

文章编号: 1001-0920(2005)12-1342-04

非线性耦合统一混沌系统的同步

闵富红^{1,2}, 王执铨¹

(1. 南京理工大学 自动化系, 南京 210094; 2 南京师范大学 电气与自动化工程学院, 南京 210042)

摘要: 研究非线性耦合的两个统一混沌系统的同步问题. 首先利用线性时变系统的稳定性理论, 推出当两个统一混沌系统的误差系统渐近稳定时, 耦合函数的参数选择范围, 从而得出两个统一混沌系统全局渐近同步的充分条件. 然后基于 Routh-Hurwitz 稳定性判别方法, 同样得出了混沌系统同步的一个充分条件. 通过数值仿真发现, 根据第 1 种方法选择的参数能使混沌系统全局渐近同步; 而依据第 2 种方法选择的参数, 即使误差系统系数矩阵的瞬间特征值具有负实部, 也会出现混沌同步失去的情况, 从而表明了该分析方法的有效性.

关键词: 统一混沌系统; 非线性耦合同步; 线性时变系统; Routh-Hurwitz

中图分类号: TP391.9 **文献标识码:** A

Nonlinearly Coupled Synchronization of Unified Chaotic Systems

MIN Fu-hong^{1,2}, WANG Zhi-quan¹

(1. Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China; 2 School of Electronic Engineering and Automation, Nanjing Normal University, Nanjing 210042, China Correspondent: MIN Fu-hong, E-mail: minfuhong@njnu.edu.cn)

Abstract: The issue of the synchronization of two nonlinearly coupled unified chaotic systems is dealt with. A sufficient condition for synchronization is attained by using the criterion of the stability of time-varying systems. In addition, another sufficient condition for synchronization is obtained when the stability criterion of Routh-Hurwitz is employed. Compared with the two kinds of results, the synchronization state is stable by the first criterion when the range of the parameters in a vector coupling function is given. Unfortunately, the synchronization is sometimes loss when using the second criterion. Moreover, the analytic method is tested in coupled unified system, and the numerical results show the effectiveness of the theoretical analysis.

Key words: Unified chaotic systems; Nonlinearly coupled synchronization; Time-varying systems; Routh-Hurwitz

1 引言

近年来, 混沌同步在保密通讯、信号处理和生命科学等方面有着十分广泛的应用前景, 人们提出了许多混沌同步的方法^[1~7], 如自适应方法、激活控制方法、backstepping 方法、线性控制法等. 最近, 人们对利用不同的方法来耦合两个相同或不同的混沌系统同步产生了很大的兴趣. 如采用活动控制器实现两个相同 Rossler 混沌系统和两个相同 Chen 混沌系统分别同步^[3]; 利用激活控制法实现 Lorenz 混沌系统、LU 混沌系统和 Chen 混沌系统相互之间的混

沌同步^[4]; 利用线性耦合方法实现统一混沌系统^[5~6]的同步等. 然而, 为使混沌同步能够得到更好的应用, 也为了保证有高质量的同步, 对于混沌同步条件的研究同样重要. 目前, 已有许多混沌同步存在的判定方法, 如 Routh-Hurwitz 稳定性判别法^[5]; 基于李亚谱诺夫稳定性求解线性不等式的最优解的方法^[6]; 李亚谱诺夫指数法^[7]等.

本文对两个统一混沌系统的非线性耦合同步进行分析. 考虑到耦合后两个混沌系统的误差系统是时变的, 因而利用线性时变连续大系统的稳定性理

收稿日期: 2004-12-01; 修回日期: 2005-03-16

基金项目: 国家自然科学基金项目(60174005); 江苏省自然科学基金项目(BK2001054).

作者简介: 闵富红(1970-), 女, 江苏海安人, 博士生, 从事非线性系统的混沌控制与同步研究; 王执铨(1939-), 男, 武汉人, 教授, 博士生导师, 从事动态大系统的建模、信息安全以及混沌控制等研究.

