

文章编号: 1001-0920(2005)11-1296-04

## 基于卡尔曼滤波器的状态 $\chi^2$ 检验法应用条件分析

邱 恺, 吴训忠, 魏瑞轩, 张宗麟, 陈天如  
(空军工程大学 工程学院, 西安 710038)

**摘 要:** 基于卡尔曼滤波器的状态 $\chi^2$ 检验法在应用于动态系统的故障检测时具有较高的灵敏度,但在应用中存在两种潜在的局限性。为此指出并具体研究了这两种局限性;在理论分析的基础上,提出了利用滑动的卡尔曼滤波器输出重置状态递推器先验信息的改进方法。仿真算例进一步说明了结论的有效性。

**关键词:** 状态 $\chi^2$ 检验法; 故障检测; 状态递推器; 稳定性; 滑动卡尔曼滤波器输出

**中图分类号:** TP206.3      **文献标识码:** A

## Application Conditions of the State Chi-square Test Based on Kalman Filter for Fault Detection

QIU Kai, WU Xun-zhong, WEI Rui-xuan, ZHANG Zong-lin, CHEN Tian-ru

(Institute of Engineering, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China Correspondent: QIU Kai, Email: qiukai6321@sina.com)

**Abstract:** Though the state chi-square test (SCST) has a high fault detection sensitivity, it has disadvantages. Two such disadvantages in a dynamic system with the application of the SCST to fault detection are investigated. Firstly, when the system with the stability of Kalman filter is not stable, the false dismissal probability of the SCST is high because of the divergence of the estimation covariance of the state propagator. Secondly, when the system is stable, the SCST may yield a big false alarm probability. Then it is theoretically pointed out that the stability of the system is necessary for the SCST. Finally, an improved method of using the moving outputs of Kalman filter to reset the prior information of the state propagator is given. Simulation shows the effectiveness of the results.

**Key words:** State Chi-square test; Fault detection; State propagator; Stability; Moving outputs of Kalman filter

### 1 引 言

基于卡尔曼滤波器的残差 $\chi^2$ 检验法易于发现系统的硬故障,但对于软故障并不十分有效,因为故障传感器的输出将影响预报值,使预报值中包含故障信息<sup>[1]</sup>。文献[2]提出一种基于卡尔曼滤波器的状态 $\chi^2$ 检验法,用卡尔曼滤波器的状态估计与先验信息递推计算的状态估计之间的差异进行故障检测。文献[3,4]考虑到初始条件等误差的影响,提出一种采用双递推器结构的 $\chi^2$ 状态检验法。基于卡尔曼滤波器的状态 $\chi^2$ 检验法的显著特点是不会出现跟踪故障现象<sup>[2]</sup>,具有较高的软故障检测能力,

因而在一些动态系统的故障检测中受到重视<sup>[3-8]</sup>。

根据系统状态模型的特性,状态 $\chi^2$ 检验法可能存在两种风险:较大的误检概率和较大的漏检概率。本文从理论上具体分析了基于卡尔曼滤波器的状态 $\chi^2$ 检验法在应用中可能出现这两种风险的原因,通过仿真算例进行验证,并提出了改进措施。

### 2 状态 $\chi^2$ 检验法

考虑如下带故障的离散系统模型<sup>[1]</sup>:

$$\begin{cases} X(k) = \Phi(k, k-1)X(k-1) + \Gamma_{k-1}W_{k-1}, \\ Z(k) = H(k)X(k) + V_k + f_{k,q}\chi \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期: 2004-11-03; 修回日期: 2005-03-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(60304004); 空军工程大学博士论文创新基金

作者简介: 邱恺(1977—),男,湖北通山人,博士生,从事信息融合技术、故障检测的研究; 张宗麟(1940—),男,西安人,教授,博士生导师,从事惯性导航与组合导航等研究

