和常数 $\gamma>0$, 若存在 $Q_1=Q_1^T>0$ 且矩阵 Z 及对称矩阵 P 满足下列不等式:

$$EP^T=PE^T\ge 0,\qquad(4a)$$

$$\begin{bmatrix} PA^T+AP-Z^TB^T-BZ+M_1 & B & D & A_d \\ B^T & -I & 0 & 0 \\ D^T & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ A_d^T & 0 & 0 & -Q_1 \end{bmatrix}\le 0,\qquad(4b)$$

$$\gamma^{-2}DD^T-BB^T<0,\qquad(4c)$$

则系统(1) 的极小极大控制器形式为 $u=-B^TCx$, 且其闭环系统是容许的. 控制器的未知反馈参数可通过解不等式(4b) 得到. 同时系统的性能指标上界在最坏的干扰下达到极小, 即

$$\min_u\max_\omega J(u,\omega)=x^T(0)E^TCx(0)+\int_{-\tau}^{0}x^T(s)Q_1x(s)\,ds.$$

其中: $M_1=PQ_1P^T$, $P=C^{-1}$, $Z=kP$.

证明 首先构造局部检验函数

$$\varphi(t)=\dot{V}+u^Tu-\gamma^2\omega^T\omega,\qquad(5)$$

其中

$$V(x(t))=x^T(t)E^TCx(t)+\int_{t-\tau}^{t}x^T(s)Q_1x(s)\,ds,$$
$$Q_1=Q_1^T>0.\qquad(6)$$

利用条件(4a) 以及文献[1,2] 中常用的求极值的方法, 对式(5) 分别关于 ω, u 进行极大化、极小化, 可求得局部最坏干扰和局部极小极大控制为

$$\omega_*=\gamma^{-2}D^TCx(t),\qquad(7)$$
$$u_*=-B^TCx(t).\qquad(8)$$

下面证明式(8) 为系统(1) 的极小极大控制器.

将式(7) 和(8) 代入(5), 整理并记为

$$\min_u\max_\omega\varphi(t)=\xi^T\begin{bmatrix} A^TC+CA+Q_1-CBB^TC+\gamma^{-2}CDD^TC & CA_d \\ A_d^TC & -Q_1 \end{bmatrix}\xi=-\xi^TQ\xi\qquad(9)$$

为了保证 $Q=Q^T\ge 0$, 由文献[6] 中的 Schur 补定理, 有下式成立:

$$\begin{bmatrix} A^TC+CA-k^TB^TC-CBk+Q_1 & CB & CD & CA_d \\ B^TC & -I & 0 & 0 \\ D^TC & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ A_d^T & 0 & 0 & -Q_1 \end{bmatrix}\le 0,$$

其中 $k=B^TP$. 令 $P=C^{-1}$ 且 $Z=kP$, 对上式左乘右乘 $X=\mathrm{diag}(P,I,I,I)$, 得到式(4b). 利用式(4c) 以及文献[6] 中的 Schur 补定理化简, 有

$$[A-BB^TC+\gamma^{-2}DD^TC]^TC+C[A-BB^TC+\gamma^{-2}CDD^TC]+CA_dQ_1^{-1}A_d^TC+Q_1<0.\qquad(10)$$

下面考虑由系统(1) 和式(7), (8) 构成的闭环系统, 并将其记为

$$E\dot{x}(t)=[A-BB^TC+\gamma^{-2}DD^TC]x(t)+A_dx(t-\tau)=\qquad(11)$$
$$A_Cx(t)+A_dx(t-\tau),\qquad(12)$$

显然式(10) 可写为

$$A_C^TC+CA_C+CA_dQ_1^{-1}A_d^TC+Q_1<0.$$

由 $E^TC=CE\ge 0$ 以及引理 2 可知, 闭环系统是容许的. 由式(5) 和(9), 有

$$\min_u\max_\omega J(u,\omega)=-\int_0^\infty\dot{V}\,dt=-\Big(x^T(t)E^TCx(t)+\int_{t-\tau}^{t}x^T(s)Q_1x(s)\,ds\Big)\Big|_0^\infty.\qquad(13)$$

