文章编号: 1001-0920(2005)11-1314-03

随机系统中满意PID调节器的设计

臧文利[a], 郭 治[a], 王远钢[b]
(南京理工大学 a. 自动化系, b. 理学院, 南京 210094)

摘 要: 应用满意控制思想, 研究了扇形区域极点和稳态输出方差约束下PID调节器的设计问题. 将PID调节器设计问题转化为局部状态反馈问题, 再通过适当变换将PID调节器参数设计转化为求解一组线性矩阵不等式的可行解问题, 从而可通过MATLAB中的LMI工具箱方便地求解. 算例说明了所提出方法的有效性.

关键词: 局部状态反馈; PID; 稳态输出方差; 扇形区域极点; 满意控制
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Satisfactory PID Regulator Design of Stochastic Systems

ZANG Wen-li[a], *GUO Zhi*[a], *WANG Yuan-gang*[b]
(a. Department of Automation, b. School of Sciences, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China. Correspondent: ZANG Wen-li, E-mail: zwl1024@sina.com)

Abstract: The design problem of PID regulator under the sector region poles and steady-state output covariance constraints is studied by employing the satisfactory control. The problem can be transformed to partial state feedback problem by choosing state variables properly, and finally to the problem of finding the feasible solution of a series of linear matrix inequalities, which can be solved by the LMI toolbox of MATLAB conveniently. The example shows the efficiency of the proposed method.

Key words: Partial state feedback; PID; Steady-state output covariance; Sector region pole; Satisfactory control

1 引 言

PID调节器在工程实践中广泛使用, 但现有的PID调节器设计大多基于频域的设计方法, 靠经验及现场试调得到PID调节器参数. 满意控制[1]要求系统同时满足期望的多项性能指标, 已经取得了大量研究成果, 所以如何将满意控制应用于传统PID调节器的设计是一个值得研究的问题. 对于这个问题, 已经有过一些尝试. 文献[2]研究了随机系统中圆形极点和输出方差约束下PI调节器的设计问题, 通过矩阵分解将控制器的设计归结为两个矩阵方程可解性问题, 但对于高阶控制对象, 这种非线性矩阵方程难以求解. 文献[3]研究了激光导向伺服系统中PID调解器设计问题, 通过求解一组线性矩阵不等式得到控制器参数, 但该方法不适用于高于二阶的工业对象.

在控制实践中, 将极点配置到左半平面的扇形区域内更具有实际意义. 为此, 本文研究在相容的扇形区域极点和稳态输出方差指标约束下的PID调节器设计问题, 并转化为局部状态反馈问题, 借助文献[4]的方法, 将参数设计问题转化为一组线性矩阵不等式的可行解问题, 从而可通过MATLAB软件中的LMI工具方便地求解.

本文采用如下记号: 对于列满秩、维数为$n\times m$的矩阵A, $A^{\perp}$表示维数为$(n-m)\times n$矩阵, 满足$A^{\perp}A=0_{(n-m)\times n}$, $[A \quad A^{\mathrm{T}\perp}]\in R^{n\times n}$可逆, $A^{\perp}A^{\perp\mathrm{T}}=I_{(n-m)\times(n-m)}$.

2 问题描述

本文研究对象如图1所示. 其中

$$G(s)=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0};\qquad(1)$$

收稿日期: 2004-11-09; **修回日期**: 2005-01-26.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60174028); 博士点基金项目(20040288002).
作者简介: 臧文利(1979—), 男, 河南驻马店人, 博士生, 从事满意控制应用及图像处理的研究; 郭治(1937—), 男(满族), 辽宁义县人, 教授, 博士生导师, 从事火力控制和满意控制等研究.

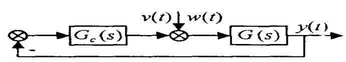

图 1　控制系统框图

PID 调节器

$$G_c(s) = k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s; \tag{2}$$

图中 $w(t)$ 为零均值, 强度为 W 且与初值无关的高斯白噪声.

