

文章编号: 1001-0920(2005)11-1279-04

时滞离散系统最优输出跟踪控制的灵敏度法

唐功友, 刘毅敏

(中国海洋大学 信息科学与工程学院, 山东 青岛 266071)

摘要: 针对具有有限时间二次型性能指标的时滞离散系统, 研究了最优输出跟踪控制问题. 通过引入一个灵敏度参数, 将原最优输出跟踪控制问题转化为不含超前项和时滞项的一族两点边值问题. 得到的最优输出跟踪控制律由状态向量的线性解析函数和伴随向量级数形式的补偿项组成, 其解析函数由一次性求解 Riccati 矩阵差分方程和矩阵差分方程得到, 补偿项由求解伴随向量差分方程的递推公式得到. 仿真结果表明了该方法的有效性.

关键词: 离散系统; 时滞系统; 最优输出跟踪控制; 灵敏度法

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Sensitivity Approach of Optimal Output Tracking Control for Discrete Systems with Time-delay

TANG Gong-you, LIU Yi-min

(College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266071, China)

Correspondent: TANG Gong-you, E-mail: gtang@ouc.edu.cn

Abstract: The optimal tracking control for discrete time-delay systems with finite time quadratic performance index is considered. By introducing a sensitivity parameter, the original optimal output tracking control problem is transformed into a series of two-point boundary value problems without time-advance or time-delay terms. The optimal control law obtained consists of linear analytic functions and a compensation term which is a series sum of the adjoint vectors. The analytic functions can be found by solving a Riccati matrix difference equation and a matrix difference equation. The compensation term can be obtained by a recursion formula that solves adjoint vector equations. Simulation examples are employed to test the validity of the presented algorithm.

Key words: Discrete systems; Time-delay systems; Optimal output tracking control; Sensitivity approach

1 引言

在实际的控制系统中, 时滞现象普遍存在. 时滞系统的最优控制一直受到科技工作者的重视, 无论在理论上还是在应用中都取得了若干成果^[1~4]. 随着计算机技术的发展, 离散系统控制理论和技术受到人们的广泛关注, 时滞离散系统的最优控制问题成为重要的研究领域^[5~7]. 虽然时滞离散系统可以经过扩维变为无时滞系统来研究, 但是对于系统阶数较高和(或)时滞较大的系统, 扩维后可能使系统的阶数变得很高, 从而引起“维数灾难”问题. 时滞系统二次型性能指标的最优控制问题, 往往导致

求解既含有超前项又含有时滞项的两点边值问题, 直接求时滞系统最优控制律的精确解是非常困难的, 因此求解时滞系统的近似最优控制律是研究人员追求的目标之一. 近年来, 非线性和(或)时滞系统的最优控制近似方法和最优输出跟踪问题的研究均取得了较好的结果^[4~10].

本文针对具有有限时间二次型性能指标的时滞离散系统, 研究最优输出跟踪控制律的近似设计方法. 首先通过引入灵敏度参数 ϵ , 将系统变量在 $\epsilon=0$ 处展开 Maclaurin 级数, 从而将原最优输出跟踪控制问题化为不含超前项和时滞项的一族两点边值问

收稿日期: 2004-11-08; 修回日期: 2005-01-07.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60574023).

作者简介: 唐功友(1953—), 男, 山东烟台人, 教授, 博士生导师, 从事控制理论与应用、计算机控制等研究; 刘毅敏(1976—), 女, 四川米易人, 博士生, 从事时滞与非线性系统的分析和综合的研究.