由闭环系统的容许性可知, 广义时滞系统(1) 是可

稳定的, 故 $x(\infty)=0$. 于是有

$$\min_u\max_\omega J(u,\omega)=x^T(0)E^TCx(0)+\int_{-\tau}^{0}x^T(s)Q_1x(s)\mathrm{d}s.$$

因此, 针对系统(1), 控制器(8) 是使性能指标(2) 的上界达到极小的极小极大控制器, 控制器的未知参数可由不等式(4b) 和 $k=ZP^{-1}$ 解出. □

3.2 广义不确定时滞系统的情形

考虑不确定广义时滞系统

$$E\dot{x}(t)=(A+\Delta A)x(t)+A_dx(t-\tau)+(B+\Delta B)u(t)+D\omega(t),\tag{14a}$$

$$x(t)=\phi(t),\ t\in[-\tau,0].\tag{14b}$$

其中: $x(t),u(t),\omega(t),E,A,A_d,B,D,\tau>0,\phi(t)$ 均同系统(1) 中定义. 假设不确定项 $\Delta A,\Delta B$ 满足如下范数有界条件:

$$\Delta A=H_1FN_1,\ \Delta B=H_2FN_2.\tag{15}$$

其中: $F\in\Sigma,\ \Sigma=\{F\,|\,F^TF\le I\};\ H_1,H_2,N_1,N_2$ 为已知给定的常数阵.

针对系统(14), 考虑如下形式的性能指标:

$$J(u,W)=\int_0^\infty(\xi^TQ(\Delta)\xi+u^Tu-\gamma^2\omega^T\omega)\mathrm{d}t\tag{16}$$

其中: ξ,γ 同式(2) 中定义, $Q(\Delta)$ 表示依赖于不确定项 $\Delta A,\Delta B$; W 代表干扰以及不确定性等摄动因素. 由式(15) 构造辅助系统

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+A_dx(t-\tau)+Bu(t)+D\omega(t)+H_1v_1(t)+H_2v_2(t),\tag{17a}$$

$$x(t)=\phi(t),\ t\in[-\tau,0],\tag{17b}$$

其中: $v_1(t)=FN_1x(t),\ v_2(t)=FN_2u(t)$. 显然系统(17) 对应系统(14), 由式(15) 和 Σ 的定义有

$$v_1^Tv_1\le x^TN_1^TN_1x,\ \ v_2^Tv_2\le u^TN_2^TN_2u.\tag{18}$$

针对系统(14), 构造局部检验

$$\Phi(t)=\dot{V}+u^Tu-\gamma^2\omega^T\omega-\mu_1^2v_1^Tv_1-\mu_2^2v_2^Tv_2,\tag{19}$$

其中: $\gamma>0,\mu_1\ne0,\mu_2\ne0$ 是某些给定的常数. 构造 Luapunov 函数

$$V(x(t))=x^T(t)E^TCx(t)+\int_{t-\tau}^{t}x^T(s)Q_2x(s)\mathrm{d}s,$$

$$Q_2=Q_2^T>0.$$

针对式(19), 分别关于 v_2,v_1,ω 进行极大化, 得

$$v_2^*=\mu_2^{-2}H_2^TCx,\tag{20}$$

$$v_1^*=\mu_1^{-2}H_1^TCx,\tag{21}$$

$$\omega_*=\gamma^{-2}D^TCx(t).\tag{22}$$

重复第3.1节的步骤将式(20)～(22) 代入(19), 利用不等式(18) 进行放缩变换后对其关于 u 取极小化, 得

$$u_*=-(I+N_2^TN_2)^{-1}B^TCx(t).\tag{23}$$

将式(23) 代回放缩变换后的表达式, 将其记为

$$\min_u\max_W(\dot{V}+u^Tu-\gamma^2\omega^T\omega)\le\xi^T\begin{bmatrix}A^TC+CA+Q_2+\tilde{M} & CA_d\\ A_d^TC & -Q_2\end{bmatrix}\xi=-\xi^TQ\xi,\tag{24}$$

其中: $\tilde{M}=x^T(\mu_1^{-2}CH_1H_1^TC+\mu_2^{-2}CH_2H_2^TC+N_1^TN_1+\gamma^{-2}CDD^TC-CB(I+N_2^TN_2)^{-1}B^TC)x$.

