第 20 卷 第 12 期 控 制 与 决 策 2005 年 12 月
Vol. 20 No. 12 Control and Decision Dec. 2005

文章编号: 1001-0920(2005)12-1438-03

广义随机系统的集值滤波

吴健荣
(苏州科技学院 应用数学系, 江苏 苏州 215009)

摘 要: 在具有控制输入和动态噪声与观测噪声相关的情况下, 给出线性随机系统的集值滤波方程; 利用矩阵分解和系统变换的技巧, 得到广义随机系统的集值滤波方程. 这种状态估计方法适用于初始状态均值位于一个凸集之中的随机系统. 与传统 Kalman 滤波产生单个条件分布不同, 这里的集值滤波给出一个条件分布的凸集.

关键词: 随机系统; 广义系统; 集值滤波
中图分类号: O231.3 **文献标识码**: A

Set-valued Filtering for Singular Stochastic Systems

WU Jian-rong
(Department of Applicated Mathematics, University of Science and Technology of Suzhou, Suzhou 215009, China. E-mail: jrwu1643@sina.com.cn)

Abstract: In case of the existance of control inputs or correlation between the inputs noise and the measurement noise, the set-valued filtering equation for stochastic linear systems is given. By using the techniques of the matrix decomposition and the system transformation, the set-valued filtering for stochastic singular linear systems is also designed. This method is fit to estimate the state of a stochastic system that the initial state is a random vector with mean value lying in a convex set. Rather than propagating a single conditional distribution as does conventional Kalman filtering, a convex set of conditional distributions is provided by the set-valued filtering.

Key words: Stochastic system; Singular system; Set-valued filtering

1 引 言

传统的 Kalman 滤波给出的状态估计结果是单值的, 并且依赖于初始条件的精确性. 但在实际系统中, 由于数据的局限性, 初始均值很难做到十分精确, 一般仅能给出初始均值的一个取值范围. 对于这类问题, 如果沿用传统的 Kalman 滤波方法进行估计, 往往不能得到满意的结果. 为弥补这一缺陷, Morrell 等[1]提出了集值滤波的思想. 这种方法是传统 Kalman 滤波方法的推广, 它允许初始均值具有不确定性, 当然所给出的状态估计往往是不唯一的. 这种结果在某种意义上更符合实际, 在此基础上实施的控制有时会更加有效. 目前, 关于集值滤波的研究已取得了一些重要的成果[1~3].

广义系统作为一般系统的推广, 近年来得到了大量的研究[4]. 鉴于广义系统的解对输入项具有特别强的敏感性, 广义系统的状态估计问题尤其受到了人们的关注[5]. 本文的目的就是要将集值滤波引入广义随机系统中. 首先给出在噪声相关的情况下, 随机系统的集值滤波方程; 然后利用矩阵分解和系统变换的技巧, 得到广义随机系统的集值滤波方程.

2 噪声相关系统的集值滤波

考察线性随机系统

$$x_{k+1} = A_k x_k + G_k \omega_k,$$
$$y_{k+1} = B_{k+1} x_{k+1} + \gamma_{k+1}. \tag{1}$$

其中: $A_k \in R^{n\times n}$, $x_k \in R^n$, $y_{k+1} \in R^m$; B_{k+1} 与 G_k 为适维矩阵, $k = 0, 1, 2, \cdots$; $\{\omega_k, k \geq 0\}$ 和 $\{\gamma_{k+1}, k \geq 0\}$ 为互不相关的零均值高斯白噪声, 协方差矩阵分别为 Q_k 和 R_k, 且它们与初始状态 x_0 也互不相关. 初始

收稿日期: 2004-11-12; **修回日期**: 2005-03-28.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60574077); 江苏省教育厅自然科学基金项目(04KJD110168); 苏州科技学院科研基金重点项目.
作者简介: 吴健荣(1963—), 男, 江苏苏州人, 教授, 博士, 从事非线性分析、模糊数学及广义系统理论等研究.

状态 x_0 是随机向量集 $X_{0|0} = \{x \sim N(\underline{x}, P_{0|0}): \underline{x} \in \underline{X}_{0|0}\}$ 中的元素, 其中 $\underline{X}_{0|0} = \{\underline{x} \in R^n: \| K_{0|0}^{-1}(\underline{x} - \underline{c}_{0|0}) \| \leq 1\}$, $P_{0|0}$ 和 $K_{0|0}$ 分别为正定矩阵和可逆矩阵, $\| \cdot \|$ 为矩阵范数

文献[1] 给出了系统(1) 的集值滤波算法($\forall k > 1$):