题; 然后通过递阶求解两点边值问题族, 得到由线性解析函数和级数形式补偿项组成的最优输出跟踪控制律, 解析项由一次性求解 Riccati 矩阵差分方程和矩阵差分方程得到, 补偿项由求解伴随向量差分方程的递推公式得到; 最后用仿真例子验证了该方法的有效性

2 问题描述

考虑如下带状态时滞的线性离散系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + A_1x(k-\tau) + Bu(k), \\ x(k) = \mathcal{Q}k, k = -\tau, -\tau+1, \dots, 0, \\ y(k) = Cx(k). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in R^n, u \in R^r$ 和 $y \in R^m$ 分别是状态向量、控制向量和输出向量; A, A_1, B 和 C 是适当维数的常量矩阵; τ 是正整数时滞; $\mathcal{Q}k$ 是已知初始状态向量函数. 设系统(1)的输出 y 所要跟踪的期望输出 \tilde{y} 由如下外系统描述:

$$\begin{cases} z(k+1) = Fz(k), \\ z(0) = z_0, \\ \tilde{y}(k) = Hz(k). \end{cases} \quad (2)$$

其中: $z \in R^n, \tilde{y} \in R^m, F$ 和 H 是适当维数的常量矩阵, z_0 是初始向量

取有限时域的二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2} \{ e^T(N)Q_f e(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [e^T(k)Q e(k) + u^T(k)R u(k)] \} \quad (3)$$

其中: $e(k)$ 为系统的输出误差, 即

$$e(k) = \tilde{y}(k) - y(k); \quad (4)$$

加权阵 Q 和 Q_f 为半正定矩阵, R 为正定矩阵. 输出最优的输出跟踪问题就是寻找一个控制 $u^*(k)$, 使性能指标(3)取最小值

根据极大值原理得到的最优输出跟踪控制的必要条件可知, 系统(1)关于性能指标(3)的最优输出跟踪控制律可表达为

$$u(k) = -R^{-1}B^T\lambda(k+1). \quad (5)$$

其中 $\lambda(k+1)$ 为以下两点边值问题的解:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + A_1x(k-\tau) + Bu(k), \\ \lambda(k) = \begin{cases} C^TQCx(k) - C^TQH z(k) + A^T\lambda(k+1) + A_1^T\lambda(k+\tau+1), & k = 0, 1, \dots, N-1-\tau \\ C^TQCx(k) - C^TQH z(k) + A^T\lambda(k+1), & k = N-\tau, N-\tau+1, \dots, N-1, \end{cases} \\ x(k) = \mathcal{Q}k, k = -\tau, -\tau+1, \dots, 0, \\ \lambda(N) = C^TQ_fCx(N) - C^TQ_fHz(N). \end{cases} \quad (6)$$

由于两点边值问题(6)中既含时滞项又含时间超前项, 求解其解析解十分困难

本文的目的是用灵敏度法求既含时滞项又含时间超前项两点边值问题(6)的近似解

3 主要结果

引入灵敏度参数 ϵ , 构造含有灵敏度参数 ϵ 的两点边值问题

$$\begin{cases} x(k+1, \epsilon) = Ax(k, \epsilon) + A_1x(k-\tau, \epsilon) + Bu(k, \epsilon), \\ \lambda(k, \epsilon) = \begin{cases} C^TQCx(k, \epsilon) - C^TQH z(k) + A^T\lambda(k+1, \epsilon) + A_1^T\lambda(k+\tau+1, \epsilon), & k = 0, 1, \dots, N-1-\tau \\ C^TQCx(k, \epsilon) - C^TQH z(k) + A^T\lambda(k+1, \epsilon), & k = N-\tau, N-\tau+1, \dots, N-1, \end{cases} \\ x(k, \epsilon) = \mathcal{Q}k, k = -\tau, -\tau+1, \dots, 0, \\ \lambda(N, \epsilon) = C^TQ_fCx(N, \epsilon) - C^TQ_fHz(N), \end{cases} \quad (7)$$

