

文章编号: 1001-0920(2005)11-1283-04

极点和方差约束在变结构控制中的应用策略

马建伟^{1,2}, 郭治¹

(1. 南京理工大学 自动化系, 南京 210094; 2 河南科技大学 电信学院, 河南 洛阳 471003)

摘要: 利用线性矩阵不等式方法, 研究极点和方差约束在随机系统变结构控制设计中的应用策略. 采用单位向量控制方法, 给出由线性和非线性组成的控制器, 线性部分控制器设计时采用同时满足闭环系统的极点和方差性能指标约束的方法, 非线性部分保证系统能够在有限时间内从初始位置到达切换面. 最后给出了该方法在车载火控系统中的应用实例.

关键词: 变结构控制; 随机系统; 单位向量控制; 多指标约束; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Application Strategy of Poles Indices and Vovariance Constraints to Variable Structure Control Systems

MA Jianwei^{1,2}, GUO Zhi¹

(1. Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China; 2 He'nan University of Science and Technology, Luoyang 471003, China Correspondent: MA Jianwei, Email: lymjw@163.com)

Abstract: A variable structure controller is designed for linear stochastic systems via linear matrix inequality method. The sliding surface is calculated to ensure that the poles of the closed-loop sub-system are allocated in specified sector region. The unit vector control is introduced to design the controller that consists of linear and nonlinear portion. The nonlinear portion guarantees the system to reach the sliding surface in finite time and the linear portion makes the system satisfy the constraints of multiple indices of the closed-loop system. A numeric example is given to show the effectiveness of the proposed approach.

Key words: VSC; Stochastic system; Unit vector control; Multiple indices constraints; LMI

1 引言

随机系统变结构控制的研究面临较多困难和挑战, 但目前已经取得了一些进展^[1-4]. 文献[1]初步研究了随机系统变结构控制的行为特征, 引出滑动运动带的概念. [2]给出随机系统在变结构控制律作用下, 满足滑模可达性条件和平衡态的均方渐近稳定条件. [3, 4]研究连续随机系统的约束方差变结构控制, 提出预先设计滑模面的思想, 并在设计中引入积分运算, 使得随机系统的变结构控制变为确定性系统的变结构控制. 在随机干扰噪声不可避免的应用系统中, 给定的滑模面将成为随机超平面^[3]. 该平

面的数学期望为零, 但方差可以估计, 随机滑模面在切换面估计方差的范围内变动.

在随机控制系统中, 区域极点指标和稳态状态方差(或稳态输出方差)指标是两类重要的性能指标, 分别表明了闭环控制系统的快速性和一类随机控制系统的稳态性能. 在Skelton提出的协方差控制的基础上, 该理论已经获得广泛的研究, 并取得了一系列研究成果, 如利用线性矩阵不等式(LMI)方法研究了极点和方差约束下定常状态反馈控制和周期系统的滤波估计^[5,6].

本文研究极点和方差约束在变结构控制系统设

收稿日期: 2004-11-03; 修回日期: 2005-03-31

基金项目: 国家自然科学基金项目(60174028); “十五”预研兵器支撑基金项目(BZJ040202).

作者简介: 马建伟(1965—), 男, 河南巩义人, 博士生, 从事多指标满意PD控制、随机变结构控制等研究; 郭治(1937—), 男, 辽宁义县人, 教授, 博士生导师, 从事火力控制、满意控制及估计等研究.

