第20卷 第11期　　　　控 制 与 决 策　　　　2005年11月
Vol. 20 No. 11　　　　Control and Decision　　　　Nov. 2005

文章编号: 1001-0920(2005)11-1304-03

不确定离散时间切换系统H∞鲁棒性分析

马国梁, 李　胜, 陈庆伟, 胡维礼
(南京理工大学 自动化系, 南京 210094)

摘　要: 针对一类具有参数不确定性的离散时间切换系统, 在任意切换的情况下研究了这类系统的鲁棒稳定问题和干扰抑制问题. 首先利用公共二次Lyapunov函数法得到切换系统鲁棒稳定且具有H_∞扰动衰减度的充分条件, 并指出这些条件可通过线性矩阵不等式描述; 然后基于分段二次Lyapunov函数给出了分析切换系统H_∞鲁棒性的另一种方法; 最后通过举例说明了所提出两种方法的有效性.

关键词: 切换系统; H_∞鲁棒性; 公共二次Lyapunov函数; 分段二次Lyapunov函数
中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

H∞ Robustness Analysis for Uncertain Discrete Time Switched Systems

MA Guo-liang, LI Sheng, CHEN Qing-wei, HU Wei-li
(Department of Automatic Control, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China. Correspondent: MA Guo-liang, E-mail: ml-job@163.com)

Abstract: A class of discrete time switched systems with parametric uncertainty is considered, and the robust stability problem and disturbance attenuation problem are studied for this class of systems under arbitrary switching. Sufficient conditions for the switched systems to be robustly stable with H_∞ disturbance attenuation are obtained using common quadratic Lyapunov function technique, and these conditions can be formulated via linear matrix inequalities (LMIs). Based on piecewise quadratic Lyapunov function, another method of H_∞ robustness analysis for the switched systems is provided. An example illustrates the validity of both presented methods.

Key words: Switched systems; H_∞ robustness; Common quadratic Lyapunov function; Piecewise quadratic Lyapunov function

1 引　　言

切换系统是工程实践中较为常见的混合动态系统, 稳定性是切换系统研究的重要内容. 目前切换系统稳定性分析主要有公共Lyapunov函数法[1]和多Lyapunov函数法[2], 而对不确定切换系统的鲁棒性研究较为欠缺. H_∞控制理论是目前解决鲁棒性分析问题比较完善的理论体系, 将H_∞控制理论应用于切换系统鲁棒性的分析与综合是近期的一个研究方向. 文献[3]针对每个子系统含有不确定性的切换系统, 研究了通过设计切换函数使系统鲁棒稳定且满足H_∞性能的问题. [4]进一步考虑了采用切换状态反馈控制实现线性时滞系统的H_∞鲁棒镇定. [3,4]适用于切换函数可以由设计者确定、系统为时间连续的情形.

有些情况下, 切换系统的切换函数是未知的, 不能事先确定, 因此需要考虑任意切换的情形. 本文针对子系统含有参数不确定性的一类离散时间切换系统, 分别基于公共二次Lyapunov函数法和分段二次Lyapunov函数法分析了H_∞性能, 给出了系统鲁棒稳定且具有H_∞扰动衰减度γ的充分条件, 指出这一分析过程可通过线性矩阵不等式(LMI)进行描述和求解, 最后举例说明了两种方法的有效性.

收稿日期: 2004-11-08; **修回日期**: 2005-03-07.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60174019, 60474034).
作者简介: 马国梁(1976—), 男, 内蒙托县人, 博士生, 从事混合系统、切换系统的分析与控制等研究; 胡维礼(1941—), 男, 江苏东台人, 教授, 博士生导师, 从事智能控制、网络控制系统等研究.

2　问题描述及预备知识

对于离散线性切换系统

$$x(k+1) = (A_{\sigma(k)} + \Delta A_{\sigma(k)}(k))x(k) + D_{\sigma(k)}w(k),$$
$$z(k) = C_{\sigma(k)}x(k). \tag{1}$$

其中: $x(k) \in R^n$ 为状态变量; $\sigma(k): Z_{0+} \to S = \{1, \cdots, s\}$ 为系统的切换函数, Z_{0+} 为非负整数集合; $\Delta A_{\sigma(k)}(k)$ 为时变的参数不确定性, $\forall i \in S$ 均有 $\Delta A_i(k) = E_i\Sigma_i(k)F_i$, 且 $\Sigma_i^{\mathrm{T}}(k)\Sigma_i(k) \le I$, I 为维数适当的单位阵; A_i, C_i, D_i, E_i, F_i 分别为维数适当的已知定常阵; $w(k) \in R^p$ 为能量有限即 L_2 范数有界的干扰信号, L_2 范数定义为 $\left(\sum_{k=0}^{\infty} w(k)^{\mathrm{T}}w(k)\right)^{\frac{1}{2}}$; $z(k) \in R^q$ 为输出信号.