式中:  $Z(k) \in R^m$  为系统量测,  $X(k) \in R^n$  为系统状态,  $\Phi(k, k-1) \in R^{n \times n}$  为一步状态转移阵,  $\Gamma_{k-1} \in R^{n \times r}$  为系统噪声阵,  $W_k \in R^r$  和  $V_k \in R^m$  分别为相互独立的零均值高斯白噪声序列,  $E\{W_k W_k^T\} = Q_k \delta_{jk}$ ,  $E\{V_k V_k^T\} = R_k \delta_{jk}$ , 随机向量  $Y$  表示故障的大小,  $f_k, \varphi = 1(k - \varphi)$  为阶跃函数,  $\varphi$  表示故障发生的时刻 设初始条件  $E\{X(0)\} = X_0, E\{X_0 X_0^T\} = P_0$

令  $\hat{X}(k)$  为卡尔曼滤波器的估计值,  $\hat{X}_s(k)$  为状态递推器利用先验信息递推计算的状态值 利用二者的差异对故障进行检测和隔离, 即为状态 $\chi^2$  检验法 令  $\hat{X}(0) = \hat{X}_s(0) = X_0, P(0) = P_s(0) = P_0$ , 状态估计  $\hat{X}(k)$  由下列公式计算:

$$\begin{aligned} \hat{X}(k) &= (I - K(k)H(k))\Phi(k, \\ &\quad k-1)\hat{X}(k-1) + K(k)Z(k), \\ P(k, k-1) &= \Phi(k, k-1)P(k-1)\Phi^T(k, \\ &\quad k-1) + \Gamma_{k-1}Q_{k-1}\Gamma_{k-1}^T, \\ P(k) &= (I - K(k)H(k))P(k, k-1), \\ K_k &= P(k, k-1)H^T(k)[H(k)P(k, \\ &\quad k-1)H^T(k, k-1) + R_k]^{-1}. \end{aligned}$$

$\hat{X}_s(k)$  由状态递推器计算, 即

$$\begin{cases} \hat{X}_s(k) = \Phi(k, k-1)\hat{X}_s(k-1), \\ P_s(k) = \Phi(k, k-1)P_s(k-1)\Phi^T(k, \\ \quad k-1) + \Gamma_{k-1}Q_{k-1}\Gamma_{k-1}^T. \end{cases} \quad (2)$$

因为初始状态  $X_0$  为高斯随机向量, 故  $\hat{X}(k)$ ,  $\hat{X}_s(k)$  均为高斯随机向量 定义估计误差

$$\begin{aligned} e_k^K &= X(k) - \hat{X}(k), e_k^s = X(k) - \hat{X}_s(k), \\ \beta_k &= e_k^K - e_k^s = X_s(k) - \hat{X}(k), \end{aligned}$$

则  $\beta_k$  的方差为

$$\begin{aligned} T_k &= E\{\beta_k \beta_k^T\} = \\ &E\{e_k^K (e_k^K)^T - e_k^K (e_k^s)^T - e_k^s (e_k^K)^T + e_k^s (e_k^s)^T\} = \\ &P(k) + P_s(k) - P_{ks}(k) - (P_{ks}(k))^T. \end{aligned} \quad (3)$$

$\beta_k$  是高斯随机向量  $e_k^K$  和  $e_k^s$  的线性组合, 所以是均值为零、方差为  $T_k$  的高斯随机向量 可以证明<sup>[1,2]</sup>, 当  $P(0) = P_{ks}(0) = P_0$  时,  $P(k) = P_{ks}(k)$ , 则  $T_k = P_s(k) - P(k)$ . 根据  $\beta_k$  和  $T_k$ , 构建故障检测函数

$$\lambda_k = \beta_k^T T_k^{-1} \beta_k, \quad (4)$$

则  $\lambda_k \sim \chi^2(m)$ ,  $m$  为量测  $Z(k)$  的维数

故障判定准则为: 若  $\lambda_k > T_D$ , 则判定有故障; 若  $\lambda_k \leq T_D$ , 则判定无故障  $T_D$  为预先设置的门限, 可由误警率  $P_f$  确定