以及含有灵敏度参数 ϵ 的控制律

$$u(k, \epsilon) = -R^{-1}B^T\lambda(k+1, \epsilon). \quad (8)$$

显然, 当 $\epsilon=1$ 时, 含有灵敏度参数 ϵ 的两点边值问题(7)和控制律(8)分别等价于确定原系统最优输出跟踪控制的两点边值问题(6)和最优输出跟踪控制律(5). 假设 $x(k, \epsilon), \lambda(k, \epsilon)$ 和 $u(k, \epsilon)$ 在 $\epsilon=0$ 处无限可微, 则它们的 Maclaurin 级数可描述为

$$\begin{cases} x(k, \epsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} x^{(i)}(k), \\ u(k, \epsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} u^{(i)}(k), \\ \lambda(k, \epsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} \lambda^{(i)}(k). \end{cases} \quad (9)$$

其中上标 (i) 表示在 $\epsilon=0$ 处关于 ϵ 的 i 阶导数. 在下面的讨论中, 假设式(8)中的级数在 $\epsilon=1$ 处收敛

下面给出求解式(9)第2式中级数的第 $i(i=0, 1, \dots)$ 项 $u^{(i)}(k)$ 的递推算法. 将式(9)代入(7)和(8), 比较各等号两边 ϵ 同次项的系数, 得

$$\begin{cases} x^{(i)}(k+1) = Ax^{(i)}(k) + Bu^{(i)}(k) + d^{(i)}(k), \\ \lambda^{(i)}(k) = C^TQCx^{(i)}(k) - [1 - \text{sgn}(i)]C^TQH z(k) + A^T\lambda^{(i)}(k+1) + f^{(i)}(k), \\ x^{(i)}(k) = [1 - \text{sgn}(i)]\mathcal{Q}k, \\ k = -\tau, -\tau+1, \dots, 0, \\ \lambda^{(i)}(N) = C^TQ_fCx^{(i)}(N) - [1 - \text{sgn}(i)]C^TQ_fHz(N), \end{cases} \quad (10)$$

$$u^{(i)}(k) = -R^{-1}B^T\lambda^{(i)}(k+1). \quad (11)$$

其中

$$\text{sgn}(i) = \begin{cases} 0, & i = 0; \\ 1, & i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (20)$$

$$d^{(i)}(k) = iA^{-1}x^{(i-1)}(k - \tau).$$

$$f^{(i)}(k) = \begin{cases} iA^{-1}\lambda^{(i-1)}(k + \tau + 1), \\ k = 0, 1, \dots, N - 1 - \tau \\ 0, & k = N - \tau, N - \tau + 1, \dots, N - 1. \end{cases} \quad (12)$$

令

$$\lambda^{(i)}(k) = P(k)x^{(i)}(k) + [1 - \text{sgn}(i)]P_1(k)z(k) + \text{sgn}(i)g^{(i)}(k). \quad (13)$$

将式(13) 分别代入式(11) 和(10) 得

$$u^{(i)}(k) = -S(k)^{-1}B^T[P(k+1)Ax^{(i)}(k) + [1 - \text{sgn}(i)]P_1(k+1)Fz(k) + P(k+1)d^{(i)}(k) + \text{sgn}(i)g^{(i)}(k+1)], \quad (14)$$

$$x^{(i)}(k+1) = [I - T(k)P(k+1)]Ax^{(i)}(k) - [1 - \text{sgn}(i)]T(k)P_1(k+1)Fz(k) + [1 - T(k)P(k+1)]d^{(i)}(k) - \text{sgn}(i)T(k)g^{(i)}(k+1). \quad (15)$$

其中

$$S(k) = R + B^T P(k+1)B, \quad T(k) = BS(k)^{-1}B^T. \quad (16)$$

$P(k)$ 是下列 Riccati 矩阵差分方程的唯一半正定解:

$$P(k) = C^TQC + A^T P(k+1)A - A^T P(k+1)T(k)P(k+1)A, \quad P(N) = C^TQ_f C. \quad (17)$$

$P_1(k)$ 是下列矩阵差分方程的解:

$$P_1(k) = -C^TQH + A^T P(k+1)T(k)P_1(k+1)F + A^T P_1(k+1)F, \quad P_1(N) = -C^TQ_f H. \quad (18)$$

