

文章编号: 1001-0920(2005)12-1350-05

矩阵二阶系统的鲁棒极点配置

武云丽, 段广仁

(哈尔滨工业大学 控制理论与制导技术中心, 哈尔滨 150001)

摘 要: 直接在矩阵二阶框架下, 利用特征结构配置参数化方法, 研究矩阵二阶线性系统的鲁棒极点配置问题。将两种测量闭环特征值灵敏度方法有机地结合起来, 给出一个新的优化性能指标, 此指标的优化过程完全依赖于特征结构配置中的设计自由度。为进一步提高闭环系统的鲁棒稳定性, 闭环极点也作为设计自由度的一部分参与优化。数值例子分析结果表明了该方法的有效性。

关键词: 特征值灵敏度; 鲁棒极点配置; 矩阵二阶线性系统; 特征结构配置

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Robust Pole Assignment in Matrix Second-order Linear Systems

WU Yun-li, DUAN Guang-ren

(Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China
Correspondent: WU Yun-li, Email: wuyunli@hit.edu.cn)

Abstract: Robust pole assignment of matrix second-order linear systems is investigated directly in the matrix second order framework via a complete parametric eigenstructure assignment approach. Based on the combination of the two measurement approaches for closed-loop eigenvalue sensitivities, an optimized performance index is proposed. Due to the advantages of the eigenstructure assignment result, the optimized procedures of the performance index are totally dependent on design degrees of freedom provided in eigenstructure assignment. Also the closed-loop eigenvalues may be easily taken as a part of the design parameters and optimized within certain desired fields on the complex plane to improve robustness. Finally, an example of mass-spring system shows the effect of the proposed approach.

Key words: Eigenvalue sensitivity; Robust pole assignment; Matrix second-order linear system; Eigenstructure assignment

1 引 言

矩阵二阶系统的应用领域十分广泛, 例如, 振动和结构的分析、弹性连杆机构、航空航天控制、车辆主动悬架和机器人控制等, 因此得到了国内外学者的广泛关注及研究^[1-5]。这些研究主要集中在分析系统镇定性^[2]、特征结构配置^[3,4]以及能控性和能观性理论^[5]。关于矩阵二阶系统鲁棒极点配置问题的研究却不多见^[6,7]。文献[6]基于 SVD 方法求解二阶系统的特征结构配置问题, 并利用文献[8]提出的测量特征值灵敏度方法来研究其鲁棒性。文献[7]提出

一种新的测量特征值灵敏度方法, 在此基础上求解矩阵二阶线性系统的鲁棒特征结构配置问题。正如文献[9,10]指出, 鲁棒极点配置与特征结构配置关系非常密切, 具体来讲, 闭环特征值灵敏度的测量方法通常是由特征结构配置提供的闭环特征向量集决定的, 而它又是鲁棒极点配置设计中必不可少的部分。

本文直接在矩阵二阶框架下提出了矩阵二阶系统的特征结构配置参数化方法, 将文献[7]和[8]分别提出的两种测量闭环特征值灵敏度的方法结合起

收稿日期: 2004-12-07; 修回日期: 2005-03-21

基金项目: 国家自然科学基金项目(69925308)。

作者简介: 武云丽(1977—), 女, 辽宁人, 博士生, 从事鲁棒控制、特征结构配置等研究; 段广仁(1962—), 男, 黑龙江桦川人, 教授, 博士生导师, 从事线性系统的特征结构配置理论和鲁棒控制理论及其应用等研究。

来, 设计系统的鲁棒极点配置问题, 并给出了相应的算法. 该方法具有以下 3 个特点:

- 1) 算法简单, 并按顺序进行, 无需“返回”步骤;
- 2) 特征值可以容易地作为设计参数的一部分, 并在给定的复平面上期望区间内参与优化, 以提高鲁棒稳定性;
- 3) 对于整个鲁棒极点配置问题的优化求解只依赖于由设计参数表示的最小值求解问题

2 问题的描述

考虑矩阵二阶系统

$$M \ddot{q}(t) + D \dot{q}(t) + K q(t) = B u(t), \quad (1)$$

其中: $q \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量; $u \in \mathbf{R}^r$ 是控制输入向量; M, D, K 和 B 是相应的系数矩阵, 且 B 和 M 为满秩矩阵. 系统(1) 满足如下假设:

假设 1 $\text{rank}[M s^2 + D s + K \ B] = n, \forall s \in \mathbf{C}^+$.