预测方程

$$\underline{X}_{k|k-1} = \{\underline{x} \in R^n: \| K_{k|k-1}^{-1}(\underline{x} - \underline{c}_{k|k-1}) \| \leq 1\}, \tag{2}$$

$$\underline{c}_{k|k-1} = A_{k-1}\underline{c}_{k-1|k-1}, \tag{3}$$

$$K_{k|k-1} = A_{k-1}K_{k-1|k-1}; \tag{4}$$

预测方差

$$P_{k|k-1} = A_{k-1}P_{k-1|k-1}A_{k-1}^T + G_{k-1}Q_{k-1}G_{k-1}^T; \tag{5}$$

滤波方程

$$\underline{X}_{k|k} = \{\underline{x} \in R^n: \| K_{k|k}^{-1}(\underline{x} - \underline{c}_{k|k}) \| \leq 1\}, \tag{6}$$

$$\underline{c}_{k|k} = \underline{c}_{k|k-1} + M_k[y_k - B_k\underline{c}_{k|k-1}], \tag{7}$$

$$K_{k|k} = [I - M_kB_k]K_{k|k-1}; \tag{8}$$

波滤方差

$$P_{k|k} = [I - M_kB_k]P_{k|k-1}; \tag{9}$$

增益方程

$$M_k = P_{k|k-1}B_k^T[B_kP_{k|k-1}B_k^T + R_k]^{-1}. \tag{10}$$

系统(1) 没有输入项, 动态噪声和观测噪声互不相关, 这些假定基本上与实际控制系统的空载情形相对应, 因此, 其适用范围十分有限

下面考虑具有控制输入项的情形:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_kx_k + D_ku_k + G_k\omega_k, \\ y_{k+1} &= B_{k+1}x_{k+1} + F_{k+1}u_{k+1} + \nu_{k+1}. \end{aligned} \tag{11}$$

其中: $u_k \in R^s$ 为控制输入向量, $D_k \in R^{n\times s}$ 及 $F_{k+1} \in R^{m\times s}$ 为输入矩阵, 其他各向量、矩阵的意义和关于随机性的假设与系统(1) 相同 由于输入项的加入只影响有关量的均值, 而不影响其方差, 系统(11) 的集值滤波公式与(2) 的基本相同, 仅需将其中的(3) 与(7) 分别改写为

$$\underline{c}_{k|k-1} = A_{k-1}\underline{c}_{k-1|k-1} + D_{k-1}u_{k-1}, \tag{12}$$

$$\underline{c}_{k|k} = \underline{c}_{k|k-1} + M_k[y_k - B_k\underline{c}_{k|k-1} - F_ku_k]. \tag{13}$$

现在讨论当动态噪声与观测噪声相关时, 随机系统的集值滤波问题 为此, 假设在随机系统

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_kx_k + D_ku_k + G_k\omega_k, \\ y_{k+1} &= B_{k+1}x_{k+1} + F_{k+1}u_{k+1} + \nu_{k+1}. \end{aligned} \tag{14}$$

中, 动态噪声$\{\omega_k, k \geq 0\}$ 与观测噪声$\{\nu_{k+1}, k \geq 0\}$ 是相关的, 例如

$$E(\omega_k\nu_j^T) = S_k\delta(k, j), k, j \geq 1, \tag{15}$$

其中 S_k 为非零矩阵 引进矩阵

$$L_k = G_kS_kR_k^{-1}, \bar{A}_k = A_k - L_kB_k,$$

$$\bar{F}_{k+1} = [F_{k+1} \quad 0], \bar{D}_k = [D_k - L_kF_k \quad L_k],$$

以及向量

$$\bar{\omega}_k = G_k\omega_k - L_k\nu_k, \bar{u}_k = \begin{bmatrix} u_k \\ y_k \end{bmatrix},$$

则系统(14) 可转化为

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \bar{A}_kx_k + \bar{D}_k\bar{u}_k + \bar{\omega}_k, \\ y_{k+1} &= B_{k+1}x_{k+1} + \bar{F}_{k+1}\bar{u}_{k+1} + \nu_{k+1}. \end{aligned} \tag{16}$$

注意到

$$E(\bar{\omega}_k\nu_j^T) = 0, E(\bar{\omega}_k) = 0, E(\bar{\omega}_kx_0^T) = 0,$$

$$E(\bar{\omega}_k\bar{\omega}_j^T) = \mathrm{var}(\bar{\omega}_k)\delta(k, j),$$

其中 $\mathrm{var}(\bar{\omega}_k) = G_kQ_kG_k^T - L_kS_k^TL_k^T$.

