

文章编号: 1001-0920(2005)12-1384-04

基于流体流量的线性化 TCP 模型的稳定性分析

王德进

(天津科技大学 电子信息与自动化学院, 天津 300222)

摘要: 对基于流体流量的 TCP 拥塞模型进行小信号稳定性分析。首先, 对 TCP 模型在工作点处做小信号线性化。其次, 对采用比例主动队列管理(AQM)策略的闭环系统进行时滞依赖稳定性分析, 得到具有较小保守性的稳定性准则, 该准则揭示了比例增益与网络参数之间的关系。最后, 将问题转化为广义特征值问题, 以期对最大比例增益界进行优化。计算机仿真给出了比例增益与往返程时滞之间的反比关系。

关键词: 计算机网络; 稳定性分析; 基于流体流量的 TCP 模型; 比例控制; 往返程时滞

中图分类号: TP271 **文献标识码:** A

Stability Analysis of Linearized Fluid-flow TCP Model

WANG De-jin

(School of Electronic Information and Automation, Tianjin University of Science and Technology, Tianjin 300222, China. E-mail: wdejin56@yahoo.com)

Abstract: The small-signal stability analysis of fluid-flow congestion TCP model is discussed. First, the TCP model is linearized about the operating point. Then, the delay-dependent stability of the closed-loop system is analyzed when utilizing the proportional feedback active queue management (AQM), and a stability criterion is obtained with less conservatism. The proposed criterion exhibits the relation between the proportional gain and the parameters of network. Finally, the problem is converted to the generalized eigenvalue problem, so that the maximum proportional gain can be optimized. Computer simulation shows that the proportional gain is dependent on the round-trip time reciprocally.

Key words: Computer network; Stability analysis; Fluid-flow TCP model; Proportional control; Round-trip time delay

1 引言

近年来,随着计算机网络技术的发展,互联网的拥塞控制问题越来越引起人们的重视。网络拥塞控制对保证网络的稳定性和可靠性是至关重要的。网络拥塞控制模型分为两类:一类是基于速率的拥塞控制模型^[1,2];另一类是基于窗口的拥塞控制模型^[3,4]。对于基于窗口的模型,文献[3]给出了一种基于流体流量和随机微分方程理论的网络协议 TCP 的非线性动态模型。网络仿真器(ns)仿真结果说明该模型能很好地描述 TCP 的动态行为。该模型的提出,为从控制的角度来分析和设计主动队列管理(AQM)算法提供了有力的工具。文献[4]对该模型进行了简化,并在工作点处做了线性化处理。然后从

控制的角度,通过与互联网中现行的 RED^[5]AQM 策略进行比较,提出了比例和比例-积分 AQM 策略。这两种控制策略拓宽了系统的通频带,有利于改善网络的动态响应。文献[6]从网络关于往返程时滞鲁棒性的角度,提出一种新的 TCP 反馈结构。文献[7]对采用比例控制的非线性模型进行了稳定性分析,结论是当无时滞反馈时,系统对任意大的比例增益均稳定;而当有时滞反馈(实际情况)时,系统只有当比例增益较小时是稳定的。也就是说,存在一个最大允许的比例增益界。

本文采用小信号线性化模型,通过对线性化模型的时滞依赖稳定性分析,给出了具有较小保守性的最大增益界与网络参数的关系,并提出了线性凸

收稿日期: 2004-12-14; 修回日期: 2005-03-22

作者简介: 王德进(1956—),男,黑龙江牡丹江人,教授,硕士,从事鲁棒控制、时滞系统和网络拥塞控制等研究。

$$\begin{bmatrix} \{PA + A^T P + \bar{K}_p(PB + B^T P)\} & - \bar{K}_p R P B & A^T Q + \bar{K}_p B^T Q \\ - \bar{K}_p R B^T P & - Q & - \bar{K}_p R B^T Q \\ Q A + \bar{K}_p Q B & - \bar{K}_p R Q B & - Q \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