论^[8], 来确定当时间趋于无穷大, 误差系统渐近稳定时, 耦合函数的参数选择范围, 从而得到两个统一混沌系统同步的充分条件. 然而通过仿真发现, 对于线性时变系统, 使用 Routh-Hurwitz 稳定性判别方法会出现混沌同步失去的现象. 文献[9, 10]也提到这种情况, 但没有给出解决方法. 对此, 本文给出详细的解决方案, 并将这种方法应用于统一混沌系统中, 且不断地改变参数 α 的值, 均取得了满意的结果, 从而证实了该方法的有效性与可行性.

2 统一混沌系统的非线性耦合同步

考虑两个初始值不同、结构相同的混沌系统 $\dot{x} = f(x)$ 和 $\dot{y} = f(y)$, 分别为驱动系统和响应系统. 设 g 是非线性耦合向量函数, 则耦合后的响应系统为

$$\dot{y} = f(y) + (g(x) - g(y)), \quad (1)$$

$g(x)$ 可以看作是从驱动系统到响应系统的传输信号.

2.1 非线性耦合统一混沌系统

统一混沌系统的数学模型^[6]为

$$\begin{cases} \dot{x} = (25\alpha + 10)(y - x), \\ \dot{y} = (28 - 35\alpha)x - xz + (29\alpha - 1)y, \\ \dot{z} = xy - \frac{8 + \alpha}{3}z, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\alpha \in [0, 1]$, 这代表一族混沌系统. 当 $\alpha \in [0, 0.8]$ 时, 该系统属于广义 Lorenz 系统; 当 $\alpha = 0.8$ 时, 该系统属于广义 Lü 系统; 当 $\alpha \in (0.8, 1]$ 时, 该系统属于广义 Chen 系统. 该系统具备一系列良好的性质, 为研究混沌控制与同步提供了一个新的模型和思路.

设统一混沌系统的非线性耦合函数为

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (25\alpha + 10)y - ax - z^2 \\ (27 - 35\alpha)x - xz + 29\alpha y \\ x(y + b) - cz \end{pmatrix}, \quad (3)$$

其中: a, b, c 为耦合函数的参数.

考虑非线性耦合后两个统一混沌系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (25\alpha + 10)(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = (28 - 35\alpha)x_1 - x_1x_3 + (29\alpha - 1)x_2, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - \frac{8 + \alpha}{3}x_3, \\ \dot{y}_1 = (25\alpha + 10)(y_2 - y_1) + g_1, \\ \dot{y}_2 = (28 - 35\alpha)y_1 - y_1y_3 + (29\alpha - 1)y_2 + g_2, \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - \frac{8 + \alpha}{3}y_3 + g_3 \end{cases} \quad (4)$$

其中: $x_i, y_i (i = 1, 2, 3)$ 为系统的状态变量; g_1, g_2, g_3 为对应项的耦合函数, 分别为

$$\begin{aligned} g_1 &= (25\alpha + 10)(x_2 - y_2) - \\ &\quad \alpha(x_1 - y_1) - (x_3^2 - y_3^2), \\ g_2 &= 29\alpha(x_2 - y_2) + (27 - \\ &\quad 35\alpha)(x_1 - y_1) - x_1x_3 + y_1y_3, \\ g_3 &= b(x_1 - y_1) - c(x_3 - y_3) - \\ &\quad y_1y_2 + x_1x_2 \end{aligned}$$

定义误差信号为

$$\begin{cases} e_1(t) = x_1(t) - y_1(t), \\ e_2(t) = x_2(t) - y_2(t), \\ e_3(t) = x_3(t) - y_3(t), \end{cases} \quad (5)$$

则误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (a - 25\alpha - 10)e_1 + (x_3 + y_3)e_3, \\ \dot{e}_2 = e_1 - e_2, \\ \dot{e}_3 = -be_1 + \left(c - \frac{8 + \alpha}{3}\right)e_3. \end{cases} \quad (6)$$

误差系统(5)的系数矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} a - (25\alpha + 10) & 0 & x_3 + y_3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -b & 0 & c - \frac{\alpha + 8}{3} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

可见, 系数矩阵(7)是时变的.

