

文章编号: 1001-0920(2005)11-1317-04

存在外界干扰的连续系统离散自适应滑模控制

蔡素芬¹, 李文林²

(1 解放军信息工程大学 理学院, 郑州 450001; 2 河南师范大学 数学与信息科学学院, 河南 新乡 453002)

摘要: 针对存在外界干扰的连续系统, 讨论了状态空间模型的离散自适应滑模控制。引入 δ 算子使离散化后的系统接近于原来的连续系统, 并引入干扰估计器得到干扰的近似估计值, 使所选的控制律得以实现。当参数未知时, 用干扰估计值代替未知干扰, 避免了干扰对自适应控制律的影响, 从而保证了闭环系统的稳定性。

关键词: 离散系统; 滑动模态控制; 干扰估计器; 自适应控制律

中图分类号: TP202 **文献标识码:** A

Discrete Sliding Mode Control for Continuous Systems with Disturbance

CAI Su-fen¹, LI Wen-lin²

(1. College of Science, Information and Engineering University, Zhengzhou 450001, China; 2 Department of Mathematics, Henan Normal University, Xinxiang 453002, China Correspondent: CAI Su-fen, E-mail: csfyzg2000@sina.com.cn)

Abstract: The discrete adaptive sliding mode control for continuous systems in the presence of disturbances is presented. The discretization system approximates a continuous system by using the δ operator. A disturbance estimator is introduced according to the unknown disturbance, and the approximate estimate of disturbance is obtained. The controller guarantees the stability of the closed-loop system.

Key words: Discrete system; Sliding mode control; Disturbance estimator; Adaptive control law

1 引言

近年来, 连续系统的离散滑动模态控制得到广泛研究^[1-3]。离散滑动模态控制不像连续滑动模态控制那样能够保持鲁棒性能, 因此Chan等提出鲁棒滑动模态方法。一般地, 如果系统中指标参数未知且存在未知干扰, 则很难找到控制律使状态最终保持在滑动面上, 但将离散滑动模态控制与自适应控制相结合, 使系统运动接近于理想的滑动面则有可能。注意到文献[2, 4]没有考虑干扰的存在, 因此有必要研究当外界干扰存在时滑动面附近的系统性能。

本文针对离散化后系统的未知干扰引入干扰估计器, 使所选的控制律得以实现, 避免了干扰对自适应律的影响, 从而保证了闭环系统的稳定性。文中所设计的干扰估计器性能良好, 能够较好地处理干扰

对系统的影响。所选系统为可控标准型, 故该方法适用于一类存在干扰的系统。

2 存在未知干扰的离散滑动模态控制

2.1 系统描述

考虑下列单输入单输出系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_c x + B_c (bu + d), \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1)$$

其中: x 为 $n \times 1$ 阶状态向量; y, u, d 分别为输出、输入和外界干扰;

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix},$$

收稿日期: 2004-11-03; 修回日期: 2005-03-21

作者简介: 蔡素芬(1979—), 女, 河南临颖人, 讲师, 硕士, 从事控制理论与应用的研究; 李文林(1949—), 男, 河南舞阳人, 教授, 博士, 从事变结构控制、自适应控制等研究。

$B_c = [0, 0, \dots, 0, 1]^T$; 假设 b 已知并满足 $0 < b_{\min} < b < b_{\max}$.

运用零阶保持器和采样时间 T , 系统(1) 可离散化为

$$\delta x(KT) = A x(KT) + B (bu(KT) + d(KT)). \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta d(KT) &= C, \\ \delta x(KT) &= T^{-1} [x(KT + T) - x(KT)], \\ A &= [I + \frac{A_c T}{2!} + \frac{A_c^2 T^2}{3!} + \dots] A_c, \\ B &= [I + \frac{A_c T}{2!} + \frac{A_c^2 T^2}{3!} + \dots] B_c. \end{aligned}$$

当 $T \rightarrow 0$ 时, $A \rightarrow A_c, B \rightarrow B_c$, 此时可用系统(2) 近似代替原系统, 因此以下只讨论系统(2) 的情况. 给定 $x_r(KT) = [r, 0, 0, \dots, 0]^T$, r 为常数, 则问题转化为设计一个离散滑动模态控制器, 使得 $x(KT)$ 和 $x_r(KT)$ 之间的误差有界.

