文章编号: 1001-0920(2005)02-0127-05

切换系统的不变性原理与不变集的状态反馈镇定

林相泽, 田玉平
(东南大学 自动控制系, 江苏 南京 210096)

摘　要: 证明了一类切换系统的一个不变性原理, 并将输入对状态稳定的概念推广到输入对系统某个非负能量函数稳定的情况. 基于这个不变性原理以及输入对系统能量函数稳定的概念, 利用多 Lyapunov 函数方法提出并证明了一类具有 Lyapunov 稳定子系统的切换系统的不变集可状态反馈镇定的条件. 最后讨论了输入对系统能量函数稳定与输入对状态稳定的关系. 仿真结果证明了该方法的可行性.

关键词: 切换系统; 不变集; 反馈镇定; 多 Lyapunov 函数; 不变性原理
中图分类号: TP27　　**文献标识码**: A

Invariance principle and state feedback stabilization of invariant sets of switched systems

LIN Xiang-ze, TIAN Yu-ping
(Department of Automatic Control, Southeast University, Nanjing 210096, China. Correspondent: LIN Xiang-ze, E-mail: xzlin77@xinhuanet.com)

Abstract: An invariance principle is developed for a class of switched systems and the concept of the input-to-state stability is extended to the stability of input to an energy function of the switched systems. Based on this notion and the invariance principle, a condition is proposed and proved, under which an invariant set of states of a switched system with Lyapunov stable subsystems can be stabilized by state feedback. The relationship between these two kinds of stability is discussed in detail. Simulation result shows the validity of the method.

Key words: switched systems; invariant sets; feedback stabilization; multiple Lyapunov functions; invariant principle

1 引　　言

切换系统是一种由连续子系统以及在这些子系统间的切换规则组成的简单实用的混杂系统, 其在工程实践中大量存在, 如汽车引擎控制、计算机硬盘驱动系统、航空交通管理等. 由于切换系统的实用性, 近年来对它的分析与控制设计引起了学者们的广泛兴趣, 并取得了大量成果: Branicky 对一类自治的切换系统提出了研究系统平衡点稳定性的多 Lyapunov 函数方法[1]; Mancilla-Aguilar 和 Garcia 讨论了一类非线性切换系统的紧的不变集的一致渐近稳定[2]; Zhao 等利用比较函数的方法给出了切换系统输入对状态稳定的一个充分条件[3]. 目前对切换系统的研究大多集中在稳定性问题上, 而对集合的反馈镇定还未见报道. 实际上, 集合的镇定对切换系统有特别重要的意义, 而不变集的反馈镇定在集合镇定问题中又占有非常重要的地位. 例如当系统总是在若干个子系统间切换, 而每个子系统拥有不同的平衡点时, 镇定问题所面临的任务就不再是普通的平衡点镇定, 而可能是子系统平衡点集合的镇定. 其他如切换系统极限环的镇定等都不再是单一平衡点的镇定问题, 而是一个不变集的镇定问题.

LaSalle 不变性原理以及著名的 Jurdjevic-

收稿日期: 2004-04-26; **修回日期**: 2004-08-27.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60425308); 教育部科技重点项目(02112).
作者简介: 林相泽(1977-), 男, 山东青岛人, 博士生, 从事非线性控制、混杂系统控制等研究; 田玉平(1964-), 男, 安徽马鞍山人, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统控制、鲁棒控制、混沌控制等研究.

Quinn 方法[4]在非线性系统镇定中占有重要地位. Hespanha 在文献[5]中指出线性切换系统的一个 LaSalle 不变性原理——系统状态最终收敛于包含切换系统不可观测子空间的一个不变集. Hespanha 等人[6]利用 LaSalle 不变性原理的基本思想以及 Branicky 提出的多 Lyapunov 函数方法讨论了非线性切换系统平衡点的稳定性问题. Chellaboina 等人[7]推广了脉冲微分方程刻画的一类混杂系统的一个不变性原理. 利用 Jurdjevic-Quinn 方法, 文献[8]和[9]分别讨论了无源的光滑非线性系统的平衡点的反馈镇定问题. 文献[10～12]通过引入系统对一个非负的光滑能量函数零值集的可检测($V(x)$ 可检测) 概念, 将 Jurdjevic-Quinn 方法推广到无源的光滑非线性系统的不变集的反馈镇定问题. 而文献[13]则将 Jurdjevic-Quinn 方法推广到自治的仿射控制系统的极限环的反馈镇定问题.