有解, 则闭环系统(5)对任意 $0 < K_p < \bar{K}_p$ 渐近稳定

证明 构造时滞依赖正定Lyapunov泛函

$$V(X(t-R), t) = X^T(t) P X(t) + \int_{t-R}^t X^T(s) Z X(s) ds d\theta$$

由Newton-Leibnitz公式, 有

$$X(t-R) = X(t) - \int_{t-R}^t \dot{X}(s) ds$$

将上式代入式(5), 得

$$\dot{X}(t) = (A + K_p B) X(t) - K_p B \int_{t-R}^t \dot{X}(s) ds \quad (7)$$

沿闭环系统(7)的解轨迹计算Lyapunov泛函的导数, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(X(t-R), t) &= 2X^T(t) P \dot{X}(t) + R X^T(t) Z \dot{X}(t) - \int_{t-R}^t X^T(s) Z \dot{X}(s) ds = \\ & X^T(t) [P(A + K_p B) + (A + K_p B)^T P] X(t) - \\ & 2K_p X^T(t) P B \int_{t-R}^t \dot{X}(s) ds + \\ & R X^T(t) (A + K_p B)^T Z (A + K_p B) X(t) + \\ & K_p^2 \left[\int_{t-R}^t B \dot{X}(s) ds \right]^T Z \left[\int_{t-R}^t B \dot{X}(s) ds \right] - \\ & 2K_p R X^T(t) (A + K_p B)^T Z B \int_{t-R}^t \dot{X}(s) ds - \\ & \int_{t-R}^t X^T(s) Z \dot{X}(s) ds \end{aligned}$$

利用不等式^[10]

$$\left\| \int_a^b f(s) ds \right\|^2 \leq (b-a) \int_a^b f(s)^2 ds,$$

有

$$\begin{aligned} & \left[\int_{t-R}^t B \dot{X}(s) ds \right]^T Z \left[\int_{t-R}^t B \dot{X}(s) ds \right] \\ & R \int_{t-R}^t X^T(s) B^T Z B \dot{X}(s) ds \end{aligned}$$

令 $Q = RZ$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}(X(t-R), t) &= \int_{t-R}^t X^T(t) [P(A + K_p B) + \\ & (A + K_p B)^T P] X(t) ds - \\ & \int_{t-R}^t 2K_p R X^T(t) P B \dot{X}(s) ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{t-R}^t X^T(t) (A + K_p B)^T \times \\ & Q (A + K_p B) X(t) ds + \\ & \int_{t-R}^t K_p^2 R^2 X^T(s) B^T Q B \dot{X}(s) ds - \\ & \int_{t-R}^t 2K_p R X^T(t) (A + \\ & K_p B)^T Q B \dot{X}(s) ds - \\ & \int_{t-R}^t X^T(s) Q \dot{X}(s) ds \\ & \int_{t-R}^t \begin{bmatrix} X(t) \\ X(s) \end{bmatrix}^T \Xi_1[R, K_p] \begin{bmatrix} X(t) \\ X(s) \end{bmatrix} ds \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \Xi_1[R, K_p] &= \\ & \begin{bmatrix} \{P(A + K_p B) + (A + K_p B)^T P + \\ (A + K_p B)^T Q (A + K_p B)\} \\ - K_p R B^T P - K_p R B^T Q (A + K_p B) \\ - K_p R P B - K_p R (A + K_p B)^T Q B \\ - Q + K_p^2 R^2 B^T Q B \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

如果

$$\Xi_1[R, K_p] < 0, \quad (8)$$

则根据Lyapunov稳定性理论, 闭环系统(5)渐近稳定由Schur补引理, 式(8)等价于

$$\begin{aligned} \Xi_1[R, K_p] &= \\ & \begin{bmatrix} PA + A^T P + K_p(PB + B^T P) \\ - K_p R B^T P \\ QA + K_p Q B \\ - K_p R P B \quad A^T Q + K_p B^T Q \\ - Q \quad - K_p R B^T Q \\ - K_p R Q B \quad - Q \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

由于 $\Xi_1[R, K_p]$ 关于 K_p 是单调增的(在半正定意义下), 如果定理中条件(6)成立, 则闭环系统(5)对任意 $0 < K_p < \bar{K}_p$ 渐近稳定

根据定理1, 提出如下求解最大比例增益界的广义特征值问题(GEVP)算法: 给定网络参数 (N, C, R) ,

$$\begin{aligned} & \min_{\lambda, P > 0, Q > 0} \lambda, \\ & \text{s.t. } A < \lambda B, B > 0, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\lambda = 1/K_p$,

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} PB + B^T P & - R P B & B^T Q \\ - R B^T P & 0 & - R B^T Q \\ Q B & - R Q B & 0 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} - (PA + A^T P) & 0 & - A^T Q \\ 0 & Q & 0 \\ - Q A & 0 & Q \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4 仿真研究

首先, 根据 GEVP 算法(9) 绘制 $K_p \sim R$ 关系曲线, 如图 2 所示 每条曲线左下方区域为系统稳定的参数区 该图揭示出 K_p 与 R 成反比关系

