文章编号: 1001-0920(2005)12-1401-03

基于 δ 算子离散化模型的连续时间系统满意控制

钱龙军, 郭 治
(南京理工大学 自动化系, 南京 210094)

摘 要: 通过 δ 算子离散化模型, 研究了连续时间线性定常随机系统的具有极点配置和稳态方差指标的满意控制问题. 利用线性矩阵不等式理论, 给出设计满意控制器及优化采样周期的方法. 数值算例验证了所提出方法的有效性.

关键词: δ 算子; 满意控制; 极点配置; 稳态方差; 线性矩阵不等式
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

On Satisfactory Control of Continuous Time Systems with Delta Operator induced Discrete Models

QIAN Long-jun, GUO Zhi
(Automation Department, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China. Correspondent: Qian Long-jun, E-mail: qlongjun@mail.njust.edu.cn)

Abstract: The satisfactory control problem with pole placement and steady variance performance specifications for linear continuous stochastic time invariant systems are studied with delta operator induced discrete models. With the LMI technique, a method is proposed to design satisfactory controller and optimize the sample period. An numerical example shows the effectiveness of the proposed method.

Key words: Delta operator; Satisfactory control; Pole placement; Steady variance; LMI

1 引 言

自从文献[1, 2]发表以来, 人们认识到采用 z 变换建立的离散控制系统存在数值计算精度和稳定性变差的问题. 因基于 δ 算子的离散系统可以很好地解决上述问题, 故引起了人们对 δ 算子的广泛重视[3]. δ 算子既可以作为离散系统的描述方式, 也可以作为连续时间系统的离散化方法.

文献[4～8]利用 δ 算子可以作为连续时间和离散时间系统模型的统一描述方法, 将连续和离散时间系统统一在 δ 算子系统的框架内, 研究了极点配置、H_∞ 控制以及多指标约束下的鲁棒 H_∞ 滤波等问题. 其中连续时间系统和离散时间系统不一定是同一个物理系统的模型.

由于现代控制系统广泛使用数字计算机, 使得原本是连续时间的控制系统必须转化为离散时间系统再进行分析和设计. 人们关心由此得到的分析和设计结果应用于原连续时间系统的控制时, 系统的动态性能会发生多大的变化. 本文侧重 δ 算子作为离散化方法的一面, 从系统控制的快速性和精确性指标出发, 通过其 δ 算子离散化系统研究原连续时间系统同时满足极点配置指标和稳态方差指标的满意控制问题. 满意控制的目标是, 同时满足多个具有明确物理意义的性能指标, 而不追求单个指标的最优[9]. 本文从性能指标的角度定量地说明, 可以通过其离散化系统对原连续时间控制系统进行设计, 包括对采样频率的设计.

2 问题描述

考虑随机控制系统

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = Ax(t) + Bu(t) + \xi(t), \tag{1}$$

收稿日期: 2005-04-04; **修回日期**: 2005-06-30.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60174028); "十五"兵器支撑基金项目(BZJ040202).
作者简介: 钱龙军(1964—), 男, 湖南隆回人, 副教授, 博士, 从事满意控制等研究; 郭治(1937—), 男, 辽宁义县人, 教授, 博士生导师, 从事满意控制、火力控制等研究.

其中: $x \in R^n$ 为系统状态; $u \in R^m$ 为控制信号; $\xi \in R^n$ 为零均值、强度为 $R = \mathrm{E}[\xi(t)\xi^{\mathrm{T}}(t)]$, 且与 $x(0)$ 不相关的白噪声; A, B 为适维的定常矩阵. 设

$$u(t) = Kx(k) \tag{2}$$

为系统(1) 的线性状态反馈控制器, 相应的闭环系统为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = A_c x(t) + \xi(t), \tag{3}$$

其中: $A_c = (A + BK), K \in R^{n\times m}$.