通过为系统(1) 构建比例微分反馈控制器

$$u = -K_1 \dot{q} - K_2 q, \quad (2)$$

可得闭环系统

$$M \ddot{q}(t) + D_c \dot{q}(t) + K_c q(t) = 0, \quad (3a)$$

其中

$$D_c = D + B K_1, K_c = K + B K_2 \quad (3b)$$

问题 RPA: 给定系统(1) 满足假设 1, 以及一组复平面稳定区域 $\Omega_i, i = 1, 2, \dots, 2n$, 寻找一个形如式(3) 的比例微分反馈控制器满足以下要求:

- 1) 闭环系统(3) 的特征值 $s_i (i = 1, 2, \dots, 2n)$ 在给定的区域内, 即 $s_i \in \Omega_i, i = 1, 2, \dots, 2n$;
- 2) 闭环特征值 $s_i (i = 1, 2, \dots, 2n)$ 受闭环系统矩阵 M, D_c 和 K_c 中的扰动影响最小

注 1 $s_i \in \Omega_i, i = 1, 2, \dots, 2n$ 是对闭环的稳定性和其他性能的要求. 对于实数闭环特征值 s_i , 区域 Ω_i 可选为 $[a_i, b_i]$, 其中 $b_i < 0$. 对于一对复特征值 s_i 和 s_j , 区域 Ω_i 和 Ω_j 可选为

$$\Omega_i = \{s_i = \sigma_i + \sigma_i i \mid \sigma_i \in [a_i, b_i], \sigma_i \in [a_i, b_i], b_i < 0\}, \quad (4a)$$

$$\Omega_j = \{s_j = \sigma_j - \sigma_j i \mid \sigma_j \in [a_i, b_i], \sigma_j \in [a_i, b_i], b_i < 0\}. \quad (4b)$$

3 主要结果

首先通过对闭环系统(3) 进行特征结构配置, 给出比例微分反馈矩阵 K_1 和 K_2 的参数化形式; 然后, 将文献[7, 8] 提出的测量闭环特征值灵敏度的两种方法结合起来, 求解本文提出的鲁棒极点配置问题

3.1 矩阵二阶系统的闭环特征结构配置

由于非退化矩阵具有较低的特征值灵敏度^[8],

本文提出的闭环系统(3) 的特征值集合为

$$\Gamma = \{s_i, i = 1, 2, \dots, 2n, s_i \bar{s}_j, i \neq j\}. \quad (5)$$

那么, 将存在一个行满秩矩阵 $V \in \mathbf{C}^{n \times 2n}$ 使得下式成立:

$$M V \Lambda^2 + (D + B K_1) V \Lambda + (K + B K_2) V = 0, \quad (6)$$

其中 $\Lambda = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_{2n})$. 显然, 矩阵 V 是闭环系统(3) 的特征向量矩阵, 其第 i 列 v_i 对应着相应的闭环特征值 s_i . 经整理, 式(6) 可写成如下形式:

$$M V \Lambda^2 + D V \Lambda + K V + B Z = 0, \quad (7a)$$

其中

$$Z = K_1 V \Lambda + K_2 V. \quad (7b)$$

另一方面, 通过对下式进行右分解:

$$G(s) = (s^2 M + D s + K)^{-1} B,$$

可得一对实系数多项式矩阵 $N(s) \in \mathbf{R}^{n \times r}[s]$ 和 $D(s) \in \mathbf{R}^{r \times r}[s]$, 且满足

$$(s^2 M + D s + K)^{-1} B = -N(s) D^{-1}(s). \quad (8)$$

定理 1 给定系统(1) 满足假设 1, 令 $N(s)$

$\in \mathbf{R}^{n \times r}[s]$ 和 $D(s) \in \mathbf{R}^{r \times r}[s]$ 是一对满足右分解(8) 的多项式矩阵, 则:

- 1) 存在一组互异自共轭复数 $s_i, i = 1, 2, \dots, 2n$, 行满秩矩阵 $V \in \mathbf{C}^{n \times 2n}$, 实矩阵 $K_1 \in \mathbf{R}^{r \times n}$ 和 $K_2 \in \mathbf{R}^{r \times n}$, 满足式(7), 当且仅当存在一组参数向量 $f_i \in \mathbf{C}^r (i = 1, 2, \dots, 2n)$ 满足以下约束:

约束 C1 $f_i = \bar{f}_j$ if $s_i = \bar{s}_j$;