本文首先给出了一类切换系统的一个不变性原理, 与文献[5]中的结论不同, 本文讨论的是一般非线性子系统的切换系统的不变性原理, 且与 Chellaboina 等人[7]推广的 LaSalle 不变性原理相比, 本文的结果在分析上提供了更大的自由度, 不再要求存在一个统一连续的 Lyapunov 函数. 另外, 本文还将 Sontag 等人提出的输入对状态稳定的概念[14,15]推广到输入对系统某个能量函数稳定的情况, 并讨论了其与输入对状态稳定的关系. 在切换系统各子系统都是 Lyapunov 稳定的前提下, 基于文中提出的不变性原理, 用多 Lyapunov 函数方法提出并证明了切换系统对于某个不变集可状态反馈镇定的条件, 并用 Jurdjevic-Quinn 方法构造了系统的控制器. 最后利用仿真例子证明了方法的可行性.

2 切换系统的不变性原理

考虑如下切换系统模型:

$$\mathring{x} = f_i(x),\quad i \in Q = \{1, 2, \cdots, N\}. \tag{1}$$

其中: $x \in X \subset R^n$ 为状态向量, X 为系统状态空间, $X = \bigcup_{i=1}^{N} X_i$, $X_i (i \in Q)$ 是划分系统状态空间的一系列内部两两互不相交的多面体; $f_i(\cdot)$ 是 Lipschitz 连续的. 令 $x(t) \in X$ 为定义在 $[0, T]$ 上的逐段 C^1 连续函数, $\forall t \in [0, T]$, 对所有的 $x(t) \in X_i$, $\mathring{x}(t) = f_i(x)$ 成立, 则称 $x(t)$ 是切换系统(1) 的轨迹. 当切换系统轨迹 $x(t)$ 由 X_i 到达 X_j 时, 向量场从 f_i 变为 f_j. 设发生切换的时刻为 $t = t_i$, 由此可产生切换时间序列 $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_i \leq \cdots$.

对上述切换系统作以下两个假设:

假设 1 切换系统的解存在且对初值 $x_0 \in X$ 是连续依赖的.

假设 2 系统在有限时间内只发生有限次切换.

关于混杂系统轨迹对初值的连续依赖问题的详细讨论, 参见文献[16]. 由假设 2 可知, 此时切换系统产生的切换时间序列为 $t_1 < t_2 < \cdots < t_i < \cdots$.

为了证明切换系统(1) 的不变性原理, 首先引入下面关于切换系统(1) 的 ω 极限集的一个结论:

引理 1 假设切换系统(1) 的轨迹 $s(t, x_0)$ 是有界的, 即存在 $M \in R$, 使得

$$\| s(t, x_0) \| < M,\ \forall t \geq 0, \tag{2}$$

那么轨迹 $s(t, x_0)$, $t \geq 0$ 的 ω 极限集 $\omega(x_0)$ 是一个非空的紧不变集, 且当 $t \to \infty$ 时, $s(t, x_0) \to \omega(x_0)$.

证明 由于切换系统(1) 的轨迹是连续有界的且对初值连续依赖, 类似于经典动态系统极限集的证明[17], 可得上述结论. □

为行文的简洁, 引入以下特征函数的概念:

定义 1 设 A 为 R^n 中任一集合, 则函数

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

称为集合 A 的特征函数.