2.2 滑动面设计

定义误差向量

$$e(KT) = x(KT) - x_r(KT), \quad (3)$$

滑动面可选择

$$s(KT) = G^T e(KT) = 0 \quad (4)$$

下面讨论如何选择 G 和控制律, 使 $e(KT)$ 稳定.

2.3 控制律设计

由式(2) 和(3) 可得

$$\delta e(KT) = A e(KT) + B bu(KT) + B d(KT) + A x_r(KT). \quad (5)$$

再由

$$\begin{aligned} s(KT + T) &= (G^T + T G^T A) e(KT) + T G^T B bu(KT) + T G^T B d(KT) + T G^T A x_r(KT) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

可得到达控制

$$\begin{aligned} u_{eq}(KT) &= - (G^T B b)^{-1} [(G^T A + T^{-1} G^T) e(KT) + G^T B d(KT) + G^T A x_r(KT)] \end{aligned} \quad (7)$$

由式(7) 可以看出 $d(KT)$ 未知, 该控制律无法实现. 故可根据式(5) 设计 $d(KT)$ 的估计器 $\hat{d}(KT)$, 使 $\lim_{K \rightarrow \infty} |d(KT) - \hat{d}(KT)| = 0$, 由此引入定理 1.

定理 1 令

$$d(KT) = \epsilon(KT) + \beta (B^T B)^{-1} B^T e(KT). \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta \epsilon(KT) &= - \beta \epsilon(KT) - \beta (B^T B)^{-1} B^T (A + \beta I) e(KT) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta b u(KT) - \beta (B^T B)^{-1} B^T A x_r(KT), \\ \beta > 0 \end{aligned}$$

则

$$\lim_{K \rightarrow \infty} |d(KT) - \hat{d}(KT)| = \gamma \quad (9)$$

证明 由式(5), (8) 和(9) 得

$$\delta \hat{d}(KT) = - \beta (d(KT) - \hat{d}(KT)).$$

令 $V(KT) = [d(KT) - \hat{d}(KT)]^2$, 则

$$\begin{aligned} \delta V(KT) &= T^{-1} [V(KT + T) - V(KT)] = \\ &= \beta(T\beta - 2) [d(KT) - \hat{d}(KT)]^2 + (2T\beta - 2) \delta \hat{d}(KT) [d(KT) - \hat{d}(KT)] + T [\delta \hat{d}(KT)]^2. \end{aligned} \quad (10)$$

由式(10) 可知, 若 $1/T < \beta < 2/T$, 则 $T\beta - 1 > 0, \beta(T\beta - 2) < 0$. 如果 $|d(KT) - \hat{d}(KT)|$ 无界, 则式(10) 第 1 项比第 2 项下降快, 必然会使 $d(KT) - \hat{d}(KT)$ 落在有界区域内. 故可令 $|d(KT) - \hat{d}(KT)| < C_1$, 此时式(10) 化为

$$V(KT + T) \leq [T\beta(T\beta - 2) + 1]V(KT) + 2T(T\beta - 1)CC_1 + T^2C^2.$$

令

$$\begin{aligned} M(T) &= T\beta(T\beta - 2) + 1, \\ N(T) &= 2T(T\beta - 2)CC_1 + T^2C^2, \\ 0 < M(T) < 1, \end{aligned}$$

则

$$V(KT) \leq [M(T)]^k V(0) + \sum_{i=0}^{k-1} [M(T)]^{k-i-1} N(T).$$

取 $T\beta = 1.5$, 则

$$V(KT) \leq \gamma^2,$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} |d(KT) - \hat{d}(KT)| = \gamma,$$