约束 C2 $\det \tilde{V} \neq 0$, 其中

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} N(s_1) f_1 & N(s_2) f_2 & \dots & N(s_{2n}) f_{2n} \\ s_1 N(s_1) f_1 & s_2 N(s_2) f_2 & \dots & s_{2n} N(s_{2n}) f_{2n} \end{bmatrix}.$$

- 2) 当以上条件满足, 矩阵 V 由下式给出:

$$V = [N(s_1) f_1 \ N(s_2) f_2 \ \dots \ N(s_{2n}) f_{2n}], \quad (9)$$

且相应的增益矩阵 K_1 和 K_2 为

$$[K_2 \ K_1] = Z \tilde{V}^{-1}, \quad (10)$$

其中

$$Z = [D(s_1) f_1 \ D(s_2) f_2 \ \dots \ D(s_{2n}) f_{2n}], \quad (11)$$

$f_i, i = 1, 2, \dots, 2n$, 是一组同时满足约束 C1 和 C2 的设计参数向量

证明 令

$$V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{2n}], \quad (12)$$

$$Z = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{2n}], \quad (13)$$

则式(7a) 可转化成

$$(s_i^2 M + s_i D + K) v_i + B z_i = 0, i = 1, 2, \dots, 2n. \quad (14)$$

另外, 由式(8) 可得

$$(s_i^2 M + s_i D + K) N(s_i) + B D(s_i) = 0, \quad (15)$$

这样可以令

$$\begin{bmatrix} v_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(s_i) \\ D(s_i) \end{bmatrix} f_i, i = 1, 2, \dots, 2n, \quad (16)$$

从而利用(15)和(16),有

$$\begin{aligned} (s^2M + sD + K)v_i + Bz_i = \\ [(s^2M + sD + K)N(s_i) + BD(s_i)]f_i = 0, \\ i = 1, 2, \dots, 2n. \end{aligned}$$

因此,对所有的 $f_i \in C^r, i = 1, 2, \dots, 2n$, 由式(9)和(11)给出的矩阵 V 和 Z 满足式(7a), 再利用式(7b), 很容易得出式(10).

3.2 求解问题 RPA

在求解此问题之前, 首先介绍下面两种测量闭环特征值灵敏度的方法

第1种方法是根据文献[8]而来, 即通过优化下面的目标函数给出测量闭环特征值灵敏度方式:

$$\Phi(\tilde{V}) = \tilde{V}^{-2} \tilde{V}^{-1}, \quad (17)$$

其中矩阵 \tilde{V} 已由定理1给出. 另外, 在文献[7]的基础上, 导出如下闭环系统特征值灵敏度测量方法:

引理1 已知闭环系统(3), Γ 为一组闭环特征值集合并由式(4)给出, V 为满足式(6)的闭环系统右特征向量矩阵, 并令

$$W^H = [V^T \Lambda^T V^T]^{-1} [0 \ I]^T M^{-1}, \quad (18)$$

则对应闭环特征值 $s_i (i = 1, 2, \dots, 2n)$ 的条件数由下式给出:

$$c_i = \frac{\alpha |w_i - 2 v_i - 2|}{|w_i^H (2M s_i - D_c) v_i|}, i = 1, 2, \dots, 2n. \quad (19)$$

其中: $\alpha = (|s_i|^4 + |s_i|^2 + 1)^{1/2}; v_i$ 和 w_i 分别是矩阵 V 和 W 的列向量

第2种方法是利用引理1中的条件数, 通过优化以下目标函数来实现的:

$$\Theta = \sum_{i=1}^{2n} \gamma_i c_i^2 \quad (20)$$

在本文求解问题 RPA 中的一个要求是确保闭环特征值在给定的区域内, 即 $s_i \in \Omega_i, i = 1, 2, \dots, 2n$, 这是非常容易实现的. 另一个要求可以通过优化目标函数

$$J = J(s_i, f_i, i = 1, 2, \dots, 2n) = \sum_{i=1}^{2n} \gamma_i c_i^2 + \xi \tilde{V}^{-2} \tilde{V}^{-1} \quad (21)$$

来实现, 其中: $c_i (i = 1, 2, \dots, 2n)$ 由式(19)给出; \tilde{V} 由定理1给出; $\gamma_i (i = 1, 2, \dots, 2n)$ 和 ξ 代表加权因子, 为正实数.

此目标函数是将以上两种测量特征值灵敏度的方法结合起来的.