系统(3) 基于 δ 算子的一种离散化模型为

$$\delta x(k) = A_c x(k) + \xi(k), \tag{4}$$

其中: $x(k) = : x(kT), \delta = (q - 1)/T, T > 0$ 为采样周期, q 为前向移位算子, 即 $qx(k) = x(k+1)$. 离散化模型(4) 的 δ 算子形式为

$$x(k+1) = (I + TA_c)x(k) + \Delta\omega(k), \tag{5}$$

其中: $I \in R^{n\times n}$ 为单位阵, $\Delta\omega(k)$ 为维纳过程 $\omega(t) = \int\xi(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的增量, 满足

$$\mathrm{E}[\Delta\omega(k)(\Delta\omega(k))^{\mathrm{T}}] = TR. \tag{6}$$

对尽可能大的采样周期 T, 基于 δ 算子的离散化模型(4), 本文研究如何设计线性状态反馈控制器(2), 使得连续时间系统(3) 同时满足如下性能指标的满意控制问题:

1) 对于给定的实数 $\alpha > 0$, 闭环系统(3) 的所有极点满足 $\lambda(A_c) < -\alpha$;

2) 对于给定的 n 阶对称正定矩阵 $X_0 > 0$, 闭环系统(3) 的稳态状态方差满足 $X_C < X_0$.

3 满意控制器的设计

满意控制的第 1 个指标要求系统(3) 的状态具有优于 $\mathrm{e}^{-\alpha}$ 的衰减率.

设 $D(q, r)$ 表示复平面上圆心位于 $(q, 0)$, 半径为 $r > 0$ 的圆形区域. 设采样周期 T 充分小, 使得 $1 > r = 1 - T\alpha > 0$. 根据文献[4] 可以验证, 如果 $\lambda(A_c) \subset D(-1/T, r/T)$, 当且仅当 $\lambda(I + TA_c) \subset D(0, r)$. 如图 1 所示, 如果 $|\lambda(I + TA_c)| < r$, 则 $\mathrm{Re}(\lambda(I + TA_c)) < -\alpha$. 所以当(5) 的状态 $x(k)$ 的衰减率优于 r^k 时, 系统(3) 的状态 $x(t)$ 的衰减率优于 $\mathrm{e}^{-\alpha}$, 这说明连续时间系统的快速性指标可通过其 δ 算子离散化系统的控制器设计来实现. 根据文献[11], (5) 的极点全部属于 $D(0, r)$ 的充分必要条件是: 存在 n 阶矩阵 $P > 0$ 满足 LMI

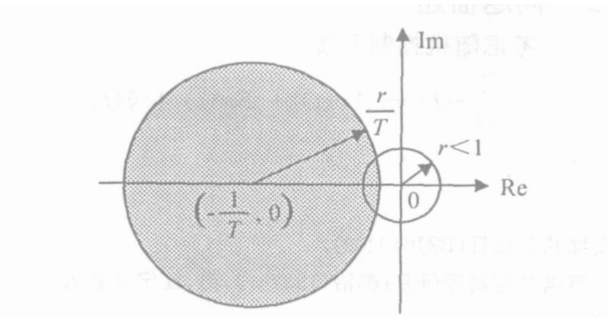

图 1　系统极点区域的对应关系

$$\begin{bmatrix} -rP & (I + TA_c)P \\ P(I + TA_c)^{\mathrm{T}} & -rP \end{bmatrix} < 0. \tag{7}$$

满意控制的第 2 个指标以状态稳态方差的界, 给出了系统控制精确度的要求.

根据文献[10], 在系统稳定的条件下, (3) 和(5) 的稳态状态方差分别定义为

$$X_c = \lim_{t\to\infty}\mathrm{E}[x(t)x^{\mathrm{T}}(t)],$$

$$X_d = \lim_{k\to\infty}\mathrm{E}[x(k)x^{\mathrm{T}}(k)], \tag{8}$$

是分别满足 Lyapunov 方程

$$A_c X_c + X_c A_c^{\mathrm{T}} + R = 0, \tag{9}$$

$$X_d = (I + TA_c)X_d(I + TA_c)^{\mathrm{T}} + TR \tag{10}$$

的唯一正定解.