可见, 系统(16) 中的动态噪声和观测噪声互不相关 若将 $\bar{u}_k$ 看作是新的控制输入, 则(16) 的结构与系统(11) 的结构完全一致 所以, 根据系统(11) 的集值滤波方程, 可立即得到系统(14) 的集值滤波方程, 这里不再赘述

3 广义随机系统的集值滤波

考虑广义线性随机系统

$$\begin{aligned} E_{k+1}x_{k+1} &= A_kx_k + D_ku_k + \omega_k, \\ y_{k+1} &= B_{k+1}x_{k+1} + \nu_{k+1}, \end{aligned} \tag{17}$$

其中: $E_{k+1}, A_k \in R^{p\times n}$, $x_k \in R^n$, $k = 0, 1, 2, \cdots$; 其他各向量、矩阵的意义和关于$\{\omega_k, k \geq 0\}$ 和$\{\nu_{k+1}, k \geq 0\}$ 的随机性假设与系统(1) 相同

假定系统(17) 是能估计的[5], 即

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} E_k \\ B_k \end{bmatrix} = n, \tag{18}$$

则存在非奇异阵 $T_k = \begin{bmatrix} T_k^{11} & T_k^{12} \\ T_k^{21} & T_k^{22} \end{bmatrix}$, 使得

$$T_k\begin{bmatrix} E_k \\ B_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

将(17) 合写成

$$\begin{bmatrix} E_{k+1} \\ B_{k+1} \end{bmatrix} x_{k+1} = \begin{bmatrix} A_k \\ 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} D_k & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_k \\ -\nu_{k+1} \end{bmatrix},$$

上式两边同左乘 T_{k+1} 得

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= T_{k+1}^{11}A_kx_k + T_{k+1}^{11}D_ku_k + \\ &\quad T_{k+1}^{12}y_{k+1} + T_{k+1}^{11}\omega_k - T_{k+1}^{12}\nu_{k+1}, \\ 0 &= T_{k+1}^{21}A_kx_k + T_{k+1}^{21}D_ku_k + \\ &\quad T_{k+1}^{22}y_{k+1} + T_{k+1}^{21}\omega_k - T_{k+1}^{22}\nu_{k+1}. \end{aligned} \tag{20}$$

令

$$\begin{aligned} & u_{k,k+1} = \begin{bmatrix} u_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix}, \omega_{k,k+1} = T_{k+1}^{11}\omega_k - T_{k+1}^{12}\nu_{k+1}, \\ & \nu_{k,k+1} = T_{k+1}^{21}\omega_k - T_{k+1}^{22}\nu_{k+1}, \end{aligned} \tag{21}$$

$$D_{k,k+1} = [T^{11}_{k+1}D_k \quad T^{12}_{k+1}],$$
$$F_{k,k+1} = [T^{21}_{k+1}D_k \quad T^{22}_{k+1}], \tag{22}$$

从而系统(17)可以改写为

$$x_{k+1} = T^{11}_{k+1}A_k x_k + D_{k,k+1}u_{k,k+1} + \omega_{k,k+1},$$
$$0 = T^{21}_{k+1}A_k x_k + F_{k,k+1}u_{k,k+1} + \gamma_{k,k+1}. \tag{23}$$

由$\{\omega_k\}$和$\{\gamma_{k+1}\}$的随机特性知, $\{\omega_{k,k+1}\}$和$\{\gamma_{k,k+1}\}$也是零均值的高斯白噪声, 且都与x_0互不相关. 但$\{\omega_{k,k+1}\}$与$\{\gamma_{k,k+1}\}$是相关的, 通过简单计算, 可以验证它们满足如下协方差矩阵:

$$E\left\{\begin{bmatrix}\omega_{k,k+1}\\ \gamma_{k,k+1}\end{bmatrix}[\omega^{T}_{k,k+1} \quad \gamma^{T}_{k,k+1}]\right\} = \begin{bmatrix}Q_{k,k+1} & S_{k,k+1}\\ S^{T}_{k,k+1} & R_{k,k+1}\end{bmatrix}. \tag{24}$$

其中

$$Q_{k,k+1} = E(\omega_{k,k+1}\omega^{T}_{k,k+1}) = T^{11}_{k+1}Q_k T^{11^T}_{k+1} + T^{12}_{k+1}R_{k+1}T^{12^T}_{k+1}, \tag{25}$$
$$R_{k,k+1} = E(\gamma_{k,k+1}\gamma^{T}_{k,k+1}) = T^{21}_{k+1}Q_k T^{21^T}_{k+1} + T^{22}_{k+1}R_{k+1}T^{22^T}_{k+1}, \tag{26}$$
$$S_{k,k+1} = E(\omega_{k,k+1}\gamma^{T}_{k,k+1}) = T^{11}_{k+1}Q_k T^{21^T}_{k+1} + T^{12}_{k+1}R_{k+1}T^{22^T}_{k+1}. \tag{27}$$

所以, 系统(23)可以看作形如(14)的噪声相关随机系统, 其中观测值始终取为零. 从而系统(17)的集值滤波方程可由系统(14)的集值滤波方程得到. 为完整起见, 下面给出系统(17)的集值滤波方程($\forall k > 1$):