由定理1可知, 闭环特征结构中存在的来自

度实际上包含两部分, 即闭环特征值 $s_i (i = 1, 2, \dots, 2n)$ 和满足约束 C1 和 C2 的参数向量组 $f_i (i = 1, 2, \dots, 2n)$. 为进一步简化约束 C1, 可以利用两组实变量 σ_i 和 g_i 来代替变量 s_i 和 $f_i, i = 1, 2, \dots, 2n$, 即:

1) 对于实特征值 s_k , 可用 σ_k 代替, 为之选择相应的参数向量为 $f_k = g_k$, 其对应的区域为 $\Omega_k = [a_k, b_k]$;

2) 对于共轭特征值 s_i 和 s_i , 可用 $s_i = \bar{s}_i = \sigma_i + \sigma_i i$ 代替, 为之选取的参数向量 $f_i = \bar{f}_i = g_i + g_i i$, 其对应的区域为式(4)给出的 Ω_i 和 Ω_i

于是, 问题 RPA 可转化成最小问题

$$\begin{cases} \min_{\{\sigma_i, g_i\}} J(\sigma_i, g_i, i = 1, 2, \dots, 2n), \\ \text{s.t. } a_i \leq \sigma_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, 2n; \\ \text{约束 C2} \end{cases} \quad (22)$$

基于定理1给出的结果和上述分析, 下面给出求解问题 RPA 的算法:

1) 求解满足式(8)的右多项式矩阵 $N(s)$ 和 $D(s)$, 并给出 V, \tilde{V}, Z 和 W 的参数表达式;

2) 通过求解最小问题(22)获得优化设计参数 σ_i, g_i 或 $s_i, f_i, i = 1, 2, \dots, 2n$;

3) 利用第2步获得的参数, 再根据式(10)计算反馈增益矩阵 K_1 和 K_2

显然, 上述算法是按顺序实现的, 这里不包含“返回”程序. 由于本文的特征结构配置方法具有完整性, 所以通过算法 RPA 获得的鲁棒极点配置的优化解完全依赖于对优化问题(22)的求解

4 数值例子

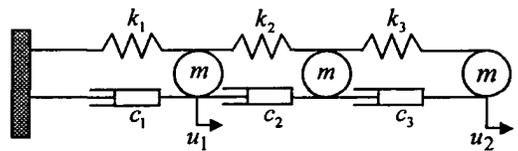


图1 质量-弹簧-阻尼系统

考虑如图1所示的一个简单质量-弹簧-阻尼的线性动态系统^[4], 其中 $c_1 = c_3 = 2, c_2 = 0.5, k_1 = k_2 = 5, k_3 = 20, m = 1$, 其形如式(1)的运动方程的系数矩阵为 $M = \text{diag}(1, 1, 1)$,

$$D = \begin{bmatrix} 2.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 2.5 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 25 & -20 \\ 0 & -20 & 20 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

利用文献[9, 10]给出的方法求出多项式矩阵

$$N(s) = \begin{bmatrix} -2s - 20 & 0 \\ 0 & -2s - 20 \end{bmatrix},$$

$$D(s) = \begin{bmatrix} 2s^3 + 25s^2 + 70s + 200 \\ -0.5s^3 - 6s^2 - 20s - 100 \\ -s^2 - 20s - 100 \\ s^4 + 4.5s^3 + 46s^2 + 20s + 100 \end{bmatrix}.$$

4.1 计算结果

首先确定闭环特征值的限制区域为

$$\Omega_1 = [-1, -0.5], \Omega_2 = [-2.5, -1],$$

$$\Omega_3 = [-2.5, -1], \Omega_4 = [-4, -2],$$

$$\Omega_5 = [-5.5, -3], \Omega_6 = [-6.5, -4];$$

然后, 分别对 3.2 节中给出的 3 种目标函数进行优化; 最后通过比较来分析求得的结果

情况 1 优化目标函数 (17), 求得的闭环特征值为

$$s_i = [-0.500\ 000 \quad -1.290\ 157 \quad -1.290\ 160 \\ -3.983\ 619 \quad -3.983\ 602 \quad -6.500\ 000],$$

相应的增益矩阵 K_1 和 K_2 分别为

$$K_1 = \begin{bmatrix} 3.038\ 010 & -1.768\ 749 & 1.056\ 946 \\ 1.058\ 935 & -7.077\ 729 & 7.509\ 528 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -4.273\ 901 & 0.750\ 564 & 2.346\ 415 \\ 2.358\ 782 & 2.945\ 965 & -5.425\ 354 \end{bmatrix}.$$