### 3 状态 $\chi^2$ 检验方法应用的两种风险

从以上状态 $\chi^2$  检验法的统计量构成可以看出, 基于状态递推器的状态估计  $\hat{X}_s(k)$  和误差  $e_k^s$ , 与系统的状态方程和先验信息  $X_0$  有关, 与传感器的量测无关; 而基于卡尔曼滤波器的状态估计  $\hat{X}(k)$  和

$e_k^K$ , 与系统传感器的量测有关 因此当传感器发生故障时, 以上方法应具有很高的故障检测灵敏度 但从式(3)可以看出,  $T_k$  不但与估计方差  $P(k)$  有关, 而且与  $P_s(k)$  有关, 虽然通过初值的选择可确保  $P(k) = P_{ks}(k)$ , 但当  $P(k)$  与  $P_s(k)$  相差较大时,  $T_k$  增大, 导致故障检测的灵敏度降低  $P_s(k)$  是仅与系统状态方程有关的量, 而  $P(k)$  是与状态方程和量测方程有关的量 因此, 系统故障检测的灵敏度不但与系统模型的建模误差和初始条件误差有关, 而且与系统本身的结构特性有关 根据系统状态转移阵的性质, 在应用状态 $\chi^2$  检验法时, 将出现两种风险:

1)  $P_s(k)$  将随着滤波步数的增加而逐渐发散, 此时状态检验法存在很大的漏检概率, 灵敏度随之逐渐降低;

2)  $P_s(k)$  将随着滤波步数的增加而逐渐处于稳态值(即为收敛的), 此时状态检验法的灵敏度将增加, 可能造成较大的误检率

令  $\lambda(\Phi(k, k-1)) (i = 1, \dots, n)$  为状态转移阵  $\Phi(k, k-1)$  的特征值, 根据该特征值的情况, 有以下结论:

**定理 1** 当系统不稳定, 即存在  $|\lambda| > 1$  时, 将出现第 1 种风险, 此时状态 $\chi^2$  检验法是不可用的或存在很大的漏检概率

**证明** 由卡尔曼滤波稳定的充分条件<sup>[1]</sup>可知, 若系统是随机可检测的, 则系统是滤波稳定的, 即当状态转移阵  $\Phi(k, k-1)$  的不可观测部分稳定, 而可观测部分不一定稳定时, 系统仍是可滤波稳定的 因此只要系统是滤波稳定的, 则基于卡尔曼滤波器的方差阵  $P(k)$  必然收敛, 即  $\lim_k P(k) = \text{const}$

当系统的可观测部分不稳定, 即  $\Phi(k, k-1)$  存在绝对值大于 1 的特征值时, 由式(2)和线性系统理论的相关知识可知,  $P_s(k)$  阵将会发散, 即  $\lim_k P_s(k) = \infty$ , 从而  $\lim_k T_k = \infty$ . 由于  $E\beta_k = E(e_k^K - e_k^s) = 0$ , 即  $\beta_k$  有界, 从而  $\lim_k \lambda_k = 0$

综上, 定理 1 得证

**定理 2** 状态 $\chi^2$  检验法可使用的必要条件是系统为稳定的, 即  $|\lambda| < 1, i = 1, \dots, n$ ; 但此时将出现第 2 种风险, 可能产生较大的误警率

**证明** 若系统是稳定的, 则必是滤波稳定的, 即  $\lim_k P(k) = \text{const}$  考虑  $Q(k) = 0$  的情况, 由式(2)可得

$$\begin{aligned} P_s(k) &= \Phi(k, k-1)P_s(k-1)\Phi^T(k, k-1) = \\ &\Phi(j+1, j)P_s(0)\left\{\prod_{i=0}^{k-1} \Phi^T(j+1, j)\right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

由于  $|\lambda| < 1, i = 1, \dots, n$ , 从而有

$$\Phi(j + 1, j) = I \quad (6)$$

其中  $I$  为单位阵 将式(6) 代入(5) 可得

$$P_s(k) = P_s(0).$$

上式说明  $P_s(k)$  有界, 从而存在常数阵  $M$ , 使得  $P_s(k) < M$ . 因此存在常数阵  $N$ , 使得  $T_k < N$ , 即  $T_k$  有界, 从而  $T_k^{-1} > N^{-1}$ , 因此根据式(4) 可以进行故障检测