$g^{(i)}(k)$ 是下列伴随差分方程的解:

$$g^{(i)}(k) = A^T [I - P(k+1)T(k)]g^{(i)}(k+1) + A^T [I - P(k+1)T(k)]P(k+1)d^{(i)}(k) + f^{(i)}(k), \quad g^{(i)}(N) = 0 \quad (19)$$

将式(19) 代入(9) 的第 2 式并令 $\epsilon = 1$, 得最优输出跟踪控制律

$$u^*(k) = -S(k)^{-1}B^T[P(k+1)Ax(k) + A^{-1}x(k - \tau) + P_1(k+1)Fz(k) + \sum_{i=1}^M \frac{1}{i!} g^{(i)}(k+1)] \quad (20)$$

注 1 最优输出跟踪控制律(20) 中的无穷级数

$\sum_{i=1}^M \frac{1}{i!} g^{(i)}(k+1)$ 一般是不可能精确求出的 在实际应用中, 常用一个有限正整数 M 近似取代, 从而得到一个近似最优输出跟踪控制律 (M 阶次优跟踪控制律)

$$u_M(k) = -S(k)^{-1}B^T[P(k+1)Ax(k) + A^{-1}x(k - \tau) + P_1(k+1)Fz(k) + \sum_{i=1}^M \frac{1}{i!} g^{(i)}(k+1)] \quad (21)$$

由式(21) 可以得到求解 M 阶次优跟踪控制律的递推算法

$$u_0(k) = -S(k)^{-1}B^T[P(k+1)Ax(k) + A^{-1}x(k - \tau) + P_1(k+1)Fz(k)],$$

$$u_i(k) = u_{i-1}(k) - \frac{1}{i!} S(k)^{-1}B^T g^{(i)}(k+1), \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (22)$$

在实际应用中, 可以根据具体工艺控制精度要求确定 M 的取值 下面根据性能指标的相对精度标准给出一种求解 M 阶次优跟踪控制律的实用算法

算法 1 (次优跟踪控制律(21) 的计算过程)

Step 1: 由式(2) 求出期望输出 $\tilde{y}(k)$, 分别由式(17) 和(18) 求出 $P(k)$ 和 $P_1(k)$, 由式(22) 的第 1 式求出 $u_0(k)$, 将 $u_0(k)$ 代入系统(1) 得到闭环系统, 并由式(4) 求出 $e(k)$. 由下式计算 J_0 :

$$J_0 = \frac{1}{2} \left\{ e^T(N)Q_f e(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [e^T(k)Qe(k) + u_0^T(k)R u_0(k)] \right\} \quad (23)$$

给定 $\sigma > 0$, 令 $M = 0, i = 1$.

Step 2: 由式(19) 求出 $g^{(i)}$, 式(22) 求出 $u_i(k)$, 将 $u_i(k)$ 代入系统(1) 得到闭环系统, 并由式(4) 求出 $e(k)$.

Step 3: 令 $M = i$, 并由下式计算 J_M :

$$J_M = \frac{1}{2} \left\{ e^T(N)Q_f e(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [e^T(k)Qe(k) + u_M^T(k)R u_M(k)] \right\} \quad (24)$$

Step 4: 若 $|J_M - J_{M-1}|/J_M < \sigma$, 则输出 $u_M(k)$, 结束 否则, 由式(15) 计算 $x^{(i)}(k)$, 令 $i = i + 1$, 转至 Step 2

4 实例仿真

考虑由式(1)和(2)描述的二阶时滞离散系统和参考输入外系统, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Q(k) = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [3 \ 0], F = \begin{bmatrix} 0 & 95 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

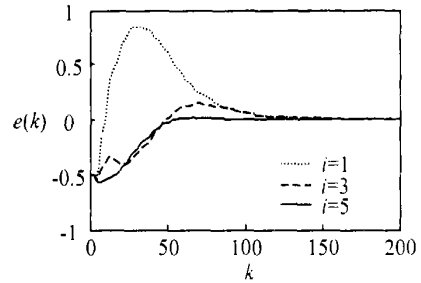
$$z(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, H = [1 \ 0]$$