情况 2 给定 $\gamma_i = 1, i = 1, 2, \dots, 6$, 优化目标函数 (20), 求得的闭环特征值为

$$s_i = [-0.532\ 357 \quad -2.499\ 074 \quad -2.499\ 490 \\ -2.499\ 127 \quad -4.031\ 474 \quad -4.000\ 144],$$

则相应的增益矩阵 K_1 和 K_2 分别为

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.158\ 365 & 1.260\ 959 & -1.763\ 189 \\ 1.506\ 041 & -5.161\ 501 & 8.903\ 300 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -11.154\ 535 & 17.246\ 049 & -10.641\ 230 \\ 5.488\ 811 & -9.395\ 254 & 7.903\ 151 \end{bmatrix}.$$

情况 3 给定 $\gamma_i = 1, i = 1, 2, \dots, 6$ 和 $\xi = 2$, 优化目标函数 (22), 求得闭环特征值为

$$s_i = [-0.500\ 000 \quad -1.292\ 530 \quad -1.000\ 000 \\ -2.000\ 000 \quad -3.984\ 926 \quad -6.500\ 000]$$

则相应的增益矩阵 K_1 和 K_2 分别为

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.898\ 594 & -1.769\ 211 & 1.594\ 380 \\ 1.594\ 713 & -7.077\ 906 & 7.378\ 862 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -7.244\ 508 & 0.731\ 157 & 3.101\ 971 \\ 3.103\ 525 & 2.917\ 183 & -5.585\ 887 \end{bmatrix}.$$

4.2 结果分析

表 1 列出了 K_1, K_2 和 $\Phi(\tilde{V})$ 的矩阵 2-范数, 显然, 除了结果 2 中的 $\Phi(\tilde{V})_2$ 非常大之外, 其他的数值都是合理的. 表 2 列出了各个闭环特征值的灵敏度 $c_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 及向量 c 的 2-范数, 这里

$$c = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5 \quad c_6]$$

表 3 给出了实际求得的闭环特征值 $s_i', i = 1, 2, \dots, 6$; 数值 σ 代表实际闭环特征值与其相应的标称值之间偏差总和, 其定义为

$$\sigma = \left[\sum_{i=1}^6 (s_i - s_i')^2 \right]^{1/2}.$$

为测试出结果的鲁棒性, 给系数矩阵 M, D 和 K 中分别加入下列扰动:

$$\Delta M = 0.005k \cdot \text{randn}(\text{size}(M)),$$

$$\Delta D = 0.005k \cdot \text{randn}(\text{size}(D)),$$

$$\Delta K = 0.005k \cdot \text{randn}(\text{size}(K)),$$

其中: randn 是 Matlab 中的一个命令, $\text{randn}(\text{size}(A))$ 返回一个与矩阵 A 的维数相同的随机矩阵, 此随机矩阵中的各元素都服从 $(0, 1)$ 的正态分布. 把每个结果都应用到这个受扰系统中, 然后根据每个 k , 可以获得相应的受扰闭环系统的特征值 $s_i(k), i = 1, 2, \dots, 6$. 对于每个结果都计算数值

$$d_i = \left[\sum_{k=1}^{20} [\text{Re}(s_i(k) - s_i)]^2 \right]^{1/2} / 20,$$

$$i = 1, 2, \dots, 6,$$

和

$$d = \left[\sum_{i=1}^6 d_i^2 \right]^{1/2} / 6$$

注 2 由于本文用随机矩阵表示开环系统矩阵中的扰动, 所以每次进行鲁棒性测试, 在表 4 中就会得到不同的数值, 但这些数值间的相对关系基本保持一致

对表 1 ~ 表 4 进行观察, 可给出下述描述:

1) 表 3 和表 4 中数值之间的相对关系清楚地表明, 优化性能指标 (21) 所得的结果要好于单独优化其中任何一个性能指标 (17) 或 (20). 另外, 适当地调整式 (21) 中的加权系数 $\gamma_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 和 ξ , 会得到更好的结果