显然, 只需让耦合函数的参数满足一定的条件, 使其误差系统(5)在时间趋于无穷大时渐近稳定, 就能实现初始条件不同但结构相同的两个统一混沌系统非线性耦合同步.

由于误差系统是线性的, 而且其系数矩阵是时变的, 所以考虑使用线性时变连续系统的稳定性理论, 来确定使误差系统(5)渐近稳定时, 耦合参数必须满足的条件.

2.2 线性时变连续系统的稳定性理论^[9]

考虑三阶线性时变系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + a_{13}(t)x_3, \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + a_{23}(t)x_3, \\ \dot{x}_3 = a_{31}(t)x_1 + a_{32}(t)x_2 + a_{33}(t)x_3 \end{cases} \quad (8)$$

假设其系数 $a_{ij}(t)$ 都连续有界, 且设 $a_{ii}(t) = a < 0 (i = 1, 2, 3), \forall t \geq t_0$. 将系数矩阵 $A(t)$ 进行 2×2 分块, 即

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

令

$$b_{11} = \sup_{t \geq t_0} \{a_{11}(t) + |a_{21}(t)|\},$$

$$\begin{aligned}
 & a_{22}(t) + |a_{12}(t)|, \\
 b_{12} = & \sup_{t_0 \leq t} \{ |a_{13}(t)|, |a_{23}(t)| \}, \\
 b_{21} = & \sup_{t_0 \leq t} \{ |a_{31}(t)|, |a_{32}(t)| \}, \\
 b_{22} = & \sup_{t_0 \leq t} \{ a_{33}(t) \}, \\
 B = & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \tag{10}
 \end{aligned}$$

考虑辅助方程

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1^* &= b_{11}V_1^* + b_{12}V_2^*, \\
 \dot{V}_2^* &= b_{21}V_1^* + b_{22}V_2^*. \tag{11}
 \end{aligned}$$

定理 1 如果变系数线性系统(8)连续有界, $a_{ii}(t) < 0 (i = 1, 2, 3)$, 而且其辅助方程(11)的系数满足:

- 1) $b_{11} - \beta < 0, b_{22} - \beta < 0, \beta$ 是正常数;
- 2) 所有的特征根都有负实部,

则系统(7)的零解渐近稳定

2.3 实例分析与仿真

下面分别用线性时变系统的稳定性判据和 Routh-Hurwitz 稳定性理论, 来分析两个混沌系统的耦合同步及耦合函数的参数选择范围; 再对仿真结果进行比较, 进一步说明本文理论分析的正确性

首先, 运用线性时变系统的稳定性理论分析误差系统(5)稳定时, 耦合函数的参数选择范围, 从而给出两个相同的统一混沌系统完全同步时的充分条件

为便于分析, 将变量作一个变换

$$\tilde{e}_1 = e_1, \tilde{e}_2 = e_3, \tilde{e}_3 = e_2,$$

则误差系统(5)变为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{e}}_1 = (a - 10 - 25\alpha)\tilde{e}_1 + (x_3 + y_3)\tilde{e}_3, \\ \dot{\tilde{e}}_2 = -b\tilde{e}_2 + (c - (\alpha + 8)/3)\tilde{e}_3, \\ \dot{\tilde{e}}_3 = \tilde{e}_1 - \tilde{e}_3 \end{cases} \tag{12}$$

误差系统(5)和式(11)的稳定性是等价的 于是有

$$\begin{aligned}
 b_{11} = & \sup_{t_0 \leq t} \{ a - 10 - 25\alpha + |b|, \\
 & c - (\alpha + 8)/3 + |x_3 + y_3| \}, \\
 b_{12} = & 0, b_{21} = 1, b_{22} = -1
 \end{aligned}$$

构造辅助方程

$$\dot{V}_1^* = b_{11}V_1^*, \dot{V}_2^* = V_1^* - V_2^*,$$

求出辅助方程的特征根为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = b_{11}$

根据以上线性时变系统的稳定性理论, 只要系统时变系数矩阵的对角系数小于零, 且满足定理 1 的两个条件, 则误差系统(5)一定稳定

因而, 推出两个统一混沌系统非线性耦合同步的充分条件为

$$a + |b| < 10 + 25\alpha,$$

$$c < (8 + \alpha)/3 - 2m, \tag{13}$$

其中 $m = \max\{x_3, y_3\}$.