定理 1 得证

用 $\hat{d}(KT)$ 近似代替式(6) 中的 $d(KT)$, 有

$$\begin{aligned} u(KT) &= - (G^T B b)^{-1} [(G^T A + T^{-1} G^T) e(KT) + G^T B \hat{d}(KT) + G^T A x_r(KT)] \end{aligned} \quad (11)$$

将控制律(11) 代入式(5), 有

$$\begin{aligned} \delta e(KT) &= [A - B (G^T B)^{-1} G^T (A + T^{-1} I)] e(KT) + [I - B (G^T B)^{-1} G^T] A x_r(KT) + B [d(KT) - \hat{d}(KT)] \end{aligned}$$

令 $A_{eq} = A - B (G^T B)^{-1} G^T (A + T^{-1} I)$, 若存在 G 使 A_{eq} 具有 $n - 1$ 个稳定的特征根, 则可证明滑模运动

稳定 为确定 G , 引入定理 2

定理 2 因 (A_c, B_c) 可控, 故 (A, B) 可控 令 A 具有互不相同的极点, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ 为稳定极点; 并令 λ_n 对应的 A 的左特征向量为 G^T , 即 $G^T A = \lambda_n G^T$. 这样选取的 G^T 可使 A_{eq} 具有 $n-1$ 个稳定的特征根

证明 若取对应 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ 的右特征向量为 ω^T , 则 $G^T A \omega^T = G^T \omega^T \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\}$, 故 $\lambda_n G^T \omega^T = G^T \omega^T \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\}$. 因 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 互不相同, 故 $G^T \omega^T = 0$ 此时 $A_{eq} \omega^T = \omega^T \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}\}$, 因此 G 可使 A_{eq} 具有稳定的特征根, 定理 2 得证

将式(11) 代入式(6) 有

$$S(KT + T) = TG^T B (d(KT) - d(KT)).$$

由定理 1 可知, 当 $K \rightarrow \infty, T \rightarrow 0$ 时, $|S(KT)|$ 会到达一个非常小的领域内, 故所选的控制律(11) 满足离散系统的到达条件, 且可使 $e(KT)$ 最终有界稳定

3 离散自适应滑模控制

若参数 a_0, a_1, \dots, a_{n-1} 和 b 未知, 则上节中关于选择 G 的方法不再适用 此时滑动面可选择为

$$S(KT) = G^T e(KT) = [g_0, \dots, g_{n-2}, 1]e(KT) = 0$$

其中 g_0, g_1, \dots, g_{n-2} 由 $g(s) = s^{n-1} + \dots + g_1 s + g_0$ 给出 要求该方程的根在以 $(-T^{-1}, 0)$ 为圆心, 以 $T^{-1}(T_1 - T)$ 为半径的圆内, 且可使 A_{eq} 的特征根接近于 $g(s)$ 的根, 并使 $I + TA_{eq}$ 的根在单位圆内^[2]. 此时控制律采用如下形式:

$$u(KT) = u_{eq}(KT) + (G^T B)^{-1} T^{-1} (1 - \rho) S(KT).$$

结合式(5), (8) 和(9) 有

$$u(KT) = \theta \omega(KT). \quad (12)$$

其中

$$\theta = [-b^{-1}, -(bG^T B)^{-1} G^T A - b^{-1} \beta (B^T B)^{-1} B^T, -(bG^T B)^{-1} G^T A],$$

$$\omega = [\epsilon(KT), e^T(KT), x_r^T(KT)]^T.$$

以上参数未知, 故应用式(12) 的自适应式 令 θ 的估计值为 $\hat{\theta}(KT)$, $\theta = \hat{\theta} - \tilde{\theta}$ 则 $u(KT) = \hat{\theta}(KT) \omega(KT)$, 此时有