计中的应用问题 在最终滑动模态的控制设计中, 保证系统滑模上有满足要求的方差, 同时极点配置在指定的扇形区域 非线性部分采用单位向量控制, 保证系统能够在有限时间内从初始位置到达切换面 最后将该方法应用于某型号车载武器火力控制, 在要求的稳态输出方差和极点指标下设计控制器

2 问题描述

考虑如下状态方程所描述的线性随机系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dw(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in R^n$ 为状态; $u(t) \in R^m$ 为控制输入; $A \in R^{n \times n}$, C 和 D 为适维矩阵, B 为列满秩, $w(t) \in R^r$ 且 $|w(t)| < M$ 为上下界已知的随机扰动, 为零均值高斯白噪声过程, 其强度为 $W > 0$, 初始状态 $x(0)$ 与 $w(t)$ 不相关

变结构控制的形式为

$$u(t) = u_L(x, t) + u_N(x, t), \quad (2)$$

其中 $u_L(x, t) = Lx(t)$ 是线性状态反馈, 同线性系统中的状态反馈一样, 但它决定着系统的最终特性 若系统(1)在式(2)的 $u(t)$ 控制下渐近稳定, 则稳态状态协方差矩阵 X 和输出方差 Y 存在

$$\begin{aligned} X &= \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} E[x(t)x(t)^T], \\ Y &= CX C^T. \end{aligned}$$

可以看出, 只要求出 X , 就能得到 Y .

3 控制器线性部分设计

设 (A, B) 可控, $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$, B_2 为 $m \times m$ 非奇异阵 存在 $n \times n$ 非奇异矩阵 $T = \begin{bmatrix} I_{n-m} & -B_1 B_2^{-1} \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$ 使 $z = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = Tx$, 则系统(1)可简化为

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{D}w(t). \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \tilde{B} = TB, \\ \tilde{D} &= TD, \tilde{F} = FT = [\tilde{F}_1 \quad \tilde{F}_2]. \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= \tilde{A}_{11}z_1(t) + \tilde{A}_{12}z_2(t) + \tilde{D}_1w(t), \\ \dot{z}_2(t) &= \tilde{A}_{21}z_1(t) + \tilde{A}_{22}z_2(t) + \tilde{B}_2u(t) + \tilde{D}_2w(t), \\ S(t) &= \tilde{F}_1z_1(t) + \tilde{F}_2z_2(t). \end{aligned} \quad (4)$$

如果将 z_2 看作控制, 设反馈控制律为 $z_2(t) = G_1z_1(t)$, 则有

$$\dot{z}_1(t) = \tilde{A}_{G_1}z_1(t) + \tilde{D}_1w(t). \quad (5)$$

其中 $\tilde{A}_{G_1} = \tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12}G_1$. 式(5)是滑模面上的随机方程, 求阵 G_1 使得该子系统满足给定的极点和稳态状

态协方差约束

定理 1 若求出式(5)的状态协方差矩阵 Z_{11} 和反馈控制 G_1 , 则能求出状态协方差矩阵 X .

证明 子系统状态协方差阵为

$$X_{11} = \lim_{t \rightarrow \infty} E[x_1(t)x_1(t)^T],$$

从 $z = Tx$ 变换式中可得

$$X = T^{-1} \lim_{t \rightarrow \infty} E[z(t)z(t)^T](T^{-1})^T. \quad (6)$$

其中

$$Z_{11} = \lim_{t \rightarrow \infty} E[z_1(t)z_1(t)^T], Z_{12} = Z_{11}G_1^T,$$

$$Z_{21} = G_1Z_{11}, Z_{22} = G_1Z_{11}G_1^T.$$

可以看出, 由于 Z_{12}, Z_{21}, Z_{22} 均可由状态协方差矩阵 Z_{11} 表示, 只要求出 Z_{11} , 通过式(6) 则能求出状态协方差矩阵 X , 定理 1 成立

由定理 1 可知, 系统稳态协方差不仅与子系统(5)的稳态协方差有关, 而且与反馈控制律 G_1 有关 对于系统(5)有如下引理^[5, 8]:

引理 1 考虑图 1 所示的区域 $\Omega(\alpha, r, \theta)$, 此区域可看作是一个具有 α 稳定度的半平面区域 Ω , 一个圆盘和一个圆形扇形 $\Omega(0, 0, \theta)$ 3 个 LMI 区域的交, 因此闭环系统的所有特征值均在区域 $\Omega(\alpha, r, \theta)$ 中的一个充分条件是存在一个对称正定矩阵 Q_1 , 使得下式成立:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -rQ_1 & (\tilde{A}_{G_1} + \alpha I)Q_1 \\ Q_1(\tilde{A}_{G_1} + \alpha I)^T & -rQ_1 \end{bmatrix} < 0, \\ &\Phi_1 + 2\alpha Q_1 < 0, \Phi_1 + \tilde{D}_1W\tilde{D}_1^T < 0, \\ &\begin{bmatrix} \Phi_1 \sin \theta & \Phi_1 \cos \theta \\ \Phi_2 \cos \theta & \Phi_1 \sin \theta \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \tilde{A}_{G_1}Q_1 + Q_1\tilde{A}_{G_1}^T, \\ \Phi_2 &= \tilde{A}_{G_1}Q_1 - Q_1\tilde{A}_{G_1}^T. \end{aligned}$$

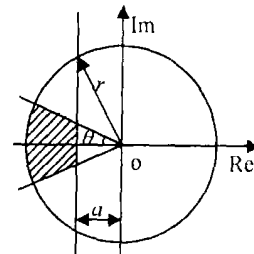


图 1 复平面中的区域 Ω

考虑到不等式组关于变量 (Q_1, G_1) 不是凸的, 记 $S_1 = G_1Q_1$, 可得式(7)的 LMI 形式, 用 Matlab-LMI 工具箱即可进行求解

根据引理 1, 若 (Q_1, G_1) 是不等式组(7)的一个可行解, 相应的稳态状态方差必须满足 $Z_{11} < Q_1$, 即可求得满足方差指标的控制律 G_1 , 同时控制律 G_1 使

得该闭环子系统的极点配置在指定的区域 求出 G_1 后, 则滑模面方程为 $S(t) = \tilde{F}_1 z_1(t) + \tilde{F}_2 G_1 z_1(t) = (\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2 G_1) z_1(t)$. 在滑模面上, 令 $\tilde{F}_1 = -\tilde{F}_2 G_1$, 则

$$S(t) = 0, \quad F = [-\tilde{F}_2 G_1 \quad \tilde{F}_2] = \tilde{F}_2 [-G_1 \quad I_m] \quad (8)$$

其中 \tilde{F}_2 为不为零的任意 m 阶非奇异方阵

对系统简约形式(3) 再作非奇异变换, 有

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 \\ G_1 & I_m \end{bmatrix},$$

可得

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = N_1 \xi_1 + \tilde{A}_{12} \xi_2 + \tilde{D}_1 \omega(t), \\ \dot{\xi}_2 = N_2 \xi_1 + K \xi_2 + \tilde{B}_2 u + (G_1 \tilde{D}_1 + \tilde{D}_2) \omega(t), \\ S = \tilde{F}_2 \xi_2 \end{cases} \quad (9)$$

其中: $N_1 = \tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12} G_1, N_2 = G_1 N_1 - \tilde{A}_{22} G_1 + \tilde{A}_{21}, K = G_1 \tilde{A}_{12} + \tilde{A}_{22}$

为保证所有轨线均趋向 $S = \{\xi | E(\xi) = 0\}$, 取

$$u_L(t) = -\tilde{B}_2^{-1} [N_2 \xi_1 + K \xi_2 - A^* \xi_2],$$

$$\Psi = \lim_{t \rightarrow \infty} E \left\{ \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1^T & \xi_2^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{bmatrix}.$$

将 $R = G_1 \tilde{D}_1 + \tilde{D}_2$ 代入系统(9), 则系统方程为

$$\dot{\xi}_2 = A^* \xi_2 + R \omega(t). \quad (10)$$

对于闭环系统(10), 所有特征值均在区域 $\Omega(\alpha, r, \theta)$ 中的一个充分条件是存在一个对称正定矩阵 Q_2 , 同时相应的稳态状态方差满足 $\Psi_{22} < Q_2$. 采用引理 1 求解 Q_1 和 G_1 的方法, 可求出阵 Q_2 和 A , 同时该子系统极点被配置在指定的区域 线性部分的表达式为

$$u_L(t) = -\tilde{B}_2^{-1} [N_2, K - A^*] \Gamma T x(t). \quad (11)$$

由定理 1 可知, 若求出系统(10) 的状态协方差矩阵 Ψ_{22} , 则可求出状态协方差矩阵 Z_{22}

4 非线性部分设计

定理 2 系统(1) 在

$$\begin{cases} u(t) = u_L(t) + u_N(t), \\ u_N(t) = -\theta R \tilde{B}_2^{-1} \zeta \theta > 0 \end{cases} \quad (12)$$