性能指标选取为

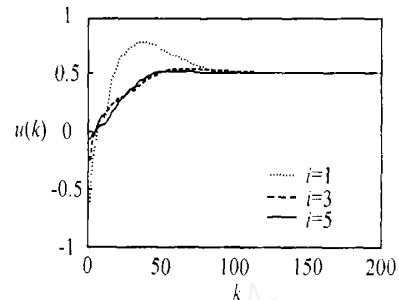
$$J = 4e^2(200) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{199} [8e^2(k) + u^2(k)]$$

选取控制精度 $\sigma = 0.01$, 当 $|(J_i - J_{i-1})/J_i| < \sigma$ 时, 认为已获得满足精度要求的最优输出跟踪控制律

情形 1 当 $\tau = 5$ 时, 系统输出误差 $e(k)$ 和控制变量 $u(k)$ 的仿真曲线如图 1 所示, 性能指标如表 1 所示



(a) 系统输出误差曲线



(b) 控制变量曲线

图 1 $\tau = 5$ 时系统的仿真曲线

表 1 $\tau = 5$ 时各阶性能指标值及控制精度

叠加次数 i	0	1	2	3	4	5	6	7
性能指标 J_i	85.261	80.605	56.157	34.226	33.467	33.174	33.172	33.171
$ J_i - J_{i-1} /J_i$		0.058	0.435	0.641	0.023	0.009	0.00006	0.00003

由表 1 可以看出 $J_1 > J_2 > \dots > J_7$, 即性能指标值随叠加次数增加而减小, 并趋于一个稳定的最优性能指标 J^* . 由图 1 也可以看出随着叠加次数增加, 性能指标相对误差逐渐减小. 当 $i = 5$ 时, 满足控制精度要求, 因此可以认为 $u_5(t)$ 为近似最优输出跟踪控制律

情形 2 当时滞 τ 取不同值达到要求的控制精度时, 叠加次数 M 和对应性能指标 J^* 如表 2 所示

表 2 时滞 τ 取不同值时各阶性能指标值及控制精度

时滞 τ	1	5	10	15	30	50
叠加次数 M	4	5	7	10	11	11
性能指标 J^*	21.853	33.171	43.995	65.216	113.84	179.12

由表 2 可以看出, 随着时滞的增加, 求解最优控制的叠加次数增大, 控制质量变差. 但当时滞增加到一定数值后, 叠加次数不再变化

从以上两种情形的仿真结果看, 在不同时滞时本文算法都是有效的; 即使对于大时滞系统, 本文算法的计算量仍然很小

5 结 论

本文针对线性时滞离散系统的最优输出跟踪控制问题, 提出了一种灵敏度设计算法. 该算法避免了直接求解既含有超前项又含有时滞项的两点边值问题. 利用灵敏度设计算法求解时滞离散系统的近似最优输出跟踪控制律计算量较小, 且实现较容易

参考文献 (References)

- [1] Kolmanovsky IV, Maizenberg T L. Optimal Control of Continuous-time Linear Systems with a Time-varying, Random Delay [J]. *Systems and Control Letters*, 2001, 44(2): 119-126
- [2] Chu J. Application of a Discrete Optimal Tracking Controller to an Industrial Electric Heater with Pure Delays [J]. *J of Process Control*, 1995, 5(1): 3-8
- [3] Cai G P, Huang J Z, Yang S X. An Optimal Control Method for Linear Systems with Time Delay [J]. *Computers and Structures*, 2003, 81(15): 1539-1546
- [4] Grimble M J. Non-linear Generalized Minimum Variance Feedback, Feedforward and Tracking Control [J]. *Automatica*, 2005, 41(6): 957-969

(下转第 1286 页)

$$X = \begin{bmatrix} 7.5 & -19.99 & 65.09 \\ -19.99 & 57.307 & -184.85 \\ 65.09 & -184.85 & 846.614 \end{bmatrix}$$

