

文章编号: 1001-0920(2005)02-0170-04

多目标优化问题的蚁群算法研究

张勇德, 黄莎白

(中国科学院 沈阳自动化研究所, 辽宁 沈阳 110015)

摘要: 将离散空间问题求解的蚁群算法引入连续空间, 针对多目标优化问题的特点, 提出一种用于求解带有约束条件的多目标函数优化问题的蚁群算法。该方法定义了连续空间中信息量的留存方式和蚂蚁的行走策略, 并将信息素交流和基于全局最优经验指导两种寻优方式相结合, 用以加速算法收敛和维持群体的多样性。通过 3 组基准函数来测试算法性能, 并与 NSGA II 算法进行了仿真比较。实验表明该方法搜索效率高, 向真实 Pareto 前沿逼近的效果好, 获得的解的散布范围广, 是一种求解多目标优化问题的有效方法。

关键词: 蚁群算法; 约束多目标优化; 连续空间寻优

中图分类号: TP18 **文献标识码:** A

On ant colony algorithm for solving multiobjective optimization problems

ZHANG Yong-de, HUANG Sha-bai

(Shenyang Institute of Automation, the Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Shenyang 110015, China Correspondent: ZHANG Yong-de, E-mail: c3i8@msia.ac.cn)

Abstract: The ant colony algorithm (ACA) that is often applied to discrete space optimization problems is introduced into continuous space to solve constrained multiobjective optimization problems. The new pheromone remaining process and walking strategy of ants are described. In addition, combined with the searching strategy based on global best experience, this approach guides the ants to search better solutions. The approach is validated using several benchmark cases. The simulation results show that the approach possesses high searching efficiency and can efficiently find multiple Pareto optimal solutions.

Key words: ant colony algorithm; constrained multiobjective optimization; continuous space optimization

1 引言

在科学与工程实践中, 很多现实设计与决策问题都涉及到带有多个约束条件的多个目标的同时优化。

在求解多目标优化问题(MOP)时, 由于各个目标之间往往是相互冲突的, 往往不存在能满足所有约束条件, 且使所有目标函数都能达到全局最优的解, 而是存在一组 Pareto 最优解。

近几年来, 随着进化算法(EA)、粒子群优化(PSO)、蚁群算法(ACA)等智能优化方法在机器学习、过程控制、经济预测、工程优化等领域取得的成

功, 如何应用这些方法来求解复杂的带有多个约束条件的多目标优化问题成为该领域研究的热点。这些基于种群的智能优化方法具有较高的并行性, 尤其在求解多目标问题时, 一次运行可以求得多个 Pareto 最优解, 具有单目标优化方法不可比拟的优势。

蚁群算法^[1](ACA)是近几年提出的一种新型模拟进化算法。目前运用这种方法已成功解决了旅行商(TSP)问题^[2]、Job-shop 调度问题^[3]、二次指派问题^[4]等组合优化问题, 显示出蚁群算法解决这类问题的优越性。蚁群算法的生物学背景决定了它

收稿日期: 2004-04-12; 修回日期: 2004-06-21

作者简介: 张勇德(1977—), 男, 山西大同人, 博士生, 从事智能计算、建模与决策的研究; 黄莎白(1939—), 女, 上海人, 研究员, 博士生导师, 从事模式识别、智能决策等研究。

适合于求解离散空间中的组合优化问题,但在求解多目标函数优化问题时存在一些困难

首先,多目标函数优化问题是在连续空间中进行寻优,解空间以区域表示,而不以离散的点集表示,蚂蚁在每一阶段可选的路径不再是有限的,这给蚂蚁在信息素的驻留和基于信息素的寻优上造成了困难。为解决这一问题,文献[5]提出一种连续蚁群算法,它先使用遗传算法对解空间进行全局搜索,然后运用蚁群算法对得到的结果进行局部优化;[6]修改了蚂蚁信息素的留存方式和行走规则,运用信息素交流和直接通讯两种方式来指导蚂蚁寻优;[7]将搜索空间划分为若干子域,根据信息量确定解所在的子域,在该子域内寻找解,取得了满意的结果。然而这些研究都只是针对单目标函数优化问题,而运用蚁群算法求解多目标函数优化问题的研究目前还很少见。