引理 2[3]　针对广义时滞系统

$$E\dot{x}(t)=(A+\Delta A)x(t)+A_dx(t-\tau)+(B+\Delta B)u(t),$$

如果存在线性状态反馈 $u=-Kx$, 矩阵 $Q>0$ 和矩阵 P 满足

$$EP^T=PE^T\ge0,$$

$$(A_K+\Delta A_K)P^T+P(A_K+\Delta A_K)^T+A_dP^TQ^{-1}PA_d^T+Q<0,$$

则称此系统是广义二次可稳定的. 其中: $A_K=A+BK,\ \Delta A_K=\Delta A+\Delta BK$.

定理 2　对于给定的非负定对称矩阵 Q 和常数 $\gamma>0,\mu_1\ne0,\mu_2\ne0$, 若存在 $Q_2=Q_2^T>0$, 且矩阵 Z 和对称矩阵 $\tilde{P}$ 满足下列条件:

$$E\tilde{P}^T=\tilde{P}E^T\ge0,\tag{25}$$

$$\mu_1^{-2}H_1H_1^T+\mu_2^{-2}H_2H_2^T+\gamma^{-2}DD^T-B(I+N_2^TN_2)^{-1}B^T<0,\tag{26}$$

$$\begin{bmatrix}\Psi+M_2 & B & \tilde{P}N_1^T & H_1 & H_2 & D & A_d\\ B^T & -(I+N_2^TN_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ N_1\tilde{P} & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0\\ H_1^T & 0 & 0 & -\mu_1^2 & 0 & 0 & 0\\ H_2^T & 0 & 0 & 0 & -\mu_2^2 & 0 & 0\\ D^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 & 0\\ A_d^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_2\end{bmatrix}\le0,\tag{27}$$

则广义不确定时滞系统(14) 是广义二次可稳定的, 且 $u_*=-(I+N_2^TN_2)^{-1}B^TCx(t)$ 为它的极小极大控制器, 它的未知参数可通过解不等式(27) 得到. 同时性能指标(16) 的上界在最坏的干扰和不确定

性下达到极小,即

$$\min_u \max_W J(u,\omega) = x^{\mathrm{T}}(0)E^{\mathrm{T}}Cx(0) + \int_{\tau} x^{\mathrm{T}}(s)Q_2 x(s)\mathrm{d}s, \quad (28)$$

其中: $\Psi = \tilde{P}A^{\mathrm{T}} + A\tilde{P} - Z^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} - BZ^{\mathrm{T}}, M_2 = \tilde{P}Q_2\tilde{P}^{\mathrm{T}}, \tilde{P} = C^{-1}, Z = K\tilde{P}$.

证明 首先考虑系统(17)在最坏的干扰和不确定性下经线性反馈(23)构成的闭环系统,记为

$$E\dot{x}(t) = [A + \mu_1^{-2}H_1H_1^{\mathrm{T}}C + \mu_2^{-2}H_2H_2^{\mathrm{T}}C + \gamma^{-2}DD^{\mathrm{T}}C - B(I + N_2^{\mathrm{T}}N_2)^{-1}B^{\mathrm{T}}C]x + A_dx(t-\tau) = \tilde{A}_Cx(t) + A_dx(t-\tau). \quad (29)$$

为了保证 $Q = Q^{\mathrm{T}} \geq 0$, 利用 Schur 补定理, 有

$$\left[\begin{array}{cccccccc} \Phi + Q_2 & CB & N_1^{\mathrm{T}} & CH_1 & CH_2 & CD & CA_d \\ B^{\mathrm{T}}C & -(I + N_2^{\mathrm{T}}N_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_1 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_1^{\mathrm{T}}C & 0 & 0 & -\mu_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ H_2^{\mathrm{T}}C & 0 & 0 & 0 & -\mu_2^2 & 0 & 0 \\ D^{\mathrm{T}}C & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 & 0 \\ A_d^{\mathrm{T}}C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_2 \end{array}\right] \leq 0,$$