下面给出关于切换系统(1) 的一个 LaSalle 不变性原理:

定理 1 对切换系统(1), 假设 $X_c \subset X$ 是系统的一个紧的正不变集. 如果存在 $C^r (r \geq 1)$ 的光滑函数 $V_i: X_c \cap \overline{X}_i \to R$, $i \in Q$, 使得 $\frac{\partial V_i(x(t))}{\partial x} f_i(x) \leq 0$, $x(t) \in X_c \cap X_i$, 且当系统轨迹 $x(t)$ 由 X_i 到达 X_j 时, 在切换点 $x(t_i)$ 上, $V_j(x(t_i)) \leq V_i(x(t_i))$. 令

$$K_i = \left\{ x(t) \in X_c \cap X_i: \frac{\partial V_i(x(t))}{\partial x} f_i(x) = 0 \right\},$$

$$K = \bigcup_{i=1}^{N} K_i.$$

设 M 是 K 中最大不变集. 如果 $x_0 \in X_c$, 那么当 $t \to \infty$ 时, $x(t, x_0) \to M$. 其中 $\overline{X}_i$ 表示集合 X_i 的闭包.

证明 令 $V(x) = \sum_{i=1}^{N} 1_{X_i}(x) V_i(x)$. 用类似经典 LaSalle 不变性原理[18] 的证明方法不难得到定理 1 的结论. □

3 不变集的状态反馈镇定

考虑如下系统:

$$\mathring{x} = f(x, u). \tag{3}$$

其中: $x \in X \subseteq R^n$ 是系统状态, $u \in U \subseteq R^m$ 是系统控制输入. $f: R^n \times R^m \to R^n$ 为连续可微的函数. 假设系统的解全局存在, 即对任意 $x_0 \in X \subseteq R^n$, $t \geq 0$, $x(t, x_0)$ 都存在. 本文中 $\| z \|_J$ 表示区间 $J \subset [0, \infty)$ 上信号 z 的最大模.

在文献[14,15]中, Sontag 等人定义了系统输

入对状态稳定的概念. 为研究具有Lyapunov稳定子系统的切换系统的不变集的状态反馈镇定问题, 将Sontag等人提出的输入对状态稳定的概念推广到输入对系统某个能量函数稳定的情况, 引入下面一个系统输入对$V(x)$稳定的概念:

定义 2[14,15]　如果对任意本征有界的控制$u \in L^m_{\infty,e}$及初始值$x_0 \in X \subseteq R^n$, 存在KL函数β, K函数γ使得系统(3)的轨迹对任意$t \ge 0$存在且满足下列条件:

$$|x(t, x_0, u)| \le \beta(|x_0|, t) + \gamma(\|u\|_{[0,t]}),\ \forall t \ge 0, \quad (4)$$

则称系统(3)是输入对状态稳定的(ISS).

定义 3　如果存在函数$\beta \in KL$, $\gamma \in K$, 系统(3)的非负能量函数$V(x)$满足下列不等式:

$$V(x) \le \beta(V(x(0)), t) + \gamma(\|u\|_{[0,t]}),\quad \forall x(0) \in X \subseteq R^n, t \ge 0, \quad (5)$$

则称系统(3)是输入对$V(x)$稳定的(IVS).

显然, 若取$V(x) = \|x\|$, 则系统(3)输入对$V(x)$稳定退化为输入对状态稳定.

定义 4[10]　如果对任意$a > 0$, 集合$V^{-1}([0, a]) = \{x \in X : 0 \le V(x) \le a\}$是一个紧集, 则称非负函数$V: X \to R$是适定的(proper).

下面讨论具有仿射非线性子系统的切换系统:

$$\dot{x} = f_i(x) + \sum_{i=1}^{N} g_i(x) u_i, \quad (6)$$

其中: $x \in X \subseteq R^n$是系统状态, X是系统状态空间, $X = \bigcup_{i=1}^{N} X_i$, $X_i (i \in Q)$是划分系统状态空间的一系列内部两两互不相交的多面体; $u_i \in U \subseteq R^m$是系统控制输入; $f_i: R^n \to R^n$, $g_i: R^m \to R^n$为连续可微函数. 系统满足假设1和假设2.