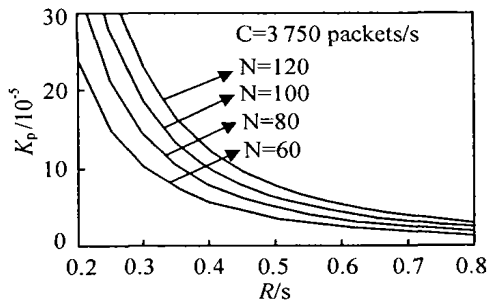


图 2 $K_p \sim R$ 关系曲线

然后, 根据 GEVP 算法(9) 计算最大增益界 \bar{K}_p , 并作稳定性仿真分析. 取典型网络参数^[4]: $C = 3750 \text{ packets/s}, N = 60, R = 0.25 \text{ s}$ 由 GEVP 算法(9), 得最大增益界为 $\bar{K}_p = 15.4009 \times 10^{-5}$. 取 $\bar{K}_p = 10 \times 10^{-5}$, 初值取为 $\delta v(t) = 5 \text{ packets}, \delta q(t) = 15 \text{ packets}$, 仿真曲线如图 3 所示 取 $\bar{K}_p = 16.5 \times 10^{-5}$, 初值取为 $\delta v(t) = 5 \text{ packets}, \delta q(t) = 15 \text{ packets}$, 仿真曲线如图 4 所示 此时, 系统是振荡收敛的, 说明定理 1 给出的准则仍有些保守. 当 K_p

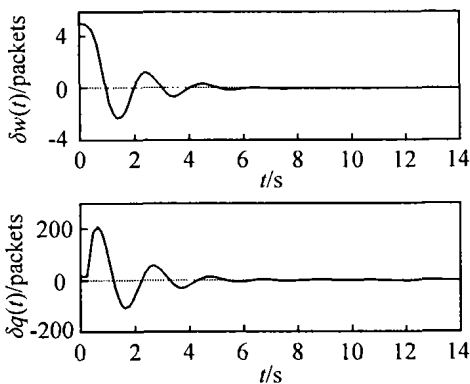


图 3 初值响应曲线($K_p = 10 \times 10^{-5}$)

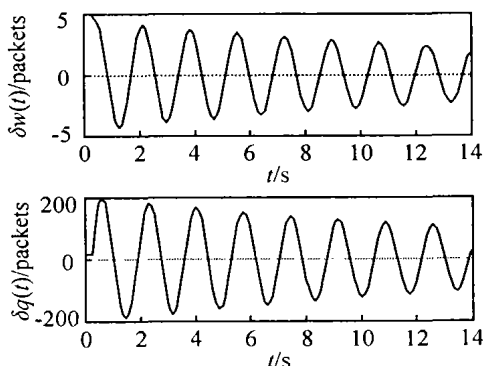


图 4 初值响应曲线($K_p = 16.5 \times 10^{-5}$)

17.2×10^{-5} 时, 系统开始振荡发散

5 结 语

本文讨论了具有单一 TCP 数据流的线性化 TCP 模型的稳定性问题 通过时滞系统时滞依赖稳定性分析, 找到了比例 AQM 策略的最大增益界与网络参数之间的关系, 揭示出最大增益界与往返程时滞之间的反比关系 进一步的研究应考虑多个 TCP 源和多个路由器组成的复杂网络结构, 找到比例 AQM 策略的比例增益阵的设计方法

参考文献 (References)

- [1] Ozbey H, Kalyanaraman S, Iftar A. On Rate-based Congestion Control in High Speed Networks: Design of an H Based Flow Controller for Single Bottleneck [A] Proc of ACC [C]. Philadelphia, 1998: 2376-2380
- [2] Atsalar B, Quet P-F, Iftar A, et al Robust Rate-based Flow Controllers for High-speed Networks: The Case of Uncertain Time-varying Multiple Time-delay [A] Proc of the ACC [C]. Chicago, 2000: 2804-2808
- [3] Misra V, Gong W B, Towsley D. Fluid-based Analysis of a Network of AQM Routers Supporting TCP Flows with an Application to RED [A] Proc of ACM/SIGCOMM [C]. Stockholm, 2000: 151-160
- [4] Hollot C V, Misra V, Towsley D, et al Analysis and Design of Controllers for AQM Routers Supporting TCP Flows [J] IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(6): 945-959.
- [5] Floyd S, Jacobson V. Random Early Detection Gateways for Congestion Avoidance [J] IEEE/ACM Trans on Networking, 1993, 1(4): 397-411.
- [6] Wang D J, Hollot C V. Robust Analysis and Design of Controllers for a Single TCP Flow [A] Proc of Int Conf on Communication Technology [C]. Beijing, 2003: 276-280
- [7] Hollot C V, Chait Y. Nonlinear Stability Analysis for a Class of TCP/AQM Networks [A] Proc of the IEEE CDC [C]. Orlando, 2001: 2309-2314
- [8] Jacobson V. Congestion Avoidance and Control [A] Proc of ACM/SIGCOMM [C]. Stanford, 1988: 314-329
- [9] Athuraliya S, Li V H, Low S H, et al REM: Active Queue Management [J] IEEE Network, 2001, 15(1): 48-53
- [10] Kim J H. Delay and Its Time Derivative-dependent Robust Stability of Time-delayed Systems with Uncertainty [J] IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(5): 789-792