由稳态协方差和输出方差的关系, 可得输出方差为 7.5 mil 在初始条件 $x = [10 \ 0 \ 0]^T$, 白噪声输入下, 系统输出响应如图 2 所示

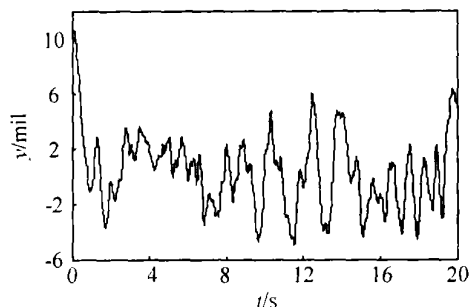


图2 白噪声输入下系统输出响应

6 结 论

本文利用极点和协方差相容控制理论, 采用 LMI 方法进行随机系统的变结构控制设计. 最后通过车载火控系统的应用实例计算, 给出了该方法在实际工程中的应用领域

参考文献(References)

- [1] Zheng F, Chen M, Gao W B. Variable Structure Control of Stochastic Systems[J]. *System and Letters*, 1994, 22(3): 209-222
- [2] 邓飞其, 冯昭枢, 刘永清. 随机系统的变结构控制[J]. *自动化学报*, 1997, 23(2): 267-270

(Deng F Q, Feng Z S, Liu Y Q. Variable Structure Control of Stochastic Systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1997, 23(2): 267-270)

- [3] Chang K Y, Wang W J. Robust Covariance Control for Perturbed Stochastic Multivariable System via Variable Structure Control [J]. *Systems and Control Letters*, 1999, 37(2): 323-328
- [4] Wang W J, Chang W K. Variable Structure Based Covariance Assignment for Stochastic Multivariable Model Reference Systems [J]. *Automatica*, 2000, 36(1): 141-146
- [5] 王远钢, 郭治. 状态反馈中圆形极点与状态方差约束的相容性[J]. *自动化学报*, 2001, 27(2): 207-213
(Wang Y G, Guo Z. Consistency of Circular Pole and State Variance Constraints in State-feedback Control [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(2): 207-213)
- [6] Liu S Q, Wang Y G, Guo Z. Satisfactory Filter of Linear Periodic Systems with Parameter Uncertainty [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(3): 345-350
- [7] Christopher Edwards, Ashu Akoachere, Sarah K Spurgeon. Sliding-mode Output Feedback Controller Design Using Linear Matrix Inequalities [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(1): 115-119
- [8] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 96-104
(Yu L. *Robust Control — Treatment Method of Linear Matrix Inequality* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 96-104)

(上接第1282页)

- [5] Huang C M, Tsai J S H, Provence R S, et al. The Observer-based Linear Quadratic Sub-optimal Digital Tracker for Analog Systems with Input and State Delays [J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2003, 24(4): 197-236
- [6] Tang G Y, Wang H H. Successive Approximation Approach of Optimal Control for Nonlinear Discrete-time Systems [J]. *Int J of Systems Science*, 2005, 36(3): 153-161
- [7] Tang G Y, Wang H H. Suboptimal Control for Discrete Linear Systems with Time-delay: A Non-delay Conversion Approach [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2005, 31(3): 419-426
- [8] 吕鹏飞, 唐功友, 贾小波, 等. 非线性时滞系统次优控制的逐次逼近法 [J]. *控制与决策*, 2004, 19(2): 230-234
(Lv P F, Tang G Y, Jia X B, et al. Successive Approximation Approach of Suboptimal Control for Nonlinear Time-delay Systems [J]. *Control and Decision*, 2004, 19(2): 230-234)
- [9] Cimen T, Banks S P. Nonlinear Optimal Tracking Control with Application to Super-tankers for Autopilot Design [J]. *Automatica*, 2004, 40(11): 1845-1863
- [10] Chou J H, Hsieh C H, Sun J H. On-line Optimal Tracking Control of Continuous-time systems [J]. *Mechatronics*, 2004, 14(5): 587-597.