下面给出具有Lyapunov稳定子系统的切换系统不变集状态反馈渐近稳定的一个结论:

定理 2　如果切换系统(6)满足如下假设:

1) 任意$i \in Q$, 第i个子系统存在非负光滑的储能函数$V_i(x)$使得$\frac{\partial V_i(x)}{\partial x} f_i(x) \le 0$, 即每个子系统都是Lyapunov稳定的.

2) 在系统轨迹$x(t)$由区域X_i到达区域X_j的切换点$x(t_i)$上, 有$V_j(x(t_i)) \le V_i(x(t_i))$.

3) 任意$i \in Q$, $V_i^0 = \{x \in X_i \subset R^n : V_i(x) = 0\}$是紧集.

如果存在V_i^0的一个邻域$V_i^{c_i} = \{x \in X_i \subset R^n : V_i(x) \le c_i\}$, 使得对任意$i \in Q$, $x_0 \in V_i^{c_i}$, 切换系统(6)的第i个子系统是输入对$V_i(x)$稳定的, 那么存在状态反馈控制$u_i(x)$使得$V_0 = \bigcup_{i=1}^{N} V_i^0$是切换系统(6)的一个局部渐近稳定的不变集. 如果对任意$i \in Q$, $x_0 \in R^n$, $V_i(x)$是适定的, 切换系统(6)的第i个子系统是输入对$V_i(x)$稳定的, 那么V_0是一个在控制$u_i(x)$作用下的全局渐近稳定的不变集.

证明　由假设3)和假设1)知, 存在一个常数$\epsilon_i > 0$, 使得$V_i^{\epsilon_i} = \{x \in X_i \subset R^n : V_i(x) \le \epsilon_i\}$是紧集. 令$\epsilon = \min\{\epsilon_i\}$, 不妨假设$\epsilon \le \min\{c_i\}$, 那么对任意$i \in Q$, $x_0 \in V_i^{\epsilon} = \{x \in X_i \subset R^n : V_i(x) \le \epsilon\}$, 切换系统(6)的第$i$个子系统是输入对$V_i(x)$稳定的.

令$V(x) = \sum_{i=1}^{N} 1_{X_i}(x) V_i(x)$. 由假设1)知, 切换系统(6)的每个子系统都是Lyapunov稳定的, 那么任给$x_0 \in V_i^{\epsilon}$, 令$u_i(x) = -\frac{\partial V_i(x)}{\partial x} g_i(x)$, 沿着闭环系统的解$x(t) = x(t, x_0)$, 有

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} f_i(x) + \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} g_i(x) u_i(x) = \frac{\partial V_i(x)}{\partial x} f_i(x) - \left[\frac{\partial V_i(x)}{\partial x} g_i(x)\right]^2 \le 0,$$

且在系统轨迹$x(t)$由区域X_i到达区域X_j的切换点$x(t_i)$上有$V_j(x(t_i)) \le V_i(x(t_i))$, 因此对任意$t_2 \ge t_1 \ge 0$, 有$V(x(t_2, x_0)) - V(x(t_1, x_0)) \le 0$. 由此可知, $V(x)$沿着轨迹$x(t, x_0)$是非增的. 由引理1得, 切换系统(6)存在一个非空的紧不变ω极限集$\omega(x_0)$. 由定理1可知, 系统轨迹$x(t, x_0) \to \omega(x_0)$, 且对任意$x \in \omega(x_0) \cap X_i$, $\dot{V}_i(x) = 0$, 因此存在常数γ_{x_0}使得对任意$x \in \omega(x_0) \cap X_i$, $V_i(x) = \gamma_{x_0}$, 从而在集合$\omega(x_0)$上有$u_i(x) = -\frac{\partial V_i(x)}{\partial x} g_i(x) = 0$.