控制下, 保证所有轨迹在有限时间内以均方稳定的意义到达 S , 实现闭环系统从任意初始位置出发在有限时间内满足

$$E S = 0$$

其中 $\zeta = Q_2 \xi_2 / Q_2 \xi_2$.

证明 构造 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} \xi_2^T Q_2 \xi_2,$$

$$\frac{d(EV)}{dt} = E \frac{dV}{dt} = E (\xi_2^T Q_2 \dot{\xi}_2) =$$

$$E \left\{ \xi_2^T Q_2 \left[A^* \xi_2 - \theta R \frac{Q_2 \xi_2}{Q_2 \xi_2} + R \omega(t) \right] \right\}$$

$$- \xi_2^T \theta Q_2 \xi_2 - \theta R Q_2 \xi_2 < 0$$

由文献[7]可知, 在控制 $u(t)$ 作用下, 从初始位置 ξ_{20} 能在有限时间内到达 S , 实现 $E S = 0$

为保证工程实现, 令 $m \operatorname{sgn}(S) = \zeta \operatorname{sgn}(S)$ 为符号函数 用状态变量 $x(t)$ 表示, 则有

$$u_N(t) = -\theta \mathbf{1} \tilde{F}_2 \tilde{B}_2^{-1} \operatorname{sgn}(S). \quad (13)$$

由于 $|\zeta| = 1, m$ 值的大小只影响系统(1) 趋向 S 的速度, 可根据试验结果和经验确定, 一般取 $\theta \mathbf{1} = 0.1 \sim 1$.

5 应用算例

行进间车载武器火力控制系统随着车辆的运动, 一部分静止射击时便已存在的噪声幅值增大, 并且产生一些新的误差源, 在瞄准与射击过程中系统将始终处于随机振动状态, 其幅值往往大大超过射击允许的精度要求 为了能在炮管大幅度随机振动的情况下增大可射击频率, 减少射击延迟, 其振动必须具有一定的稳态方差特性, 同时应具有足够短的调节时间 该调节时间与极点配置有关

某型号车载火控系统的协方差简化模型状态方程的数据如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -23.5 & -23.8 & -9 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 15.5 & -1 \\ 72.7 & 15.5 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0], D = \begin{bmatrix} 2.65 \times 10^{-2} \\ 12.4 \\ -75.8 \end{bmatrix}.$$

其中角度误差的单位为密位(mil). 设给定的极点指标为 $\Omega = (1, 6, \pi/3)$, 输出方差小于 10 mil 计算得到切换面方程

$$S(t) = \begin{bmatrix} 1.1272 & 0.5 & 0 \\ 0.4311 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} x(t).$$

根据式(10) 和(11) 得

$$u_L(t) = \begin{bmatrix} 0.6483 & 0.2523 & -0.0204 \\ -1.1381 & 0.4896 & 0.4751 \end{bmatrix} x(t),$$

$$u_N(t) = - \begin{bmatrix} 0.395 & 0.025 \\ -1.852 & 0.395 \end{bmatrix} \operatorname{sgn}(S),$$

子系统 1 的极点为 -3.7902 , 子系统 2 的极点为 $[-2.5625, -4.3392]$ 在 $u(t) = u_L(t) + u_N(t)$ 控制下, 系统的稳态协方差为

$$X = \begin{bmatrix} 7.5 & -19.99 & 65.09 \\ -19.99 & 57.307 & -184.85 \\ 65.09 & -184.85 & 846.614 \end{bmatrix}.$$