被控对象 $G(s)$ 的可控标准型为

$$\dot{x}_P = A_P x_P(t) + B_P v(t), \tag{3}$$

$$y(t) = C_P x_P(t), \tag{4}$$

其中

$$A_P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$B_P^T = [0 \ \cdots \ 0 \ 1],$$

$$C_P = [b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{n-2} \ b_{n-1}].$$

这里

$$v(t) = -k_P y(t) - k_I \int y(\tau)\mathrm{d}\tau - k_D \dot{y}(t), \tag{5}$$

$$x_I = \int y(\tau)\mathrm{d}\tau,\ x(t) \triangleq [x_P^T \ x_I^T]^T,$$

$$A \triangleq \begin{bmatrix} A_P & 0 \\ C_P & 0 \end{bmatrix},\ B \triangleq \begin{bmatrix} B_P \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 b_{n-1} & b_0 - a_1 b_{n-1} & \cdots & b_{n-2} - a_{n-1} b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

可得如下闭环方程:

$$\dot{x}(t) = (A - BKC)x(t) + Bw(t), \tag{6}$$

$$A_c \triangleq A - BKC,$$

$$K \triangleq [k_P \ k_I \ k_D],\ D \triangleq [C_P \ 0].$$

此时PID 调节器参数的设计便转化为局部状态反馈问题.

当式(6) 渐进稳定时, 其稳态方差 X 定义为

$$X \triangleq \lim_{t\to\infty} E\{x(t)x(t)^T\},$$

且是如下代数Lyapunov 矩阵方程的唯一正定解:

$$A_c X + X A_c^T + BWB^T = 0, \tag{7}$$

则稳态输出方差定义为

$$Y = DXD^T. \tag{8}$$

本文的目的是设计PID 调节器参数, 使系统满足:

1) 系统极点位于图2所示阴影扇形区域 $S(q, \theta)$ 内. 这里: $q > 0, \theta \in [0, 90°]$ 为预先给定值.

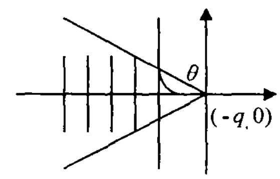

图 2　扇形极点区域

2) 闭环系统稳态输出方差满足

$$Y \le \sigma_1^2,$$

其中 σ_1^2 为给定的输出方差设计指标.

定义 1　如果存在PID 调节器参数满足设计指标 1) 和 2), 则称其为满意的PID 调节器.

为保证本文所研究问题有意义, 假定给定的扇形极点和稳态输出方差指标是相容的, 即存在PID 调节器参数可以同时满足 1) 和 2) 两项要求.

3　主要结果

引理 1[4,5]　对于具有局部状态反馈的控制系统(如式(6)), 若 C 行满秩当且仅当存在 $X > 0, V > 0$ 和 N 满足

$$A C_0 V C_0^T + C_0 V C_0^T A^T + A C^{T\perp T} X C^{T\perp} + C^{T\perp T} X C^{T\perp} A^T - BNC - C^T N^T B^T < 0, \tag{9}$$

则式(9) 与

$$\begin{cases} AQ + QA^T - BNC - C^T N^T B^T < 0, \\ Q > 0, MC = CQ \end{cases} \tag{10}$$

等价. 其中: $C_0 = C^T(CC^T)^{-1}, M = V(CC^T)^{-1}, Q = C_0 V C_0^T + C^{T\perp T} X C^{T\perp}, K = NCC^T V^{-1}$.

定理 1　如果存在 $P > 0$ 满足

$$A_c P + P A_c^T + BWB^T < 0, \tag{11}$$

$$A_c P + P A_c^T + 2qP < 0, \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_2^T & T_1 \end{bmatrix} < 0, \tag{13}$$

$$DPD^T < \sigma_1^2, \tag{14}$$

这里 $T_1 = \sin\theta(A_c P + P A_c^T), T_2 = \cos\theta(A_c P - P A_c^T)$, 则闭环系统满足给定性能指标 1) 和 2).

证明　易于证明, 式(11) 和(14) 保证指标 2) 满足; 式(12) 和(13) 保证指标 1) 得到满足. □

定理 2　若存在 $X > 0, V > 0$ 和 N 满足如下线性矩阵不等式组:

$$S_2 - S_1 + BWB^T < 0, \tag{15}$$

$$S_2 - S_1 + 2q(C_0 V C_0^T + C^{T\perp T} X C^{T\perp}) < 0, \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} \sin\theta(S_2 - S_1) & \cos\theta(S_3 + S_4) \\ \cos\theta(S_3^T + S_4^T) & \sin\theta(S_2 - S_1) \end{bmatrix} < 0, \tag{17}$$