其次,多目标优化问题由于解的多样性,不仅要求所得的解能够收敛到 Pareto 前沿,而且要有效地保持群体的多样性。而在基本蚁群算法中,信息素浓度越高的地方,蚂蚁选择作为寻优路径的概率越大。在求解多目标优化问题时,蚂蚁之间的这种信息素交流方式,会使所求得解集中在解空间的某一区域内,不利于群体多样性的保持。

本文针对这些问题,提出一种用来求解带有约束条件的多目标函数优化问题的蚁群算法。此外,还提出一种基于最优经验的寻优方式,将当前发现的所有非支配解保存起来,进而用这些解来指导蚂蚁朝着散布较为稀疏的区域进行寻优,保证解的分布性能。经过一系列算例测试,证明算法效果良好。

2 基于蚁群算法的多目标优化

本文假设蚂蚁只在它所处的位置上释放信息素,这些留有信息素的位置可以被蚁群中所有的蚂蚁察觉,而且蚂蚁根据信息素量的多少以及他们之间的距离来选择下一步的觅食方向。蚂蚁所释放信息素的量与其所表示的解的优劣成正比,而多目标优化问题由于其解的多样性,不存在绝对的最优解,不容易比较解的改进程度。为此,本文通过比较解之间的 Pareto 支配关系来决定蚂蚁所释放的信息素的多少。同时,蚂蚁在觅食过程中不断更新自己的位置,即便发现了一个较优解,也会在下次移动中将此解丢失。为此,提出一种基于最优经验的寻优方式,即将当前发现的所有非支配解保存起来,进而用这些解来指导蚂蚁寻优。蚂蚁在寻优过程中除了受到同伴遗留的信息素的影响外,还受到整个蚁群的最

优经验的影响,蚂蚁在二者的作用下完成寻优任务。

2.1 基于信息素交流的寻优方式

在多目标优化问题中,没有绝对的最优解,解的优劣是相对的。对于要选择移动方向的蚂蚁 i ,比较其与蚁群中各只蚂蚁所表示的解的 Pareto 支配关系。这种 Pareto 支配关系决定了同伴在它们所处位置上所释放的信息素的浓度。如果蚁群中蚂蚁 j ($j = 1, 2, \dots, N$, N 为蚁群规模) 表示的解 x_j 为非可行解,则说明蚂蚁 j 所在的位置对于寻优没有帮助,故释放很少的信息素。如果 x_j 为可行解且支配 x_i ,则说明选 x_j 作为寻优方向,有利于算法朝着 Pareto 前沿或者可行解的方向进化。因此,蚂蚁 j 在其所处的位置上大量释放信息素,以吸引蚂蚁 i 前来寻优。按照这一想法,蚁群中蚂蚁 j 在其所处位置上释放的信息素浓度 θ_j 定义如下:

$$\theta_j = \begin{cases} \lambda_1, & x_j \text{ 为非可行解;} \\ \lambda_2, & x_j \text{ 为可行解且 } x_i < x_j; \\ \lambda_3, & x_j \text{ 为可行解且 } x_i \text{ 与} \\ & x_j \text{ 为非约束支配关系;} \\ \lambda_4, & x_j \text{ 为可行解且 } x_j < x_i \end{cases} \quad (1)$$

其中: $i, j = 1, 2, \dots, N$, $i \neq j, N$ 为蚁群规模; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 为 4 个参数,且 $\lambda_1 > \lambda_3 > \lambda_2 > \lambda_4$ 。蚂蚁 i 的寻优方向与蚁群中其他蚂蚁所处位置的信息素浓度以及距离有关。信息素浓度越大,与当前蚂蚁 i 的距离越近,被选为蚂蚁 i 寻优方向的概率越大。其寻优概率的定义如下:

$$P_j = \frac{\theta_j \delta_{ij}}{\sum_{j=1}^N \theta_j \delta_{ij}}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