如果切换系统(6)在各个区域$X_i (i \in Q)$间只发生有限次切换, 那么存在$T > 0$, 当$t \ge T > 0$时, 切换系统轨迹由某个子系统决定. 不失一般性, 假设当$t \ge T > 0$时, 切换系统轨迹由向量场$f_i(\cdot, \cdot)$决定, 那么$V(x(t)) = V_i(x(t))$, $\forall t \ge T > 0$. 任意$x \in \omega(x_0)$, 有$V_i(x) = \gamma_{x_0}$, $u_i(x) = -\frac{\partial V_i(x)}{\partial x} g_i(x) = 0$, 又因为对任意$i \in Q$, $x_0 \in V_i^{\epsilon}$, 第i个子系统是输入对$V_i(x)$稳定的, 即存在函数

$$V_i(x(t)) \le \beta(V_i(x(t_1)), t) + \gamma(\|u\|_{[t_1, t]}),\quad \forall t_1, t \in [T, \infty), \beta \in KL, \gamma \in K.$$

由此可得, 当$t \to \infty$时, $V_i(x(t)) \to 0$, 即$\gamma_{x_0} = 0$.

如果切换系统(6)在各个区域$X_i (i \in Q)$间发生无限次切换, 设系统切换到区域X_i的时刻为$t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_j}, \cdots$, 当$j \to \infty$时$t_{i_j} \to \infty$, 在时间区间$[t_{i_j}, t_{i_{j+1}})$上系统轨迹由向量场$f_i(\cdot, \cdot)$决定. 对任意$i \in Q$, $x_0 \in V_i^{\epsilon}$, 切换系统(6)的第i个子系统是输入对$V_i(x)$稳定的, 即存在函数

$$V_i(x(t)) \le \beta(V_i(x(t_{i_{j+1}})), t) + \gamma(\|u\|_{[t_{i_{j+1}}, t]}),$$
$$\sigma(t) = i, \forall t \in [t_{i_{j+1}}, t_{i_{j+1}+1}), \beta \in KL, \gamma \in K.$$

因为 $V(x)$ 沿着轨迹 $x(t, x_0)$ 是非增的, 所以

$$\begin{aligned} &V_i(x(t)) \le \\ &\beta(V_i(x(t_{i_{j+1}})), t) + \gamma(\|u\|_{[t_{i_j}, t]}) = \\ &\beta(V(x(t_{i_{j+1}})), t) + \gamma(\|u\|_{[t_{i_j}, t]}) \le \cdots \le \\ &\beta(V(x(t_{i_0}), t)) + \gamma(\|u\|_{[t_{i_j}, t]}) = \\ &\beta(V_i(x(t_{i_0})), t) + \gamma(\|u\|_{[t_{i_j}, t]}). \end{aligned}$$

所以当 $j \to \infty$ 时, 任意 $t \in [t_{i_{j+1}}, t_{i_{j+1}+1})$, $u_i(x) = -\dfrac{\partial V_i(x)}{\partial x} g_i(x) \to 0$, 那么当 $j \to \infty$ 时, $V_i(x(t)) \le \beta(V_i(x(t_{i_0})), t) + \gamma(\|u\|_{[t_{i_{j+1}}, t]}) \to 0$, $\forall t \in [t_{i_{j+1}}, t_{i_{j+1}+1})$, 即 $\gamma_{x_0} = 0$.

综上所述, V_0 是切换系统(6) 的一个局部渐近稳定的不变集.

如果对任意 $i \in Q$, $x_0 \in R^n$, $V_i(x)$ 是适定的, 切换系统(6) 的第 i 个子系统是输入对 $V_i(x)$ 稳定的, 由上面类似的证明步骤, 可得 V_0 是一个全局渐近稳定的不变集. □

如果一个非线性系统的储能函数 $V(x)$ 是正定的, 那么 $V(x) \to 0 \Leftrightarrow x \to 0$. 由此可知, 如果切换系统(6) 的子系统的能量函数 $V_i(i \in Q)$ 都是正定的, 那么定理 2 中的集合 $V_0 = \bigcup_{i=1}^{N} V_i^0$ 只包含一个点 $x = 0$. 由此可得如下推论:

推论 1 对切换系统(6), $f_i(0) = 0$, $g_i(0) = 0$. 切换系统的每个子系统的储能函数 $V_i(i \in Q)$ 都是正定的且系统满足定理 2 的假设 1)～ 假设 3). 如果存在 V_i^0 的一个邻域 $V_i^{c_i} = \{x \in X_i \subset R^n : V_i(x) \le c_i\}$, 使得对任意 $i \in Q$, $x_0 \in V_i^{c_i}$, 切换系统(6) 的第 i 个子系统是输入对 $V_i(x)$ 稳定的, 那么存在状态反馈控制 $u_i(x)$ 使得 $x = 0$ 是局部渐近稳定的平衡点. 如果任意 $i \in Q$, $x_0 \in R^n$, $V_i(x)$ 是适定的, 切换系统(6) 的第 i 个子系统是输入对 $V_i(x)$ 稳定的, 那么存在状态反馈控制 $u_i(x)$ 使得 $x = 0$ 是全局渐近稳定的平衡点.

4 输入对 V(x) 稳定与输入对状态稳定

下面讨论系统(3) 是输入对 $V(x)$ 稳定与系统(3) 是输入对状态稳定之间的关系. 在文献[14] 中, 讨论了输入对状态稳定 Lyapunov (ISS-Lyapunov) 函数与输入对状态稳定之间的关系, 由[14] 中定理 1 可知, 系统(3) 是输入对状态稳定的等价于系统(3) 存在一个 ISS-Lyapunov 函数.

定义 5[14] 如果系统(3) 存在满足下列条件的光滑函数 $V: R^n \to R_{\ge 0}$:

1) 存在函数 $\alpha_1, \alpha_2 \in K_\infty$, 使得对任意的 $x \in R^n$, 有

$$\alpha_1(|x|) \le V(x) \le \alpha_2(|x|); \tag{7}$$

2) 存在函数 $\alpha_3, \chi \in K_\infty$, 使得对任意 $x \in R^n$, $u \in R^m$, 有

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, u) \le -\alpha_3(|x|) + \chi(|u|), \tag{8}$$

则称函数 $V(x)$ 是系统(3) 的 ISS-Lyapunov 函数.

定理 3 如果 $V(x)$ 是系统(3) 的 ISS-Lyapunov 函数, 那么系统(3) 是输入对 $V(x)$ 稳定的; 如果系统(3) 是输入对 $V(x)$ 稳定的, 且存在函数 $\alpha_1, \alpha_2 \in K_\infty$, 使得对任意的 $x \in R^n$, 有 $\alpha_1(|x|) \le V(x) \le \alpha_2(|x|)$, 那么系统(3) 是输入对状态稳定的.

证明 如果 $V(x)$ 是系统(3) 的 ISS-Lyapunov 函数, 则对任意的 $x \in R^n$, 存在函数 $\alpha_1, \alpha_2 \in K_\infty$, 函数 $V(\cdot)$ 满足 $\alpha_1(|x|) \le V(x) \le \alpha_2(|x|)$. 由文献[14] 中定理 1 可知, 系统(3) 是输入对状态稳定的, 那么存在 $\beta \in KL$, $r \in K$, 系统状态满足如下不等式:

$$|x(t, x_0, u)| \le \beta(|x_0|, t) + \gamma(\|u\|_{[0, t]}), \quad \forall t \ge 0.$$

由此可得

$$\begin{aligned} &V(x) \le \alpha_2(|x|) \le \\ &\alpha_2(\beta(|x_0|), t) + \gamma(\|u\|_{[0, t]})) \le \cdots \le \\ &\alpha_2(2\beta(\alpha_1^{-1}(V(x_0)), t)) + \alpha_2(2\gamma(\|u\|_{[0, t]})) = \\ &\beta_1(V(x_0), t) + \gamma_1(\|u\|_{[0, t]}), \forall x_0, t \ge 0. \end{aligned}$$

其中

$$\beta_1(V(x_0), t) = \alpha_2(2\beta(\alpha_1^{-1}(V(x_0)), t)),$$
$$\gamma_1(\|u\|_{[0, t]}) = \alpha_2(2\gamma(\|u\|_{[0, t]})).$$

易知 $\beta_1(\cdot, \cdot) \in KL$, $\gamma_1(\cdot) \in K$. 由此可知系统(3) 是输入对 $V(x)$ 稳定的.