$$D(C_0 V C_0^T + C^{T\perp T} X C^{T\perp}) D^T < \sigma_1^2. \tag{18}$$

其中

$$S_1 = BNC + C^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}},$$

$$S_2 = AC_0VC_0^{\mathrm{T}} + C_0VC_0^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} + AC^{\mathrm{T}\perp\mathrm{T}}XC^{\mathrm{T}\perp} + C^{\mathrm{T}\perp\mathrm{T}}XC^{\mathrm{T}\perp}A^{\mathrm{T}},$$

$$S_3 = AC_0VC_0^{\mathrm{T}} - C_0VC_0^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} + AC^{\mathrm{T}\perp\mathrm{T}}XC^{\mathrm{T}\perp} - C^{\mathrm{T}\perp\mathrm{T}}XC^{\mathrm{T}\perp}A^{\mathrm{T}},$$

$$S_4 = C^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} - BNC,$$

$$C_0 = C^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

则存在PID调节器参数使系统满足给定的性能指标1)和2). 并且,如果(X, V, N)是上述矩阵不等式的一组可行解,则$K = NCC^{\mathrm{T}}V^{-1}$. 称$u = -Ky$是一个满意的PID调节器.

证明 如果存在$X > 0, V > 0$和N满足式(15)～(18),令$M = V(CC^{\mathrm{T}})^{-1}$,则由引理1得$P = C_0VC_0^{\mathrm{T}} + C^{\mathrm{T}\perp\mathrm{T}}XC^{\mathrm{T}\perp}$. 代入定理1即得定理2结论. □

4 应用实例

考虑如下传递函数描述的某3阶对象:

$$G(s) = \frac{5s + 10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6},$$

$W = 10, \sigma_1^2 = 0.5$, 极点区域$S(1.7, 60°)$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -11 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

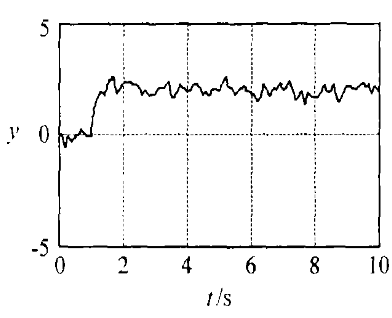

图 3 跟踪曲线

由定理1可求得PID调节器参数为$k_P = 66.4469$, $k_I = 114.2566$, $k_D = 9.01$. 则此时闭环系统的极点为$\{-41.2522; -5.0466; -2.7441; -2\}$; 稳态时输出方差为$Y = 0.0788$. 跟踪幅值为2的阶跃信号时的曲线如图3所示.

由图3可以看出,系统具有很好的暂态性能,很快达到稳态. 此时系统的稳态输出方差很小.

5 结 论

利用LMI求取PID参数,若有解,则肯定能使系统满足给定的扇形区域极点和稳态输出方差指标,得到满意的PID调节器;若无解,则可能有两种情况: 1)所给设计指标不相容; 2)由于定理2是充分条件,虽然设计指标是相容的,仍找不到解. 因此,进一步减小定理的保守性,找到设计指标间的相容区间是需要进一步探讨的问题.

参考文献(References)

[1] Guo Z. A Survey of Satisfying Control and Estimation [A]. *Proc of the 14th IFAC Congress* [C]. Beijing: Press of Tsinghua University, 1999, G: 443-447.

[2] 朱纪洪,郭治. 输出方差及圆形配置区约束下PI调节器设计[J]. *南京理工大学学报*, 1995, 19(6): 529-532.
(Zhu J H, Guo Z. Design of PI Regulator with Output Variance and Circular Region Pole Assignment Constraints [J]. *J of Nanjing University of Science and Technology*, 1995, 19(6): 529-532.)

[3] 盛安冬,吕太全,殷开宝,等. 激光导向伺服系统中满意PID调节器的LMI设计[J]. *兵工学报*, 2002, 23(4): 485-488.
(Sheng A D, Lv T Q, Yin K B, et al. LMI Design of Satisfactory PID Controller in a Laster Oriented Servo System [J]. *Acta Armamentar*, 2002, 23(4): 485-488.)

[4] Wang J Z, Zhang J F. An LMI Approach to Static Output Feedback Stabilization of Linear Systems [J]. *Control Theory and Application*, 2001, 18(6): 843-846.

[5] Cesar A R Crusius, Alexandre Trofino. Sufficient LMI Conditions for Output Feedback Control Problems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(5): 1053-1057.