其中: $\delta_{ij} = 1/d_{ij}$, d_{ij} 为当前蚂蚁 i 与蚂蚁 j 之间的距离。

依照轮盘赌的方式,被选中的蚂蚁 j 所在的位置作为当前蚂蚁 i 的寻优方向。

2.2 基于全局最优经验指导的寻优方式

仅依靠蚂蚁之间信息素的交流来进行寻优的方式,算法搜索需要的时间长,且群体的多样性不易保持。本文提出另一种寻优方式,即在全局最优经验指导下进行寻优。在算法中,设立一个外部集合 BP,用来保存整个蚁群当前所发现的所有非支配解。在集合 BP 中寻找散布最为稀疏的非支配解,它所在的位置即为当前蚂蚁的寻优方向。

假设当前集合 BP 中有 p 个非支配解 $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, 计算每个解到其他解的距离

$$d_{ij} = \sqrt{\sum_{t=1}^k (f_t(x_i) - f_t(x_j))^2}. \quad (3)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, p, i \neq j$ 。计算共享

函数值

$$S(d_{ij}) = \begin{cases} 1 - d_{ij}/\sigma_{share}, & d_{ij} < \sigma_{share}; \\ 0, & d_{ij} \geq \sigma_{share} \end{cases} \quad (4)$$

这里 σ_{share} 为小生境半径 对非支配解 i 求其小生境数

$$niche(i) = \sum_{j=1}^p S(d_{ij}), i = 1, 2, \dots, p, i \neq j. \quad (5)$$

小生境数 $niche(i)$ 最小的非支配解 i 所在的位置就是当前蚂蚁的寻优方向

2.3 蚂蚁行进策略

在离散空间优化问题中, 蚂蚁的行进是通过在离散解空间点集上的跳变实现的, 即从解空间中的一个节点直接转移到另一个节点 这种行进方式对于连续空间的寻优问题来说显然是不合适的 本文为蚂蚁定义了一个活动范围 r , 规定蚂蚁只能在半径为 r 的范围内活动 如果蚂蚁与目标点之间的距离大于其活动范围 r , 则蚂蚁只能朝着目标点的方向移动长度为 r 的一段距离 值得注意的是, 蚂蚁在移动后, 并不能直接到达目标点, 还要受到一个随机扰动 φ 的影响 扰动因子 φ 的值对算法的收敛有一定的影响, 较大的 φ 值有利于增大搜索范围, 而较小的 φ 值有利于局部寻优 因此本文在算法的开始阶段, 给 φ 一个较大的取值范围, 以加大算法的搜索范围; 随着迭代次数的增加, 可线性地减小 φ 的取值范围, 加强算法的局部收敛能力

2.4 算法实现

具体算法实现如下:

1) 随机生成规模为 N 的初始蚁群 POP, 计算 POP 中每个蚂蚁的目标函数值 $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, k$, 以及约束函数值 e_j , $j = 1, 2, \dots, J$.

2) 初始化外部集合 BP, 它的初始值为 POP 的所有可行解中的非支配解, 即

$$X_f = \{x \in \text{POP} \mid e(x) = 0\};$$

$$\text{BP} = \{x \in X_f \mid \exists x \in X_f, \text{使得 } x < x\}.$$

3) 设置迭代次数 $t = 1$.

4) 令 $i = 1$.

5) 随机产生一个 $[0, 1]$ 范围内的随机数 p , 将它与参数 p_0 比较, p_0 是一个 $[0, 1]$ 范围内的参数 当 $p < p_0$ 时, 对当前蚂蚁 i 使用基于全局最优经验指导的方式寻优; 当 $p > p_0$ 时, 对蚂蚁 i 采用信息素交流的方式寻优 可以看出, p_0 的值越小, 采用信息素交流的方式进行寻优的概率越大

6) 在蚂蚁的活动范围内移动蚂蚁 i , 并在其最终位置上加一个随机的扰动 φ 重新评价蚂蚁 i , 计算其目标函数值以及约束函数值

7) 更新最优经验结合 BP. 如果蚂蚁 i 是可行

解, 且对于集合 BP 来说是非支配的, 则将蚂蚁 i 加入集合 BP, 并删除 BP 中被 i 所支配的解

8) $i = i + 1$, 如果 $i = N$, 则转到 5).