如果 A_c 是稳定的, 易证存在 $T_0 > 0$, 对任意的 $T \in (0, T_0]$, 系数矩阵 $(I + TA_c)$ 是稳定的, 从而(10) 存在正定解 $X_d(T)$. 对(10) 进行整理, 有

$$A_c X_d + X_d A_c^{\mathrm{T}} + TA_c X_d A_c^{\mathrm{T}} + R = 0. \tag{11}$$

根据文献[12] 中的 Riccati 方程解的单调性结论可以证明, 对于 $T \in (0, T_0]$, (10) 的正定解 $X_d(T)$ 是单调减小的, 且 $X_c \le X_d(T)$, 所以 $\lim_{T\to 0^+} X_d(T)$ 存在且满足(9). 由正定解的存在唯一性可知 $\lim_{T\to 0^+} X_d(T) = X_c$, 即对于 $T \in (0, T_0]$, 有

$$X_c \le X_d(T), \lim_{T\to 0^+} X_d(T) = X_c. \tag{12}$$

再由文献[12] 中 Riccati 方程解的单调性可知, 如果存在 n 阶矩阵 $X > 0$ 满足矩阵不等式

$$A_c X + XA_c^{\mathrm{T}} + TA_c XA_c^{\mathrm{T}} + R < 0, \tag{13}$$

则

$$X_c \le X_d(T) < X. \tag{14}$$

根据 Schur 补定理, 矩阵不等式(13) 等价于 LMI

$$\begin{bmatrix} A_c X + XA_c^{\mathrm{T}} + R & A_c X \\ XA_c^{\mathrm{T}} & -\frac{1}{T}X \end{bmatrix} < 0. \tag{15}$$

这说明当采样周期 $T \to 0^+$ 时, δ 算子离散化系统的状态稳态方差趋于原连续时间系统的状态稳态误差, 且连续时间系统的方差指标控制问题可通过 δ 算子离散化系统来解决. 与此同时, 采样周期 T 也可作为系统设计的参数, 因此从性能指标的角度为离散控制系统采样频率的确定提供了依据.

综上所述, 有如下结果:

定理 1　满意控制问题存在可行解的充分条件是: 对于采样周期 $0 < T < 1/\alpha$, 存在 n 阶正定矩阵 P

$>0, X>0$ 满足矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -rP & (I+TA_c)P \\ P(I+TA_c)^{\mathrm{T}} & -rP \end{bmatrix} < 0, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} A_cX + XA_c^{\mathrm{T}} + R & A_cX \\ XA_c^{\mathrm{T}} & -\frac{1}{T}X \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

$$X < X_0, \quad (18)$$

其中 $r = 1 - T\alpha$.

下面将定理 1 的条件转化为对采样周期 T 可进行搜索, 对 $P>0, X>0$ 可进行数值解算的LMI形式. 为减少设计的保守性, 根据文献[13] 的变尺度方法, 设存在某一正数 $\sigma>0$ 使得 $\frac{1}{\sigma}P = X$. 同时设 $G = KP \in R^{m\times n}$, 即 $K = GP^{-1}$.

定理 2　满意控制问题存在可行解的充分条件是: 对于采样周期 $0<T<1/\alpha$, 存在 $\sigma>0$, n 阶正定矩阵 $P>0$ 和 $m\times n$ 阶矩阵 G 满足LMIs

$$\begin{bmatrix} -rP & P+TAP+TBG \\ P+TPA^{\mathrm{T}}+TG^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & -rP \end{bmatrix} < 0, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} AP+PA^{\mathrm{T}}+BG+G^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+\sigma R & AP+BG \\ PA^{\mathrm{T}}+G^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & -\frac{1}{T}P \end{bmatrix} < 0, \quad (20)$$

$$P < \sigma X_0, \quad (21)$$

其中 $r = 1 - T\alpha$.

由上述讨论可见, 若对某个 $T>0$, LMIs(19)～(21) 存在正定解, 那么对于比它小的采样周期, 上述LMIs 也存在正定解, 此时能搜索到满足可行解的尽可能大的采样周期. 合适的较大的采样周期, 有利于数字控制系统的工程实现.