$$u(KT) = \theta(KT) \omega(KT) + \tilde{\theta}(KT) \omega(KT). \quad (13)$$

将式(13) 代入式(7), 有

$$S(KT + T) = (1 - \rho) S(KT) + T b G^T B \theta(KT) \omega(KT).$$

令

$$\bar{\omega}(KT) = \frac{\omega(KT)}{1 + \omega(KT)},$$

$$\bar{\omega}(KT) < 1,$$

$$\bar{S}(KT) = \frac{S(KT)}{1 + \omega(KT)},$$

则有

$$S(KT + T) = T b G^T B \theta(KT) \bar{\omega}(KT) + (1 - \rho) \bar{S}(KT). \quad (14)$$

取 $\hat{\theta}$ 的自适应形式为

$$\hat{\theta}(KT) = -\alpha T^{-1} G^T B b \bar{\omega}^T(KT) [\bar{S}(KT + T) - \bar{S}(KT)],$$

则有

$$\theta(KT + T) = \theta(KT) - \alpha G^T B b \bar{\omega}^T(KT) [\bar{S}(KT + T) - \bar{S}(KT)] \quad (15)$$

定理 3^[6-9] 对于式(13) 和式(15), 若选取

$0 < \alpha < 2/Tb^2$, 则有: 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta(KT) = 0$,

2) $\lim_{k \rightarrow \infty} S(KT) = 0$

证明 1) 选取 $V(KT) = \theta(KT)^2$, 则

$$V(KT + T) - V(KT) < [-2T\alpha(G^T B b)^2 + T^2\alpha^2(G^T B b)^4] \theta(KT) \bar{\omega}(KT)^2,$$

当 $0 < \alpha < 2/Tb^2$ 时, $V(KT + T) - V(KT) < 0$, 故 $\lim_{k \rightarrow \infty} V(KT) = 0$

2) 由结论(1) 及式(14) 有 $\bar{S}(KT) = (1 - \rho)^k$ 趋近于 0, 将式(15) 代入式(7) 并求解, 可得

$$e(KT) = \Phi e(0) + T \sum_{j=0}^{K-1} \Phi^{j-1} [(TG^T B)^{-1} B (1 - \rho) S(jT) + \Psi(jT)]$$

其中: $\Phi = I + TA_{eq}, \Psi(jT) = B (d(jT) - \hat{d}(jT))$.

由上式可得

$$e(KT) = c_1 + c_2 \max_{j=K-1} |S(jT)| \quad (16)$$

其中 c_1, c_2 均为常数 因 $\bar{S}(KT) = \frac{S(KT)}{1 + \omega(KT)}$ 趋近于 0, 故 $S(KT) \rightarrow 0$

综上, 定理 3 得证

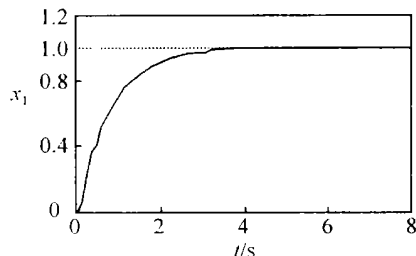
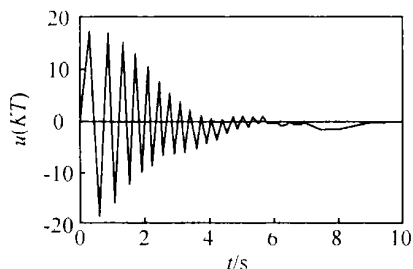
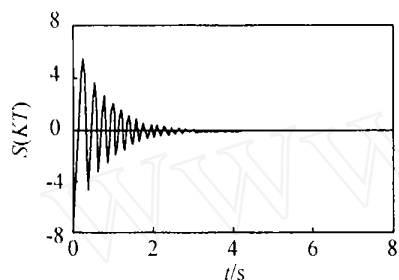
由式(16) 可知 $e(KT)$ 有界, 从而 $x(KT)$ 有界 又因为 $d(KT)$ 有界, 所以式(12) 的自适应控制律 $u(KT)$ 有界, 从而得到稳定的闭环系统