由于状态递推器中没有量测更新, 系统建模误差将使无故障时的状态递推器估计值  $\hat{X}_s(k)$  逐渐偏离真值, 即无故障时  $\beta_k$  增大, 但  $T_k$  不会随之增大, 而是趋于稳态值, 从而导致无故障时  $\lambda_k$  也增大, 因此, 可能产生较大的误警率

### 4 仿真及改进

考虑如下单输入单输出系统:

$$x(k + 1) = ax(k) + w(k),$$

$$y(k) = bx(k) + v(k) + f(k - m).$$

其中:  $w(k)$  和  $v(k)$  分别为零均值的高斯白噪声, 且  $E\{w(k)w^T(j)\} = q\delta_{kj}, E\{v(k)v^T(j)\} = r\delta_{kj}, f(k - m)$  为从  $\hat{m}$  时刻开始出现的传感器故障量. 设初始条件为:  $\hat{X}(0) = \hat{X}_s(0) = 0, P(0) = P_s(0) = 0, q = r = 0.01, b = 1$ . 将残差检验法和状态检验法进行对比研究, 令  $r_{s1}$  为残差检验法的故障检测函数,  $r_{s2}$  为状态检验法的故障检测函数. 如果以  $P_f = 5 \times 10^{-3}$  作为误警率, 则故障检测门限为  $T_D = 7.879$ , 下面对两种状态分别进行分析:

#### (1) 系统发生软故障

设传感器从第 50 步开始发生软故障,  $f = 0.02(k - 50)$ . 令基于卡尔曼滤波器的估计方差为  $p_z(k)$ , 基于状态递推器的方差为  $p_s(k)$ .

1) 当  $a < 1$  时, 设  $a = 0.8$  系统是稳定的, 也是滤波稳定的, 同时递推器也是稳定的,  $p_z(k)$  和  $p_s(k)$  都趋于稳态值. 当传感器故障时, 状态检验法和残差检验法的灵敏度比较曲线如图 1 所示, 可以看出状态检验法具有较高的软故障检测灵敏度. 当无故障时, 状态检验法的误检概率明显高于残差检验法, 如图 2 所示

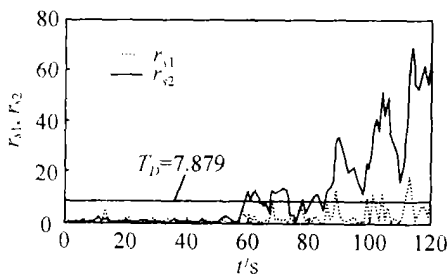


图 1 a = 0.8 时传感器故障的检测函数

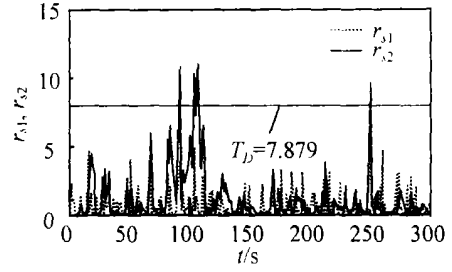


图 2 a = 0.8 时传感器无故障的检测函数

2) 当  $a > 1$  时, 设  $a = 1.1$ , 此时系统是不稳定的, 但却是卡尔曼滤波稳定的. 当传感器发生故障时, 由图 3 和图 4(a) 可以看出, 残差检验法经过一段时间后才检测到系统故障, 而根据状态检验法, 将不能发现系统有故障. 因为此时  $p_s(k)$  趋于无穷,  $p_z(k)$  趋于稳态值, 虽然故障时估计偏差  $\beta_k$  也变大, 但增长量远低于  $p_s(k)$ , 不足以达到门限. 系统无故障时, 两种方法的故障检测函数变化曲线如图 4(b) 所示, 可以看出  $r_{s2}$  很快趋于稳态值