9) $t = t + 1$, 如果 t 小于最大迭代次数, 则转到 4); 否则, 算法结束

3 实验结果

为验证该方法的有效性, 本文采用 3 组常用的基准函数来测试算法的性能 由于很难找到类似的方法与本文算法进行性能上的比较, 本文选择了非支配排序遗传 (NSGA II) 算法 为了比较的公平性, 本文算法和 NSGA II 算法采用相同的群体规模 (为 60), 而且在每组测试函数中均迭代相同的次数 NSGA II 算法变量采用实编码, 交叉概率为 0.9, 变异概率为 0.2 本文算法的参数设置为: $\lambda = 0.01$, $\lambda_c = 0.1$, $\lambda_b = 2$, $\lambda_a = 5$, $p_0 = 0.6$

在每个测试实例中, 以图形化的方式给出了这两种方法生成的 Pareto 前沿, 并对所得解的数量、分布性能以及散布范围等^[8]作了比较

1) 间距评估: 这种性能评估方式可用来测度所得 Pareto 前沿上相邻解间距离的变化情况 其定义为

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{d} - d_i)^2}. \quad (6)$$

其中

$$d_i = \min_j (|f^i_1(x) - f^j_1(x)| + |f^i_2(x) - f^j_2(x)|),$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$, n 为算法获得的 Pareto 前沿上向量的个数 \bar{d} 为以上所求得的 d_i 平均值, 即 $\bar{d} =$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i$$

当所获得的解越接近均匀散布时, 间距 S 的值越小

2) 最大散布范围评估: 这种性能评估方式可用来测度目标空间中的两个极值解的距离 其定义为

$$D =$$

$$\sqrt{\left(\max_{i=1}^n f^i_1 - \min_{i=1}^n f^i_1\right)^2 + \left(\max_{i=1}^n f^i_2 - \min_{i=1}^n f^i_2\right)^2}. \quad (7)$$

D 的值越大, 表明算法所获得的解的散布范围越广.

3.1 BNH 问题

$$\text{Min } f_1(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2,$$

$$f_2(x) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2,$$

$$\text{s.t. } e_1(x) = (x_1 - 5)^2 + x_2^2 \leq 25,$$

$$e_2(x) = (x_1 - 8)^2 + (x_2 + 3)^2 \leq 7.7,$$

$$0 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 3$$

BNH 问题是一个两变量约束问题, 它的 Pareto

前沿是连通的, 便于求解 图 1 为这两种算法迭代 10 次后得到的结果 由图可知, 两种方法都能很好地逼近 Pareto 前沿, 搜索效率很高 然而, NSGA II 算法搜索到的解在区间 [110, 140] 上分布比较稀疏 由表 1 可以看出, 本文算法比 NSGA II 算法搜索到的解的数量更多, 分布也更加均匀, 而且解散布的范围更广.

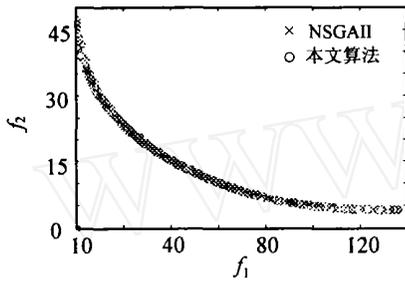


图 1 两种算法对 BNH 问题的求解结果

表 1 两种算法在间距及最大散布范围上的比较

算法	解的个数	间距 S	最大散布范围 D
NSGA II	97	0.85	115.44
本文算法	238	0.37	142.59

3.2 TNK 问题

$$\begin{aligned} \text{Min } f_1(x) &= x_1, \\ f_2(x) &= x_2, \\ \text{s.t. } e_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 - 1 - \\ &\quad 0.1 \cos(16 \arctan x_1/x_2) = 0, \\ e_2(x) &= (x_1 - 0.5)^2 + \\ &\quad (x_2 - 0.5)^2 = 0.5, \\ 0 &\leq x_1 \leq \pi, 0 \leq x_2 \leq \pi \end{aligned}$$