预测方程

$$\underline{X}_{k|k-1} = \{\underline{x} \in R^n: \| K^{-1}_{k|k-1}(\underline{x} - \underline{c}_{k|k-1}) \| < 1\}, \tag{28}$$
$$\underline{c}_{k|k-1} = \bar{A}_{k-1}\underline{c}_{k-1|k-1} + \bar{D}_{k-1}\bar{u}_{k-1}, \tag{29}$$
$$K_{k|k-1} = \bar{A}_{k-1}K_{k-1|k-1}; \tag{30}$$

预测方差

$$P_{k|k-1} = \bar{A}_{k-1}P_{k-1|k-1}\bar{A}^{T}_{k-1} + \bar{Q}_{k-1}; \tag{31}$$

滤波方程

$$\underline{X}_{k|k} = \{\underline{x} \in R^n: \| K^{-1}_{k|k}(\underline{x} - \underline{c}_{k|k}) \| \le 1\}, \tag{32}$$
$$\underline{c}_{k|k} = \underline{c}_{k|k-1} - M_k[T^{21}_{k+1}A_k\underline{c}_{k|k-1} + F_{k|k+1}u_k], \tag{33}$$
$$K_{k|k} = [I - M_k T^{21}_{k+1}A_k]K_{k|k-1}; \tag{34}$$

滤波方差

$$P_{k|k} = [I - M_k T^{21}_{k+1}A_k]P_{k|k-1}; \tag{35}$$

增益方程

$$M_k = P_{k|k-1}A^{T}_k T^{21^T}_{k+1}[T^{21}_{k+1}A_k P_{k|k-1}A^{T}_k T^{21^T}_{k+1} + R_k]^{-1}. \tag{36}$$

其中

$$L_k = S_{k,k+1}R^{-1}_{k,k+1},$$
$$\bar{A}_k = T^{11}_{k+1}A_k - L_k T^{21}_{k+1}A_k,$$
$$\bar{D}_k = [D_{k,k+1} - L_k F_{k,k+1} \quad L_k],$$
$$\bar{Q}_k = Q_{k,k+1} - S_{k,k+1}R^{-1}_{k,k+1}S^{T}_{k,k+1},$$

$Q_{k,k+1}, R_{k,k+1}, S_{k,k+1}$的定义如式(25)～(27). 算法初值如系统(1)中的假定.

注1 条件(18)实际上是广义系统的一种较强的能观性, 它是滤波器存在的充分而非必要的条件. 事实上, 为了得到随机系统(17)的集值滤波, 可将条件(18)减弱为Y-能观[5]. 此时, 系统(17)一般不能改写成(23)的形式, 但通过状态变换可将其改写成如下形式[6]:

$$x_{k+1,1} = \tilde{A}_k x_{k,1} + \tilde{D}_k u_k + \tilde{F}_k y_k + \tilde{\omega}_k, \tag{37a}$$
$$z_k = \tilde{B}_k x_{k,1} + \tilde{\gamma}_k, \tag{37b}$$
$$x_{k,2} = \tilde{L}_k x_{k,1} + \tilde{M}_k u_k + \tilde{N}_k y_k + \tilde{\xi}_k. \tag{37c}$$

不难看出, 利用第2节的结论可得到子系统(37a)和(37b)的集值滤波, 在此基础上根据(37c)可得到$x_{k,2}$的集值滤波, 从而得到原系统的集值滤波方程.

4 结 语

本文首先将一般线性随机系统的集值滤波形式推广到具有控制输入和动态噪声与观测噪声相关的情形; 在此基础上, 利用矩阵分解和系统变换的技巧, 导出了广义随机系统的集值滤波方程, 弥补了这方面研究的空白, 为广义随机系统的状态估计提供了一种可行的算法. 另外, 利用本文给出的方法, 不难得到广义随机系统的平滑与预测算法.

参考文献(References)

[1] Morrell D R, Stirling W C. Set-valued Filtering and Smoothing [J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics*, 1991, 21(1): 184-193.

[2] Kenney J D, Beard R, Stirling W C. Set-valued Nonlinear Estimation Using the Galerkin Approximation [A]. *Proc of the American Control Conference* [C]. Philadelphia, 1998: 3580-3584.

[3] Kenney J D, Stirling W C. Nonlinear Filtering of Convex Sets of Probability Distributions [J]. *J of Statistical Planning and Inference*, 2002, 105: 123-147.

[4] Dai L. *Singular Control Systems* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[5] Germani A, Manes G, Palumbo P. Optimal Linear Filtering for Stochastic Non-Gaussian Descriptor Systems [A]. *Proc of the 40th Conf on Decision and Control* [C]. Orlando, 2001: 2514-2519.

[6] Hou M, Muller P C. Filtering and Smoothing for Discrete Linear Time-varying Descriptor Systems [A]. *Proc of the 31th Conf on Decision and Control* [C]. Tucson, 1992: 1236-1441.