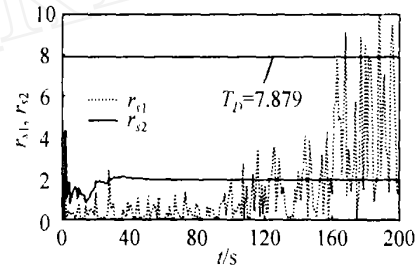
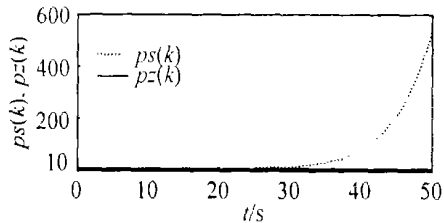
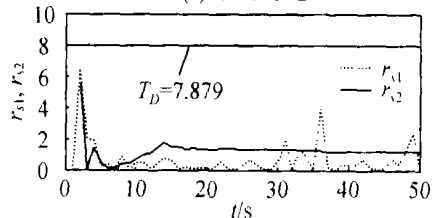


图 3 a = 1.1 时传感器故障的故障检测函数



(a) 估计方差



(b) 故障检测函数

图 4 a = 1.1 时传感器无故障估计方差及检测函数

3) 当  $a = 1$  时, 设  $a = -1$ , 此时系统是临界稳定的, 也是卡尔曼滤波稳定的. 系统的估计方差  $p_z(k)$  和  $p_s(k)$  的变化曲线如图 5(a) 所示, 可以看出基于状态递推器的估计方差  $p_s(k)$  是不断递增的. 当系统发生软故障时, 两种方法的故障检测函

数  $r_{s2}$  和  $r_{s1}$  的变化曲线如图 5(b) 所示, 此时状态检验法难以发现故障, 因为  $p_s(k)$  是发散的

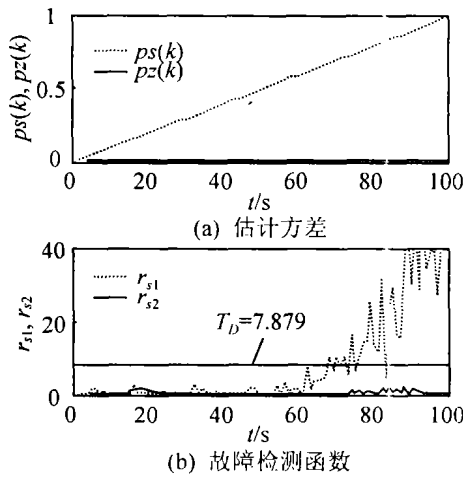


图 5 a = - 1 时传感器故障的估计方差及检测函数

(2) 系统发生硬故障

设传感器在第 50 步发生突发硬故障,  $f = 1$ .

1) 当  $a = 0.8$  时, 状态检验法和残差检验法的故障检测函数如图 6(a) 所示, 可以看出两种方法均能检测出系统故障

2) 当  $a = 1.1$  时, 两种方法的检测结果如图 6(b) 所示, 可以看出, 此时系统不稳定, 状态检验法无法检测出系统故障, 而残差检验法则可检测出系统故障

3) 当  $a = -1$  时, 由图 6(c) 可以看出, 残差检验法可以发现突发故障, 而状态检验法无法检测出系统故障. 系统是临界稳定的, 其方差随时间增长, 故障的变化量远远小于方差, 因而难以发现故障

综合以上仿真结果可以看出: 当系统稳定时, 状态检验法能够发现系统故障, 具有很高的故障检测灵敏度, 但是存在较大的误检概率; 当系统是不稳定和临界稳定时, 估计方差随时间增长而增长, 导致故障检测函数趋于稳态值, 难以发现故障, 此时该方法不可用

基于上述分析, 本文提出以下改进方法:

1) 分析状态检验法使用的前提条件. 根据建立的系统状态模型, 分析系统的特征值性质, 只有当系统是内部稳定时, 状态检验法才是理论上可信的

2) 采用卡尔曼滤波器的前  $N$  步估计和方差作为递推器的先验信息, 在滤波过程中重置状态递推器. 由式(2) 易得

$$\hat{X}_s(k) = \prod_{j=0}^{k-1} \Phi(j+1, j) \hat{X}_s(0) =$$

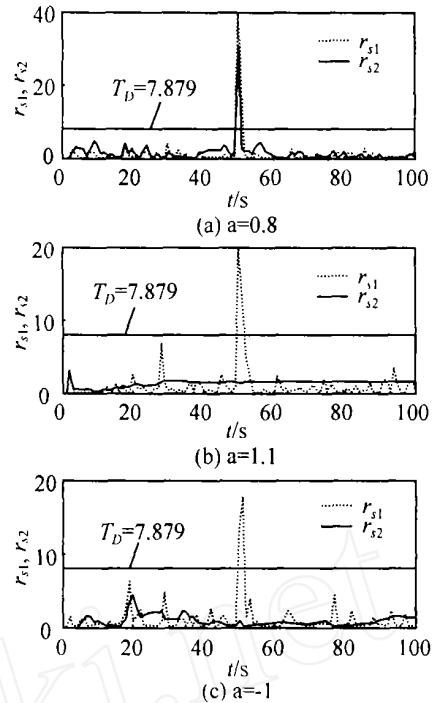


图 6 传感器发生硬故障时的故障检测函数

$$\hat{\Phi}(j+1, j) \hat{X}_s(k-N) \quad (7)$$

将卡尔曼滤波器的输出  $\hat{X}(k-N)$  和  $\hat{P}(k-N)$  分别代入式(7)和(2), 递推计算得到当前的  $\hat{X}_s(k)$  和  $P_s(k)$ , 然后进行故障检测, 只要  $N$  取得适当,  $\hat{X}_s(k)$  将不含或含有较少的故障信息. 利用卡尔曼滤波器的输出对递推器进行校正, 可有效抑制递推器的误差, 降低误检概率, 保持较高的检测灵敏度. 相关仿真结果说明了该方法的有效性

5 结 论

基于卡尔曼滤波器的状态  $\chi^2$  检验法, 在一些动态系统的应用中具有较高的软故障检测灵敏度, 因而受到广泛重视. 本文分析了这种故障检验法在应用中可能出现的两种风险, 在理论分析和仿真的基础上, 提出一种改进措施, 这对该方法的正确应用具有重要意义

参考文献(References)

[1] 秦永元, 张洪钺, 汪叔华. 卡尔曼滤波与组合导航原理 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1998  
 (Qin Y Y, Zhang H Y, Wang S H. Kalman Filter and Integrated Navigation Theory [M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 1998 )  
 [2] Brumback B D, Srinath M D A. Chi-square Test for Fault-detection in Kalman Filter [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1987, 32(6): 552-554

(下转第 1303 页)

步说明 RCQGA 良好的寻优能力, 对函数  $F_1$  分别使用 QGA, NQGA 和 RCQGA 进行测试, 收敛性曲线如图 1 所示

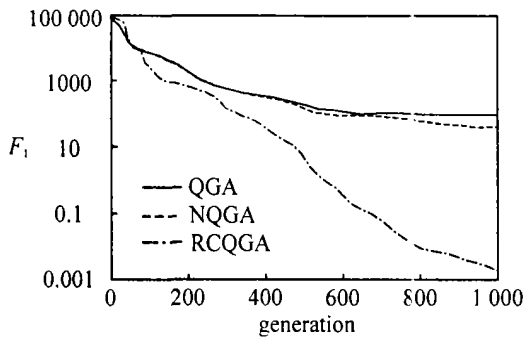


图 1 对函数  $F_1$  测试的收敛性曲线

由图 1 可以看出, RCQGA 具有比 QGA 和 NQGA 更优越的寻优能力 与传统的 GA, QGA 和 NQGA 相比, RCQGA 可以较好地解决高维多极值优化问题, 具有收敛性能好等优点 但与传统的 QGA 相比, 该算法处理高维多极值问题时具有较高的时间复杂度, 运行相同的代数所需要的时间大于传统的 GA 算法