2) 情况 1 是对指标 (17) 进行优化, 得到一个最小的 $\Phi(\tilde{V})_2$ 值, 但同时却得到一个很大的 c_2 值; 情况 2 是对指标 (20) 进行优化, 得到一个相当大的 $\Phi(\tilde{V})_2$ 值, 但同时得到一个最小的 c_2 值; 而情况 3 是对指标 (21) 进行优化, 同时得到相对较小的 $\Phi(\tilde{V})_2$ 和 c_2 , 由此同样能得出 1) 中的结论

3) 表 3 从另一方面反映了闭环系统的鲁棒性,

表 1 结果的幅值

Solutions	K_1_2	K_2_2	$\Phi(\tilde{V})_2$
1	10.640.801	7.534.151	163.113.080
2	10.613.651	26.685.039	5.071.92e+ 007
3	10.643.372	9.696.439	163.113.666

表2 特征值灵敏度

Solutions	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
1	0.4708	0.6645	1.2348	20.9097	1.9478	2.6531	21.2189
2	0.3564	0.6875	0.6853	0.6878	1.1305	1.1200	2.0186
3	0.4705	0.5373	0.3464	0.6546	1.6582	2.6521	3.2927

表3 实际的闭环特征值

Solutions	s_1'	s_2'	s_3'	s_4'	s_5'	s_6'	σ
1	-6.500000	-3.983619	-3.983602	-1.290160	-1.290157	-0.500000	3.848e-007
2	-4.031551	-4.000065	-2.500411	-2.499408	-2.497874	-0.532357	0.001542
3	-6.500000	-3.984926	-2.000000	-1.292530	-1.000000	-0.500000	2.919e-007

表4 鲁棒性的测试结果

Solutions	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d
1	0.04374	0.02787	0.02704	0.01040	0.00626	0.00383	0.00998
2	0.11878	0.12463	0.07957	0.03938	0.07678	0.00076	0.03473
3	0.02410	0.00748	0.00884	0.00670	0.00300	0.00304	0.00667

即它给出了闭环特征值相对反馈增益 L , K_1 和 K_2 的切断误差间的精确值。事实上可将这些切断误差视为反馈增益阵中的扰动。从表3中的 σ 和表4中的 d 可以得出一致的鲁棒稳定性结果,即对于那些具有较强鲁棒性的闭环系统,由切断误差造成的特征值偏移也较小。

5 结 语

基于矩阵二阶线性系统的特征结构参数化方法以及两种测量特征值灵敏度方法的有机结合,给出了一个设计鲁棒极点配置的优化算法,并以质量-弹簧系统为例,通过对测试结果研究分析,表明该方法是有用的且很实用。

参考文献(References)

- [1] Kwak S K, Yedavalli R K. Observer Designs in Matrix Second-order System Framework: Measurement Conditions and Perspectives [A]. *Proc of the American Control Conf* [C]. Chicago, 2000: 2316-2320.
- [2] Divekar A M, Yedavalli R K. Stability of Matrix Second Order Systems: New Conditions and Perspectives [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(9): 1773-1777.
- [3] 王国胜, 段广仁. 二阶动力学系统输出反馈特征结构配置[J]. *系统工程与电子技术*, 2004, 26(8): 1080-1083.

[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2004, 26(8): 1080-1083.

- [4] Duan G R, Liu G P. Complete Parametric Approach for Eigenstructure Assignment in a Class of Second-order Linear Systems [J]. *Automatica*, 2002, 38(4): 725-729.
- [5] Grigoriadis K M, Skelton R E. Integrated Structural and Control Design for Vector Second-order Systems Via LMIs [A]. *Proc of the American Control Conf* [C]. Philadelphia, 1998: 1625-1629.
- [6] Chu E K. Pole Assignment for Second-order Systems [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2002, 16(1): 39-59.
- [7] Nichols N K, Kautsky J. Robust Eigenstructure Assignment in Quadratic Matrix Polynomials: Nonsingular Case [J]. *SIAM on Matrix Analysis and Applications*, 2001, 23(1): 77-102.
- [8] Kautsky J, Nichols N K, Van Dooren P. Robust Pole Assignment in linear State Feedback [J]. *Int J of Control*, 1985, 41(12): 1129-1155.
- [9] Duan G R, Patton R J. Robust Pole Assignment in Descriptor Systems Via Proportional Plus Partial Derivative State Feedback [J]. *Int J of Control*, 1999, 72(13): 1193-1203.
- [10] Duan G R. Two Parametric Approaches for Eigenstructure Assignment in Second-order Linear Systems [J]. *J of Control Theory and Applications*, 2003, 1(1): 59-64.