由稳态协方差和输出方差的关系,可得输出方差为 7.5 mil 在初始条件 $x = [10 \ 0 \ 0]^T$,白噪声输入下,系统输出响应如图 2 所示

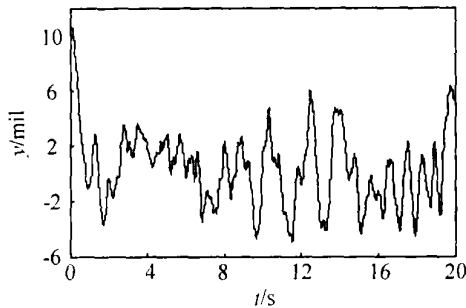


图 2 白噪声输入下系统输出响应

6 结 论

本文利用极点和协方差相容控制理论,采用 LMI 方法进行随机系统的变结构控制设计.最后通过车载火控系统的应用实例计算,给出了该方法在实际工程中的应用领域

参考文献(References)

- [1] Zheng F, Chen M, Gao W B. Variable Structure Control of Stochastic Systems[J]. *System and Letters*, 1994, 22(3): 209-222
- [2] 邓飞其,冯昭枢,刘永清.随机系统的变结构控制[J]. *自动化学报*, 1997, 23(2): 267-270
- [3] Chang K Y, Wang W J. Robust Covariance Control for Perturbed Stochastic Multivariable System via Variable Structure Control[J]. *Systems and Control Letters*, 1999, 37(2): 323-328
- [4] Wang W J, Chang W K. Variable Structure Based Covariance Assignment for Stochastic Multivariable Model Reference Systems[J]. *Automatica*, 2000, 36(1): 141-146
- [5] 王远钢,郭治.状态反馈中圆形极点与状态方差约束的相容性[J]. *自动化学报*, 2001, 27(2): 207-213
- (Wang Y G, Guo Z. Consistency of Circular Pole and State Variance Constraints in State-feedback Control[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(2): 207-213)
- [6] Liu S Q, Wang Y G, Guo Z. Satisfactory Filter of Linear Periodic Systems with Parameter Uncertainty[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(3): 345-350
- [7] Christopher Edwards, Ashu Akoachere, Sarah K Spurgeon. Sliding-mode Output Feedback Controller Design Using Linear Matrix Inequalities[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(1): 115-119
- [8] 俞立.鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法[M].北京:清华大学出版社,2002:96-104
- (Yu L. *Robust Control — Treatment Method of Linear Matrix Inequality* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 96-104)
- [5] Huang C M, Tsai J S H, Provence R S, et al. The Observer-based Linear Quadratic Sub-optimal Digital Tracker for Analog Systems with Input and State Delays[J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2003, 24(4): 197-236
- [6] Tang G Y, Wang H H. Successive Approximation Approach of Optimal Control for Nonlinear Discrete-time Systems[J]. *Int J of Systems Science*, 2005, 36(3): 153-161.
- [7] Tang G Y, Wang H H. Suboptimal Control for Discrete Linear Systems with Time-delay: A Non-delay Conversion Approach [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2005, 31(3): 419-426
- [8] 吕鹏飞,唐功友,贾小波,等.非线性时滞系统次优控制的逐次逼近法[J]. *控制与决策*, 2004, 19(2): 230-234
- (Lv P F, Tang G Y, Jia X B, et al. Successive Approximation Approach of Suboptimal Control for Nonlinear Time-delay Systems [J]. *Control and Decision*, 2004, 19(2): 230-234)
- [9] Cimen T, Banks S P. Nonlinear Optimal Tracking Control with Application to Super-tankers for Autopilot Design[J]. *Automatica*, 2004, 40(11): 1845-1863
- [10] Chou J H, Hsieh C H, Sun J H. On-line Optimal Tracking Control of Continuous-time systems [J]. *Mechatronics*, 2004, 14(5): 587-597.

(上接第1282页)