本文研究的 H_∞ 鲁棒性问题可描述为: 若系统(1) 对任意 $\Delta A_i(k)$ $(\Sigma_i^{\mathrm{T}}(k)\Sigma_i(k) \le I)$ 是内部稳定的 $(w(k) = 0)$, 且在零初始条件下, 对能量有限的非零干扰信号 $w(k)$ 满足 $J = \|z\|_2^2 - \gamma^2\|w\|_2^2 < 0$, 则称系统(1) 是鲁棒稳定的且具有 H_∞ 扰动衰减度 γ.

引入以下引理:

引理 1(矩阵逆引理)　A, B, C, D 为维数适当的矩阵, A 和 D 非奇异, 则有

$$(A + BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(CA^{-1}B + D)^{-1}CA^{-1}$$

成立.

引理 2　A, E, F 为维数适当矩阵, $Q = Q^{\mathrm{T}}$ 为给定对称矩阵, 若存在正定矩阵 P 满足

1) $E^{\mathrm{T}}PE < I$,

2) $A^{\mathrm{T}}(P^{-1} - EE^{\mathrm{T}})^{-1}A + F^{\mathrm{T}}F + Q < 0$,

则对 $\forall\Sigma(k)$ $(\Sigma^{\mathrm{T}}(k)\Sigma(k) \le I, k = 0, 1, \cdots)$ 有

$$(A + E\Sigma(k)F)^{\mathrm{T}}P(A + E\Sigma(k)F) + Q < 0$$

成立.

引理 3　给定维数适当矩阵 P 和 G, 其中 $P > 0$, 则条件 $I - G^{\mathrm{T}}PG > 0$ 与 $P^{-1} - GG^{\mathrm{T}} > 0$ 等价.

根据 Schur 引理易证引理 3 成立.

3　主要结果

3.1　公共二次 Lyapunov 函数法

基于公共二次 Lyapunov 函数法分析系统(1) 的 H_∞ 鲁棒性有以下结果:

定理 1　对于系统(1), 若 $\forall i \in S$, 存在正定矩阵 P 满足

$$P^{-1} - \frac{1}{\gamma^2}D_iD_i^{\mathrm{T}} - E_iE_i^{\mathrm{T}} > 0, \tag{2}$$

$$A_i^{\mathrm{T}}\left(P^{-1} - \frac{1}{\gamma^2}D_iD_i^{\mathrm{T}} - E_iE_i^{\mathrm{T}}\right)^{-1}A_i - P + C_i^{\mathrm{T}}C_i + F_i^{\mathrm{T}}F_i < 0, \tag{3}$$

则系统(1) 对于任意切换是鲁棒稳定的且具有 H_∞ 扰动衰减度 γ.

证明　首先证明系统的鲁棒稳定性. 不妨假设 $\sigma(k) = i$, 系统(1) 在 k 时刻切换至第 i 个子系统, 取 Lyapunov 函数为 $V(x(k)) = x^{\mathrm{T}}(k)Px(k)$. 若使系统(1) 内部稳定, 需要求 $w(k) = 0$ 时 $V(x(k))$ 的差分负定, 即

$$\Delta V(x(k)) = x^{\mathrm{T}}(k)((A_i + E_i\Sigma_i(k)F_i)^{\mathrm{T}}, P(A_i + E_i\Sigma_i(k)F_i) - P)x(k) < 0. \tag{4}$$

应用引理 2 和引理 3, 由式(2), (3) 的推导可得

$$(A_i + E_i\Sigma_i(k)F_i)^{\mathrm{T}}\left(P^{-1} - \frac{1}{\gamma^2}D_iD_i^{\mathrm{T}}\right)^{-1}, (A_i + E_i\Sigma_i(k)F_i) - P + C_i^{\mathrm{T}}C_i < 0. \tag{5}$$

应用引理 1 有

$$(A_i + E_i\Sigma_i(k)F_i)^{\mathrm{T}}P(A_i + E_i\Sigma_i(k)F_i) - P + C_i^{\mathrm{T}}C_i - (A_i + E_i\Sigma_i(k)F_i)^{\mathrm{T}}PD_i(D_i^{\mathrm{T}}PD_i - \gamma^2I)^{-1}D_i^{\mathrm{T}}P(A_i + E_i\Sigma_i(k)F_i) < 0. \tag{6}$$