其中 $\Phi = A^{\mathrm{T}}C + CA - K^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}C - CBK^{\mathrm{T}}$. 对上式左乘右乘 $\tilde{X} = \mathrm{diag}(C^{-1}, I, \cdots, I)$, 令 $\tilde{P} = C^{-1}$ 且 $Z = K\tilde{P}$, 则可得到式(27). 由式(26)和(27)以及文献[6]中的 Schur 补定理, 有

$$\tilde{A}_C^{\mathrm{T}}C + C\tilde{A}_C + CA_dQ_2^{-1}A_d^{\mathrm{T}}C + Q_2 < 0.$$

由式(25)和引理3可知, 闭环系统(29)是广义二次稳定的. 这样, 系统(14)是广义二次可稳定的, 故 $x(\infty) = 0$, 取 $Q(\Delta) = Q$, 由式(24)有

$$\min_u \max_W (\xi^{\mathrm{T}}Q(\Delta)\xi + u^{\mathrm{T}}u - \gamma^2\omega^{\mathrm{T}}\omega) = -\dot{V},$$

进而有

$$\min_u \max_W J(u,W) = x^{\mathrm{T}}(0)E^{\mathrm{T}}Cx(0) + \int_{\tau} x^{\mathrm{T}}(s)Q_2x(s)\mathrm{d}s. \quad \square$$

4 数值算例

下面给出数值算例, 以检验本文设计控制器方法的有效性. 针对系统(1), 考虑以下矩阵参数:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0.05 \\ 0.05 & 1 \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

应用文献[7]中 Matlab LMI Control Toolbox 解线性矩阵不等式(4), 得到如下解矩阵:

$$P = \begin{bmatrix} 4.874\,9 & 8.333\,3 \\ 8.333\,3 & -48.960\,1 \end{bmatrix},$$

$$Z = [-62.073\,8 \quad -55.576\,7];$$

根据定理1得到极小极大反馈控制器的参数矩阵

$$K = [-11.365\,5 \quad -0.800\,2].$$

5 结 语

本文将极小极大控制问题引入广义时滞系统, 给出了极小极大控制器存在条件和闭环系统容许的充分条件以及设计方法. 广义时滞系统的极小极大控制器参数可通过求解线性矩阵不等式得到.

参考文献(References)

[1] Kogan M M. Solution to the Inverse Problem of Minimax Control and Minimax Robust Control[J]. *Automechanism and Telemechanism*, 1998, 3: 87-97.

[2] Kogan M M. Solution to the Inverse Problem of Minimax Control and Worst Case Disturbance for Linear Continuous-time Systems[J]. *IEEE Trans Automitc Control*, 1998, 43(5): 670-674.

[3] Xu S Y, Paul van Dooren, Radu Stefan, et al. Robust Stability and Stabilization for Singular Systems with State Delay and Parameter Uncertainty[J]. *IEEE Trans on Automatic*, 2002, 47(7): 1122-1128.

[4] 刘永清, 李远清. 一类滞后型时变广义系统解的稳定性[J]. *控制与决策*, 1997, 12(3): 193-197.
(Liu Y Q, Li Y Q. Stability of Solutions of a Class of Time-varying Singular Systems with Delay[J]. *Control and Decision*, 1997, 12(3): 193-197.)

[5] Dai L. *Singular Control Systems*[M]. Berlin: Springer-Verleg, 1989.

[6] Boyd S, Ghaoui L, Feron E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*[M]. Philadelphia: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.

[7] 薛定宇. *控制系统计算机辅助设计-MATLAB 语言及应用*[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996: 213-220.
(Xue D Y. *Aided Design via Computer for Control System-MATLAB and Application*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996: 213-220.)