## 5 结 论

本文提出的实数编码混沌量子遗传算法适用于高维多极值优化问题 与传统的 QGA 算法相比, 该算法具有编码方便, 运行时间短, 收敛速度快, 全局寻优能力强等优点, 适用于复杂函数优化问题

## 参考文献 (References)

- [1] Srinivas M, Patnaik L M. Genetic Algorithms: A Survey [J]. *Computer*, 1994, 27(6): 17-26
- [2] Bennett C H, Shor P. Quantum Information Theory [J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 1998, 44(6): 2724-2742
- [3] Narayanan A, Moore M. Quantum-inspired Genetic Algorithms [A]. *Proc of IEEE Int Conf on Evolutionary Computation* [C]. Nagoya: IEEE Press, 1996: 61-66
- [4] Yang S Y, Jiao L C. The Quantum Evolutionary Programming [A]. *15th Int Conf on Computational Intelligence and Multimedia Applications* [C]. IEEE Press, 2003: 362-367.
- [5] Zhang G X, Gu Y J, Hu L Z, et al. A Novel Genetic Algorithm and Its Application to Digital Filter Design [A]. *Proc on IEEE Intelligent Transportation Systems* [C]. IEEE Press, 2003, 2: 1600-1605
- [6] Chen H, Zhang J S. Chaos Updating Rotated Gates Quantum-inspired Genetic Algorithm [A]. *IEEE Proc on Communications, Circuits and Systems* [C]. Chengdu: UESTC Press, 2004: 1108-1112
- [7] 商允伟, 裘聿皇. 适应值共享对遗传算法选择概率的影响分析[J]. *控制与决策*, 2003, 18(6): 708-711. (Shang Y W, Qiu Y H. Influence of Fitness Sharing on the Selection Probability of Genetic Algorithm [J]. *Control and Decision*, 2003, 18(6): 708-711.)

(上接第 1299 页)

- [3] Ren D. Failure Detection of Dynamical Systems with the State Chi-square Test [J]. *J of Guidance, Control and Dynamics*, 1994, 17(2): 271-277.
- [4] Ren D, Lin C F. Failure Diagnosis Using the State Chi-square Test and the ARTMAP Neural Networks [A]. *Proc of the American Control Conf* [C]. Washington: Seattle, 1995: 3279-3283
- [5] 张崇猛, 庄良杰, 陈超英, 等. 一种容错联邦滤波算法在 NS/GPS/Doppler 组合导航系统中的应用 [J]. *中国惯性技术学报*, 1999, 7(4): 1-5. (Zhang CM, Zhuang L J, Chen C Y, et al. Application of a Fault-tolerant Federated Filter Algorithm in NS/GPS/Doppler Integrated Navigation System [J]. *J of Chinese Inertial Technology*, 1999, 7(4): 1-5.)
- [6] 陶俊勇, 陶利民, 杨定新. 组合导航系统故障检测技术研究 [J]. *国防科技大学学报*, 2001, 23(1): 31-35. (Tao J Y, Tao L M, Yang D X. New Fault Detection Method for the Integrated Navigation System [J]. *J of National University of Defense Technology*, 2001, 23(1): 31-35.)
- [7] 刘淮, 陈哲. 基于联邦滤波器的新型故障检测结构及算法 [J]. *北京航空航天大学学报*, 2002, 28(5): 550-554. (Liu Z, Chen Z. New Fault Detection Structure and Algorithm Based on Federated Filter [J]. *J of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2002, 28(5): 550-554.)
- [8] 刘承香, 孙枫, 曹洁. SNS/GPS/DVL 组合导航系统的容错研究 [J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2003, 24(2): 157-159. (Liu C X, Sun F, Cao J. Fault Tolerant Design of SNS/DVL Integrated Navigation System [J]. *J of Harbin Engineering University*, 2003, 24(2): 157-159.)