由式(2) 有 $P^{-1} - \frac{1}{\gamma^2}D_iD_i^{\mathrm{T}} > 0$, 根据引理 3 可知, $D_i^{\mathrm{T}}PD_i - \gamma^2I < 0$. 又 $C_i^{\mathrm{T}}C_i \ge 0$, 由式(6) 推导可得

$$(A_i + E_i\Sigma_i(k)F_i)^{\mathrm{T}}P(A_i + E_i\Sigma_i(k)F_i) - P < 0. \tag{7}$$

即满足 $\Delta V(x(k)) < 0$, 系统(1) 是鲁棒稳定的.

其次证明系统(1) 具有 H_∞ 扰动衰减度 γ. 记

$$J_{\sigma(k)} = z^{\mathrm{T}}(k)z(k) - \gamma^2w^{\mathrm{T}}(k)w(k),$$
$$\tilde{A}_{\sigma(k)}(k) = A_{\sigma(k)} + \Delta A_{\sigma(k)}(k),$$

整理可得

$$J_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} w(k) \\ x(k) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} D_{\sigma(k)}^{\mathrm{T}}PD_{\sigma(k)} - \gamma^2I & D_{\sigma(k)}^{\mathrm{T}}P\tilde{A}_{\sigma(k)}(k) \\ \tilde{A}_{\sigma(k)}^{\mathrm{T}}(k)PD_{\sigma(k)} & \tilde{A}_{\sigma(k)}^{\mathrm{T}}(k)P\tilde{A}_{\sigma(k)}(k) - P + C_{\sigma(k)}^{\mathrm{T}}C_{\sigma(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(k) \\ x(k) \end{bmatrix} - \Delta V(x(k)). \tag{8}$$

由前文假设 $\sigma(k) = i$, 将 $\tilde{A}_i(k)$ 代入式(6), 根据 Schur 引理可得

$$\begin{bmatrix} D_i^{\mathrm{T}}PD_i - \gamma^2I & D_i^{\mathrm{T}}P\tilde{A}_i(k) \\ \tilde{A}_i^{\mathrm{T}}(k)PD_i & \tilde{A}_i^{\mathrm{T}}(k)P\tilde{A}_i(k) - P + C_i^{\mathrm{T}}C_i \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i \in S. \tag{9}$$

又 $J = \sum_{k=0}^{\infty} J_{\sigma(k)}$, $V(x(0)) = 0$, 则由式(9) 有 $J < 0$, 系统(1) 具有 H_∞ 扰动衰减度 γ, 定理 1 成立. □

推论 1　$\forall i \in S$, 若存在正定矩阵 P 使得 LMI

$$\begin{bmatrix} G_i^{\mathrm T} P G_i - I & G_i^{\mathrm T} P A_i \\ A_i^{\mathrm T} P G_i & \begin{matrix} A_i^{\mathrm T} P A_i - P + \\ C_i^{\mathrm T} C_i + F_i^{\mathrm T} F_i \end{matrix} \end{bmatrix} < 0 \qquad (10)$$

是可解的, 其中 $G_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} D_i & E_i \end{bmatrix}$, 则切换系统(1) 是鲁棒稳定的且具有 H_∞ 扰动衰减度 γ

证明 分别将 G_i 代入式(2) 和(3), 应用引理 3 及 Schur 引理, 可证推论 1 成立 □

3.2 分段二次Lyapunov 函数法

系统(1) 存在公共二次Lyapunov 函数表明系统(1) 是二次稳定的, 而二次Lyapunov 函数可以视作分段二次Lyapunov 函数[5] 的特例 若切换系统存在公共的分段二次Lyapunov 函数, 则能保证切换系统是所谓的"分段二次稳定", 而分段二次稳定是一个比二次稳定更弱的条件, 因此采用分段二次Lyapunov 函数法理论上可以降低定理 1 结论的保守性 不妨设有两个备选的二次Lyapunov 函数

$$V_1(x(k)) = x^{\mathrm T}(k) P_1 x(k),$$
$$V_2(x(k)) = x^{\mathrm T}(k) P_2 x(k).$$

系统(1) 的公共Lyapunov 函数取为

$$V(x(k)) = \min\{x^{\mathrm T}(k) P_1 x(k), x^{\mathrm T}(k) P_2 x(k)\}, \qquad (11)$$