4 示例仿真

考虑下面的连续系统:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d.$$

其中 $0.5 < b < 1.5$ 令 $G = [9, 6, 1]^T, x(0) = [0, 0, 0]^T, T = 0.02$ s, $b = 1.2, d = 2 + \cos(\pi t)$. 仿真图形如图 1~ 图 3 所示 由仿真图可以看出本文处理干扰的方法及所选控制器的有效性

图1 状态响应曲线 x_1 图2 $u(KT)$ 的响应曲线图3 $S(KT)$ 的响应曲线

5 结 语

本文通过干扰估计器对未知干扰进行处理, 不仅使自适应控制律得以实现, 而且保证了闭环系统的稳定性。由示例仿真可以看出本文所用方法的有效性。

参考文献(References)

- [1] Cheng C C. Sliding Mode Controllers Design for Linear Discrete-time Systems with Matching Perturbations[J]. *Automatica*, 2000, 36: 1205-1211.
- [2] Chan C Y. Discrete Adaptive Sliding Mode Tracking Controller[J]. *Automatica*, 1997, 33: 999-1002.
- [3] Roh Y H. Sliding Mode Control with Uncertainty Adaptation for Uncertain Input-delay Systems[J]. *Int J Control*, 2000, 73(13): 1255-1260.
- [4] Giri FM, Dion JM, Dugard L. On the Robustness of Discrete Time Indirect Adaptive Controllers [J]. *Automatica*, 1991, 27(1): 153-159.
- [5] Ensor J, Davies R. Assignment of Reduced Sensitivity Eigenstructure[J]. *IEE*, 2000, 147(1): 104-110.
- [6] Riccardo Marino, Giovanni L. Santosuosso, Robust Adaptive Observers for Nonlinear Systems with Bounded Disturbances [J]. *IEEE*, 2001, 46(6): 967-972.
- [7] 李文林. 非匹配不确定系统的模糊滑模控制[J]. *控制与决策*, 2004, 19(6): 655-658.
(Li W L. Fuzzy Sliding Mode Control for Non-matching Uncertain Systems[J]. *Control and Decision*, 2004, 19(6): 655-658.)
- [8] 张承进, 潘学军, 柴天佑. 一类线性时变系统的间接自适应控制[J]. *控制与决策*, 1998, 13(6): 635-639.
(Zhang C J, Pan X J, Chai T Y. Indirect Adaptive Control for a Class of Linear Time-varying Systems[J]. *Control and Decision*, 1998, 13(6): 635-639.)
- [9] 李晓理, 王伟, 孙伟. 多模型自适应控制[J]. *控制与决策*, 2000, 15(4): 390-394.
(Li X L, Wang W, Sun W. Multimodel Adaptive Control [J]. *Control and Decision*, 2000, 15(4): 390-394.)

第七届国际粉体检测与控制学术会议征文通知

由国际粉体检测与控制联合会发起的“第七届国际粉体检测与控制学术会议(MCGM 2006)”将于2006年8月26日至28日在中国上海举行。本次会议由东北大学和上海宝山钢铁股份有限公司联合主办, 欢迎国内外同行学者、专家、研究人员和工程技术人员踊跃投稿并参加会议。详情见联合会网址。

征文要求: 应征稿件必须是未发表过的, 英文摘要限400—500个单词。2006年1月30日截稿; 2月25日发录用通知; 5月15日全文录用截止。

联系地址: 沈阳市东北大学321信箱(IFM CGM 秘书处)

邮编: 110004

联系人: 李新光, 金智贤, 霍良 **E-mail:** mcgm@ifm-cgm.com lgneu@vip.sina.com

电话: 024-23891977, 024-83685464, 024-83671496

传真: 024-23891977

网址: www.ifm-cgm.com

国际粉体检测与控制联合会秘书处