TNK 问题的求解难度在于它的 Pareto 前沿是由 3 段不连通的 Pareto 曲线构成, 且 Pareto 曲线是非凸的

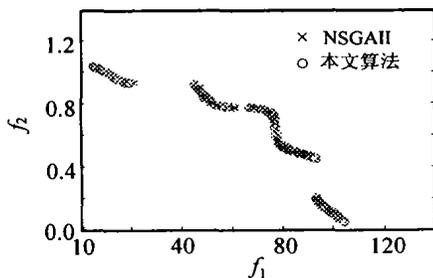


图 2 两种算法对 TNK 问题的求解结果

图 2 为两种算法迭代 100 次后的结果, 结果表明两种算法都能很好地逼近 Pareto 前沿 表 2 中的数据表明两种方法获得解的数量相当, 而且分布都较均匀, 但在曲线的首段和尾段, 本文算法获得解的数量更多.

表 2 两种算法在间距及最大散布范围上的比较

算法	解的个数	间距 S	最大散布范围 D
NSGA II	78	0.0078	1.21
本文算法	136	0.0051	1.41

3.3 CTP2 问题

$$\begin{aligned} \text{Min } f_1(x) &= x_1, \\ g(x) &= 11 + x_2^2 - 10 \cos(2\pi x_2), \\ f_2(x) &= g(x) \left(1 - \frac{f_1(x)}{g(x)} \right), \\ \text{s.t. } e(x) &= \cos(\Theta) [f_2(x) - e] - \sin(\Theta) f_1(x) \\ &\quad a \left| \sin \{ b\pi [\sin(\Theta) (f_2(x) - e) + \right. \\ &\quad \left. \cos(\Theta) f_1(x)]^c \right|^d, \\ \Theta &= -0.2\pi, a = 0.2, b = 10, c = 1, \\ d &= 6, e = 1, 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

CTP2 的 Pareto 前沿是由一系列不连通的 Pareto 曲线构成 图 3 为这两种算法迭代 200 次后的结果 由图可知, NSGA II 算法在区间 [0.9, 1] 上没有获得解, 本文算法在 CTP2 问题上的求解结果比 NSGA II 更加理想 表 3 的数据也表明, 本文算法获得的解的数量更多, 散布的范围更广.

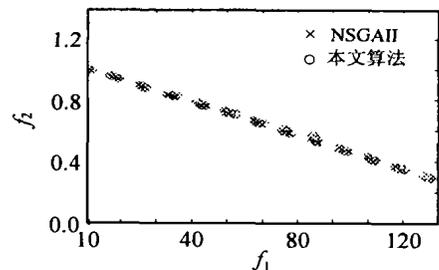


图 3 本文算法对 CTP2 问题的求解结果

表 3 两种算法在间距及最大散布范围上的比较

算法	解的个数	间距 S	最大散布范围 D
NSGA II	71	0.0061	1.11
本文算法	75	0.0048	1.21

4 结 语

本文对用于离散空间优化的蚁群算法作了改进, 用来求解带有约束条件的多目标函数优化问题 针对多目标优化问题的特点, 定义了连续空间中蚂蚁的信息量留存方式和行走策略, 并将信息素交流和基于全局最优经验指导两种寻优方式相结合, 以指导蚂蚁向更好的解的方向前进 通过实验分析可以看出, 本文提出的算法可以很好地逼近 Pareto 前沿, 同时解的多样性保持良好, 是一种有效的求解约束多目标优化问题的方法

(下转第 178 页)