即系统的公共Lyapunov 函数由两个二次Lyapunov 函数分段构成, 则有以下结果:

定理 2 若 $\forall i \in S$, 存在正定矩阵 P_1, P_2 和适当的非负常数 $\beta_{i,1}, \beta_{i,2}$ 且满足

$$P_1^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} D_i D_i^{\mathrm T} - E_i E_i^{\mathrm T} > 0, \qquad (12)$$

$$P_2^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} D_i D_i^{\mathrm T} - E_i E_i^{\mathrm T} > 0, \qquad (13)$$

$$A_i^{\mathrm T} \left(P_1^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} D_i D_i^{\mathrm T} - E_i E_i^{\mathrm T}\right)^{-1} A_i - P_1 + C_i^{\mathrm T} C_i + F_i^{\mathrm T} F_i + \beta_{i,1}(P_2 - P_1) < 0, \qquad (14)$$

$$A_i^{\mathrm T} \left(P_2^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} D_i D_i^{\mathrm T} - E_i E_i^{\mathrm T}\right)^{-1} A_i - P_2 + C_i^{\mathrm T} C_i + F_i^{\mathrm T} F_i + \beta_{i,2}(P_1 - P_2) < 0, \qquad (15)$$

则系统(1) 对于任意切换是鲁棒稳定的且具有 H_∞ 扰动衰减度 γ

证明 参照定理 1 的证明过程, 并考虑 Lyapunov 函数(11) 的分段情况, 可以证明定理 2 成立 □

将定理 2 转化为LMI形式, 则有如下推论:

推论 2 $\forall i \in S$, 若存在正定矩阵 P 使得下列 LMI

$$\begin{bmatrix} G_i^{\mathrm T} P_1 G_i - I & G_i^{\mathrm T} P_1 A_i \\ A_i^{\mathrm T} P_1 G_i & \begin{pmatrix} A_i^{\mathrm T} P_1 A_i - P_1 + C_i^{\mathrm T} C_i + \\ F_i^{\mathrm T} F_i + \beta_{i,1}(P_2 - P_1) \end{pmatrix} \end{bmatrix} < 0, \qquad (16)$$

$$\begin{bmatrix} G_i^{\mathrm T} P_2 G_i - I & G_i^{\mathrm T} P_2 A_i \\ A_i^{\mathrm T} P_2 G_i & \begin{matrix} A_i^{\mathrm T} P_2 A_i - P_2 + C_i^{\mathrm T} C_i + \\ F_i^{\mathrm T} F_i + \beta_{i,2}(P_1 - P_2) \end{matrix} \end{bmatrix} < 0 \qquad (17)$$

是可解的, 其中 $G_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} D_i & E_i \end{bmatrix}$, 则切换系统(1) 是鲁棒稳定的且具有 H_∞ 扰动衰减度 γ

注 1 定理 1 和定理 2 的结论是充分条件, 都具有保守性 对于定理 2, 若采用更多的备选的二次Lyapunov 函数构成分段二次Lyapunov 函数, 在理论上可以降低保守性, 但分析过程的计算量会增加

4 计算实例

设切换系统(1) 含有两个子系统, 系统参数为

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.7 & -0.5 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.5 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_1 = C_2 = [0 \quad 0.3],$$

$$D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.2 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = F_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \gamma = 1/\sqrt{2}.$$

解矩阵不等式 $J < 0$ 得

$$P = \begin{bmatrix} 0.0949 & 0.0446 \\ 0.0446 & 0.9068 \end{bmatrix},$$

可知系统(1) 在切换函数任意的情况下是鲁棒稳定的且具有 H_∞ 扰动衰减度 $\gamma = 1/\sqrt{2}$. 矩阵不等式(16) 和(17) 也是可解的, 也可得出相同的结论

5 结 论

本文研究了一类不确定离散时间切换系统的 H_∞ 性能分析问题 在任意切换的情况下, 分别利用公共二次Lyapunov 函数法和分段二次Lyapunov 函数法分析切换系统的鲁棒稳定性和干扰抑制性能 所得结论适用于切换系统具有参数不确定的情形 在此基础上, 与多Lyapunov 函数法相结合, 降低所得结论的保守性 研究更一般的不确定切换系统是下一步工作的重点

参考文献(References)

[1] DeCarlo R A, Branicky M S, Pettersson S, et al. Perspectives and Results on the Stability and Stabilizablility of Hybrid Systems [J]. *IEEE Proc*, 2000, 88(7): 1069-1082.