4　数值算例

考虑例子[14], 其中对应于系统(1),

$$A = \begin{bmatrix} -0.89 & 1 \\ -142.6 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.119 \\ -130.8 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 31\,773.06 \end{bmatrix}.$$

取 $X_0 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$, $\alpha = 1$, $r = 1 - T\alpha$, 搜索尽可能大的采样周期 T, 使LMIs(19)～(21) 存在正定解. 利用Matlab的LMIs工具箱求得, 当 $T = 0.001\,55$ 时,

$$P = \begin{bmatrix} 0.543\,20 & -0.164\,93 \\ -0.164\,93 & 11.591\,09 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} -0.590\,15 \\ 56.593\,69 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \sigma = 0.233\,69,$$

从而 $K = GP^{-1} = (0.397\,76 \quad 4.888\,18)$. 此时闭环系统(3) 的极点为 $-1.064\,88$, $-639.245\,97$, 状态稳态方差为

$$X = \begin{bmatrix} 0.006\,378 & 0.014\,291 \\ 0.014\,291 & 24.842\,677 \end{bmatrix},$$

可见, 通过 δ算子离散化模型的设计达到了原连续时间系统的满意控制指标要求.

5　结　　论

本文从系统性能指标的角度说明, 通过其 δ离散化模型可以对原连续时间控制系统进行控制器设计, 包括对采样频率的设计, 使原连续时间系统实现具有极点配置指标和状态稳态方差指标的满意控制.

参考文献(References)

[1] Middleton R H, Goodwin G C. Improved Finite Word Length Characteristics in Digital Control Using Delta Operators [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1986, 31(11): 1015-1021.

[2] Middleton R H, Goodwin G C. *Digital Control and Estimation: A Unified Approach* [M]. NJ: Prentice Hall, 1990.

[3] 张端金, 王忠勇, 吴捷. 系统控制和信号处理中的Delta 算子方法[J]. *控制与决策*, 2003, 18(4): 385-391.
(Zhang D J, Wang Z Y, Wu J. Survey on System Control and Signal Processing Using the Delta Operator [J]. *Control and Decision*, 2003, 18(4): 385-391.)

[4] 张端金, 杨成梧, 吴捷. Delta 算子系统的鲁棒性能分析[J]. *自动化学报*, 2000, 26(6): 848-852.
(Zhang D J, Yang C W, Wu J. Robust Performance Analysis of Delta Operator Systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2000, 26(6): 848-852.)

[5] 张端金, 吴捷, 杨成梧. Delta 算子系统的状态反馈鲁棒镇定与 H_∞鲁棒控制[J]. *控制理论与应用*, 2001, 18(5): 732-736.
(Zhang D J, Wu J, Yang C W. Robust Stabilization and Robust H_∞ Control for the Delta Operator System via State Feedback [J]. *Control Theory and Applications*, 2001, 18(5): 732-736.)

[6] 张端金, 吴捷, 杨成梧. Delta 算子系统圆形区域极点配置的鲁棒性[J]. *控制与决策*, 2001, 16(3): 337-340.
(Zhang D J, Wu J, Yang C W. Robustness of Pole Assignment in a Circular Region for Delta Operator Systems [J]. *Control and Decision*, 2001, 16(3): 337-340.)

[7] Palhares R M, Peres P L D. Robust H_∞ Filter Design with Pole Constraints for Discrete Time Systems [J]. *J of the Franklin Institute*, 2000, 337(6): 713-723.

(下转第 1407 页)

且需要一定的学习时间

参考文献(References)

[1] 张文慧, 赵道致. 供应链中合作机制的研究[J]. *天津理工学院学报*, 2002, 18(4): 108-111.
(Zhang W H, Zhao D Z. Study of Cooperation Mechanisms in Supply Chain[J]. *J of Tianjin Institute of Technology*, 2002, 18(4): 108-111.)

[2] 张钦, 沈厚才, 达庆利. 供应链管理: 两级分销系统的最优订货策略[J]. *系统工程学报*, 2002, 17(4): 303-308.
(Zhang Q, Shen H C, Da Q L. Supply Chain Management: Optimizing Order Strategies of Two-echelon Distribution System [J]. *J of Systems Engineering*, 2002, 17(4): 303-308.)