下面对 $\alpha = 0, \alpha = 0.8$ 和 $\alpha = 1$ 时, 统一混沌系统分别代表的 Lorenz 系统, Lü 系统和 Chen 系统进行分析与数值仿真 设两个混沌系统的初始值分别为 (2, 0.01, 0.1) 和 (0.01, 0.1, 0.2). Lorenz 系统, 选择耦合函数的参数为 $a = 5, b = 2, c = -25$; Lü 系统, 选择参数为 $a = 25, b = 2, c = -10$; Chen 系统, 参数为 $a = 5, b = 2, c = -10$

定义全局误差为

$$\epsilon = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \tag{14}$$

仿真结果如图 1 所示 (其中: $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 分别表示 Lorenz, Lü, Chen 系统). 由图可见, 驱动-响应统一系统的混沌吸引子, 尽管它们的初始值不同, 误差却很快趋于零, 两个混沌系统达到全局渐近同步.

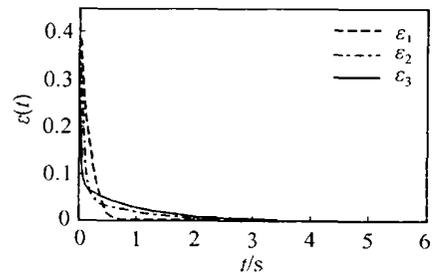


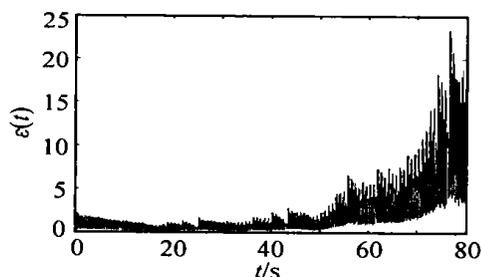
图 1 统一混沌系统同步的全局误差

再用 Routh-Hurwitz 稳定判据来确定参数值, 只要特征值到处都有负实部, 误差系统就应该渐近稳定 通过计算系数矩阵(7), 其特征值为

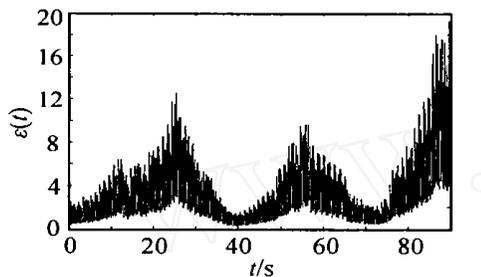
$$\begin{aligned}
 \lambda_1 = & -1, \\
 \lambda_{2,3} = & -\frac{1}{2} \left(a + c - 25\alpha - \frac{\alpha + 38}{3} \right) \pm \\
 & \left(\frac{1}{4} \left(a + c - \frac{76\alpha + 38}{3} \right)^2 - \right. \\
 & \left. \left((a - 25\alpha + 10) \left(c - \frac{\alpha + 8}{3} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. b(x_3 + y_3) \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{15}
 \end{aligned}$$