- (L in H C, Xia M R. Analysis three models about transfer of remainder labourer in the developing country [J]. *Quantitative and Technical Economics*, 2002, (5): 125-127.)
- [2] Lewis W A. Economic development with unlimited supply of labor [J]. *J OF the Manchester School*, 1954, (4): 32-36
- [3] Magnusson. *Evolutionary and Neo-Schumpeterian Approaches to Economics* [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1994
- [4] 吴敬琏. 农村剩余劳动力转移与“三农”问题[J]. *宏观经济研究*, 2002, (6): 6-9
(Wu J L. Transfer of agricultural labourers and “three agriculture” problem [J]. *Macroeconomic Research*, 2002, (6): 6-9.)
- [5] Zafestas S G T. *Distributed Parameter Control System* [M]. New York: Pergamon Press Ltd, 1982: 87-90
- [6] 陈桂云, 潘德惠. 企业资产演化的分布参数系统预测及其优化[J]. *控制与决策*, 1999, 14(1): 85-88
(Chen G Y, Pan D H. Forecasting and optimizing problems of a distributed parameter system for the dynamics of corporations capital scale [J]. *Control and Decision*, 1999, 14(1): 85-88.)
- [7] 赵秋成. 农村剩余劳动力定量分析的一个模型[J]. *江苏统计*, 2000, (1): 20-21
(Zhao Q C. A quantitative model about agricultural remainder labourers [J]. *Jiangsu Statistics*, 2001, (1): 20-21.)
- [8] 农村剩余劳动力存量、流动与流量课题组. 农村剩余劳动力定量研究[J]. *统计与决策*, 2002, (2): 18-21
(A group for discussion. Quantitative study about agricultural remainder labourers [J]. *Stat and Decision*, 2002, (2): 18-21.)
- [9] 刘嘉焜. *应用随机过程* [M]. 北京: 科学出版社, 1999: 130-131.
- [10] 聂荣, 潘德惠. 农业系统的定价模型及优化控制[J]. *东北大学学报(自然科学版)*, 2004, 25(7): 707-710
(Nie R, Pan D H. Pricing model about agriculture system and its optimal control [J]. *J of Northeastern University (natural science)*, 2004, 25(7): 707-710.)
- [11] 聂荣. 基于比较利益下农业生产模式的模型研究[J]. *农业系统科学与综合研究*, 2004, 20(3): 161-163
(Nie R. Study about agricultural model of product based on comparative advantage [J]. *System science and comprehensive studies in agriculture*, 2004, 20(3): 161-163.)
- [12] Murphy, Shleifer, Vishny. Income distribution, market size and industrialization [J]. *Quarterly J of Economic*, 1989, (7): 163-166
- [13] 梁三龙, 潘德惠. 一类经济增长问题的控制理论研究[J]. *决策与控制*, 1998, 13(6): 640-645
(Liang S L, Pan D H. A study on economic growth with control theory [J]. *Control and Decision*, 1998, 13(6): 640-645.)
- [14] 王红玲. 关于农业剩余劳动力数量的估计方法与实证分析[J]. *经济研究*, 1998, (4): 43-46
(Wang H L. Evaluative method and positive analysis about agricultural labourers [J]. *Economic Research*, 1998, (4): 43-46.)

(上接第 173 页)

参考文献(References)

- [1] Dorigo M, Maniezzo V, Colnari A. The ant system: Optimization by a colony of cooperating agents [J]. *IEEE Trans on SMC*, 1996, 26(1): 28-41.
- [2] Dorigo M, Gambardella L M. Ant colony system: A cooperative learning approach to the traveling salesman problem [J]. *IEEE Trans on Evolutionary Computing*, 1997, 1(1): 53-56
- [3] Colnari A, Dorigo M, Maniezzo V. Ant colony system for job-shop scheduling [J]. *Belgian J of Operations Research Statistics and Computer Science*, 1994, 34(1): 39-53
- [4] Maniezzo V. Exact and approximate nondeterministic tree search procedures for the quadratic assignment problem [J]. *Inform S J of Computer*, 1999, (11): 358-369
- [5] Bilchev G, Pamee I C. The ant colony metaphor for searching continuous design spaces [J]. *Lecture Notes in Computer Science*, 1995, 993: 25-39
- [6] Johann Dré, Patrick Siarry. A new ant colony algorithm using the heterarchical concept aimed at optimization of multimim continuous functions [A]. *Proc of the 3rd Int Workshop on Ant Algorithm AN TS'2002* [C]. Brussels, 2002: 216-221.
- [7] 陈峻, 沈洁, 秦玲. 蚁群算法求解连续空间优化问题的一种方法[J]. *软件学报*, 2002, 13(12): 2317-2323
(Chen L, Shen J, Qin L. A method for solving optimization problem in continuous space by using ant colony algorithm [J]. *J of Software*, 2002, 13(12): 2317-2323.)
- [8] Eckart Zitzler, Kalyanmoy Deb, Lothar Thiele. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results [J]. *Evolutionary Computation*, 2000, 8(2): 173-195