[3] 王迎军, 高峻峻. 供应链分销系统优化及仿真[J]. *管理科学学报*, 2002, 5(5): 79-84.
(Wang Y J, Gao J J. Optimization and Simulation of Distribute Systems in a Supply Chain [J]. *J of Management Science in Chain*, 2002, 5(5): 79-84.)

[4] Antonio Murciano, Jose del R Millan, Javier Zamora. Specialization in Multi-agent Systems Through Learning[J]. *Biological Cybernetics*, 1997: 76(5): 375-382.

[5] 李春贵, 刘永信. 一种有限时段Markov 决策过程的强化学习算法[J]. *广西工学院学报*, 2003, 14(1): 1-4.
(Li C G, Liu Y X. An Algorithm of Reinforcement Learning for Finite-horizon Markov Decision Processes [J]. *J of Guangxi University of Technology*, 2003, 14(1): 1-4.)

[6] 王醒策, 张汝波, 顾国昌. 多机器人动态编队的强化学习算法研究[J]. *计算机研究与发展*, 2003, 40(10): 1444-1450.
(Wand X C, Zhang R B, Gu G C. Research on Dynamic Team Formation of Multi-robots Reinforcement Learning [J]. *J of Computer Research and Development*, 2003, 40(10): 1444-1450.)

[7] Kim C O, Jun J, Baek J K, et al. Adaptive Inventory Control Models for Supply Chain Management[J]. *Int J of Advanced Manufacturing Technology*, 2004, 26(7): 1184-1192.

[8] 张春阳, 陈小平, 刘贵全, 等. Q-learning 算法及其在囚徒困境问题中的实现[J]. *计算机工程与应用*, 2001, 13(1): 121-128.
(Zhang C Y, Chen X P, Liu G Q. Q-learning Algorithm and Its Usage in Prisoner's Dilemma[J]. *J of Computer Engineering and Application*, 2001, 13(1): 121-128.)

[9] 蒋国飞, 吴沧浦. Q 学习算法在库存控制中的应用[J]. *自动化学报*, 1999, 25(2): 236-241.
(Jiang G F, Wu C P. Inventory Control Using Q-learning [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1999, 25(2): 236-241.)

[10] 李学勇, 欧阳柳波, 李国徽. 基于隐偏向信息学习的强化学习算法[J]. *南华大学学报(理工版)*, 2004, 18(2): 10-16.
(Li X Y, Ou Yang L B, Li G H. Reinforcement Learning Based on Hidden Biasing Information Learning [J]. *J of Nanhua University (Science & Engineering Edition)*, 2004, 18(2): 10-16.)

(上接第 1403 页)

[8] 张端金, 吴捷. 具有区域极点和方差约束的Delta 算子系统鲁棒 H_∞ 滤波[J]. *控制与决策*, 2004, 19(1): 12-16.
(Zhang D J, Wu J. Robust H_∞ Filtering for Delta Operator Formulated Systems with Circular Pole and Error Variance Constraints[J]. *Control and Decision*, 2004, 19(1): 12-16.)

[9] Guo Z. A Survey of Satisfying Control and Estimation [A]. *Proc of the 14th IFAC World Congress* [C]. Beijing, 1999: 443-447.

[10] Skelton R E, Iwasaki I. Liapunov and Covariance Controllers[J]. *Int J Control*, 1993, 57(3): 319-536.

[11] Chilali M, Gahinet P. Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(3): 358-367.

[12] Petersen I R, Hollot C V. A Riccati Equation Approach to the Stabilization of Uncertain Linear Systems[J]. *Automatica*, 1986, 22(4): 397-411.

[13] Kyung-Soo Kim, Faryar Jabbari. Using Scales in the Multiobjective Approach [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(5): 973-977.

[14] Chilali M, Gahinet P, Apkarian P. Robust Pole Placement in LMI Regions [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(12): 2257-2270.