[2] Branicky M S. Multiple Lyapunov Functions and Other Analysis Tools for Switched and Hybrid Systems [J]. *IEEE Trans on Automatica Control*, 1998, 43(4): 475-482.

(下转第 1310 页)

物浓度的在线估计. 为生物发酵过程中难于在线测量质量参数的实时监测提供了有效的手段.

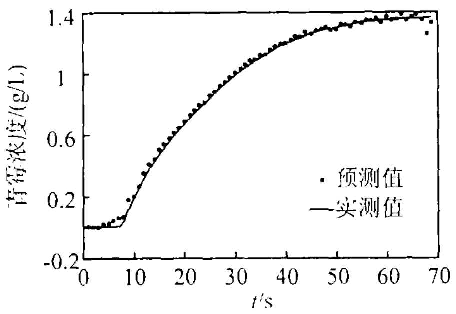

图3 青霉素浓度软测量模型泛化结果

5 结 论

1) 针对LS-SVM 方法不具有"稀疏"特性的缺陷, 提出了改进的LS-SVM 回归方法, 使得回归模型结构得到简化; 在线使用时, 计算量大大减少, 估计速度得到了提高.

2) 应用改进的LS-SVM 方法, 建立了青霉素发酵过程产物(青霉素)浓度的软测量模型. 仿真结果表明, 该软测量方法可以满足青霉素发酵过程产物浓度的辨识要求. 虽然该方法只在该过程中进行了实验, 但也同样适用于其他的生化过程.

参考文献(References)

[1] Cortes C, Vapnik V. Support-vector Networks [J]. *Machine Learning*, 1995, 20(1): 273-297.

[2] Vapnik V N. *The Nature of Statistical Learning Theory* [M]. 1st ed. New York: Springer-Verlag, 1995.

[3] 张学工. 关于统计学习理论与支持向量机[J]. *自动化学报*, 2000, 26(1): 32-42.

(Zhang X G. Statistical Learning Theory and Support Vector Machine [J]. *J of Automation*, 2000, 26(1): 32-42.)

[4] Yan W W, Shao H H, Wang X F. Soft Sensing Modeling Based on Support Vector Machine and Bayesian Model Selection [J]. *Computers and Chemical Engineering*, 2004, 28(10): 1489-1498.

[5] 阎威武, 朱宏栋, 邵惠鹤. 基于最小二乘支持向量机的软测量建模[J]. *系统仿真学报*, 2003, 15(10): 1494-1496.

(Yan W W, Zhu H D, Shao H H. Soft Sensor Modeling Based on Support Vector Machines[J]. *J of System Simulation*, 2003, 15(10): 1494-1496.)

[6] Suykens J A K. Nonlinear Modeling and Support Vector Machine [A]. *In Proc of the IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conf* [C]. Budapest: Hungary, 2001: 287-294.

[7] Mejdell T, Skogestad S. Output Estimation Using Multiple Secondary Measurements: High-purity Distillation [J]. *Process Systems Engineering*, 1993, 9(10): 1641-1653.

[8] Yang S H, Wang X Z, Mcgreavy C, et al. Soft Sensor Based Predictive Control of Industrial Fluid Catalytic Cracking Processes [J]. *Institution of Chemical Engineers Trans IchemE*, 1998, 76(5): 499-508.

[9] 常玉清, 王小刚, 王福利. PCA-RBFN 方法在精馏塔精苯干点估计中的应用[J]. *东北大学学报*, 2004, 25(2): 103-105.

(Chang Y Q, Wang X G, Wang F L. PCA-DRBFN Model in Application to Estimating Dry Point of Pure Benzene in Recifying Tower [J]. *J of Northeastern University*, 2004, 25(2): 103-105.)

(上接第1306 页)

[3] 聂宏, 赵军. 一类不确定切换组合系统的分散H_∞鲁棒镇定[J]. *自动化学报*, 2004, 30(4): 635-640.

(Nie H, Zhao J. Decentralized H_∞ Robust Stabilization for a Class of Uncertain Switched Composite Systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(4): 635-640.)

[4] 聂宏, 王明顺, 赵军. 线性不确定时滞系统混杂反馈H_∞鲁棒镇定[J]. *控制与决策*, 2004, 19(6): 642-646.

(Nie H, Wang M S, Zhao J. Hybrid Feedback H_∞ Robust Stabilization for a Class of Uncertain Linear Time-delay Systems [J]. *Control and Decision*, 2004, 19(6): 642-646.)

[5] Johansson M, Rantzer A. Computation of Piecewise Quadratic Lyapunov Functions [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(4): 555-559.