在统一混沌系统中, 总是 $x_3 > 0, y_3 > 0$ 因此, 可以选择到合适的耦合函数参数满足式(15), 使得系数矩阵的特征值具有负实部

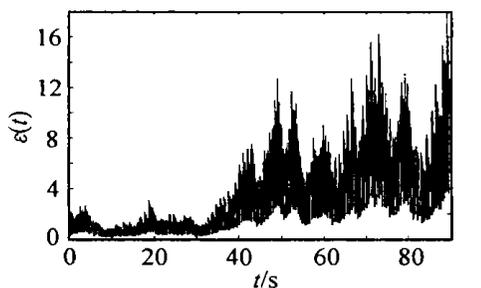
当 $\alpha = 0$ 为 Lorenz 系统, 选择参数为 $a = 9.95, b = 2, c = 2.6167$; 当 $\alpha = 0.8$ 为 Lü 系统, 选择参数 $a = 35.95, b = 2, c = 2.95$; 当 $\alpha = 1$ 为 Chen 系统, 选择参数 $a = 34.95, b = 2, c = 2.95$ 仿真结果如图 2 所示 可以看出, 驱动-响应系统的混沌吸引子, 随着时间的变化, 两个混沌系统失去了同步, 且随着时间延长, 其误差越来越大



(a) Lorenz 系统



(b) Lü系统



(c) Chen 系统

图 2 混沌系统同步失去时的全局误差

3 结 语

本文讨论了非线性耦合的两个统一混沌系统同步时的参数选择问题。利用线性时变系统的稳定性理论分析其耦合混沌系统的误差系统稳定性,给出了耦合函数参数的选择范围,从而实现了两个耦合混沌系统的全局渐近同步。但是,运用线性定常系统的 Routh-Hurwitz 稳定判据来确定两个混沌系统的误差系统稳定性时,即使其系数矩阵的瞬间特征值具有负实部,并不能确保两个相同的混沌系统具有

高质量的完全同步。该分析方法可适用于其他混沌系统的同步和控制,如 Rossler, Chua 等,从而说明了该分析方法的有效性与普适性。

参考文献 (References)

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in Chaotic Systems[J]. *Physical Review Letters*, 1990, 64(4): 821-824.
- [2] Wang C, Ge S S. Adaptive Synchronization of Uncertain Chaotic Systems via Backstepping Design[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2001, 12(6): 1199-1206.
- [3] Agiza H N, Yassen M T. Synchronization of Rossler and Chen Chaotic Dynamical Systems Using Active Control[J]. *Physics Letters A*, 2001, 278(1): 191-197.
- [4] Yassen M T. Chaos Synchronization Between Two Different Chaotic Systems Using Active Control[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 23(1): 131-140.
- [5] Lü J H, Zhou T S, Zhou S C. Chaos Synchronization Between Two Different Chaotic Systems[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2002, 14(4): 529-541.
- [6] Park J H. Stability Criterion for Synchronization Linearly Coupled the Unified Chaotic Systems[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 23(1): 79-85.
- [7] 胡岗, 萧井华, 郑志刚. *混沌控制*[M]. 上海: 上海科技出版社, 2000.
(Hu G, Xiao J H, Zheng Z G. *Chaos Control* [M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 2000.)
- [8] 刘永清, 宋中昆. *大型动力系统的理论与应用——分解、稳定与结构*[M]. 广州: 华南工学院出版社, 1988.
(Liu Y Q, Song Z K. *Theory and Application of Large-scale Dynamic Systems: Decomposition Stability and Structure* [M]. Guangzhou: The South China Institute of Technology Press, 1988.)
- [9] Corron N J. Loss of Synchronization in Coupled Oscillators with Ubiquitous Local Stability[J]. *Physical Review E*, 2001, 63(4): 5203-5207.
- [10] Yanchuk S, Maistrenko Y, Mosekilde E. Loss of Synchronization in Coupled Rossler Systems[J]. *Physics D*, 2001, 154(1): 26-42.

(上接第 1341 页)

- [7] 盛戈侠, 涂光瑜, 罗毅, 等. 基于多 Agent 的二级电压控制系统[J]. *电力系统自动化*, 2002, 26(5): 9-14.
(Sheng G H, Tu G Y, Luo Y, et al. Study on MAS-based Secondary Voltage Control System [J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2002, 26(5): 9-14.)

- [8] 赵彩虹, 马晓光. 基于遗传算法的局部电压分域新方法[J]. *电网技术*, 2002, 26(9): 47-50.
(Zhao C H, Ma X G. A Novel Method to Form Partial Voltage Regions Based on Generic Algorithm [J]. *Power System Technology*, 2002, 26(9): 47-50.)