如果系统(3) 是输入对 $V(x)$ 稳定的且存在函数 $\alpha_1, \alpha_2 \in K_\infty$, 使得对任意的 $x \in R^n$, 有

$$\alpha_1(|x|) \le V(x) \le \alpha_2(|x|),$$

那么

$$\alpha_1(|x|) \le V(x) \le \beta(V(x_0), t) + \gamma(\|u\|_{[0, t]}), \quad \forall x_0, t \ge 0.$$

由此可知,

$$\begin{aligned} &|x| \le \alpha_1^{-1}(\beta(V(x_0), t) + \gamma(\|u\|_{[0, t]})) \le \cdots \le \\ &\alpha_1^{-1}(2\beta(\alpha_2(|x_0|), t)) + \alpha_1^{-1}(2\gamma(\|u\|_{[0, t]})) = \\ &\tilde{\beta}_1(|x_0|, t) + \tilde{\gamma}_1(\|u\|_{[0, t]}) \end{aligned}$$

其中

$$\tilde{\beta}_1(|x_0|, t) = \alpha_1^{-1}(2\beta(\alpha_2(|x_0|), t)),$$

$$\tilde{\gamma}_1(\|u\|_{[0,t]}) = \alpha_1^{-1}(2\gamma(\|u\|_{[0,t]})).$$

易知$\tilde{\beta}(\cdot,\cdot) \in KL$, $\tilde{\gamma}_1(\cdot) \in K$. 由此可知, 系统(3)是输入对状态稳定的. □

5　仿真例子

考虑具有以下两个子系统的切换系统:

$$A: \dot{x} = f_A(x) + g_A(x)u_A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} u_A,$$

$$B: \dot{x} = f_B(x) + g_B(x)u_B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} u_B.$$

将状态空间R^n划分为$X_A = \{x : x_1x_2 \geq 0\}$, $X_B = \{x : x_1x_2 \leq 0\}$. 取

$$V_A(x) = V_B(x) = V(x) = \frac{(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2}{4},$$

那么

$$V_A^0 \cup V_B^0 = \{x : x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

因

$$\frac{\partial V_A(x)}{\partial x} f_A(x) = \frac{\partial V_B(x)}{\partial x} f_B(x) = 0,$$

在切换点$x(t)$上, 有

$$V_A(x(t)) = V_B(x(t)).$$

取如下控制器:

$$u_A = -\frac{\partial V_A(x)}{\partial x} g_A(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \frac{1}{2}x_2(x_1^2 + x_1^2 - 1) \end{bmatrix},$$

$$u_B = -\frac{\partial V_B(x)}{\partial x} g_B(x) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \frac{3}{2}x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{bmatrix}.$$

那么

$$V_A = \frac{(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2}{4} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\|u_A\|^2 \leq e^{-t}\frac{(x_{10}^2 + x_{20}^2 - 1)^2}{4} + K_A\|u_A\|^2 = \beta_A(V_A(0), t) + \gamma_A(\|u_A\|).$$

其中

$$K_A \geq \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

同理可得

$$V_B \leq e^{-t}\frac{(x_{10}^2 + x_{20}^2 - 1)^2}{4} + \frac{1}{9(x_1^2 + x_2^2)}\|u_B\|^2 \leq e^{-t}\frac{(x_{10}^2 + x_{20}^2 - 1)^2}{4} + K_B\|u_B\|^2 = \beta_B(V_B(0), t) + \gamma_B(\|u_B\|).$$

其中

$$K_B \geq \frac{1}{9(x_1^2 + x_2^2)}.$$

由定理 2 可知, 集合$V_A^0 \cup V_B^0$在控制器作用下是渐近稳定的. 取初始值$x_0 = (-1.2, -2.5)$, 仿真结果如图 1 所示.

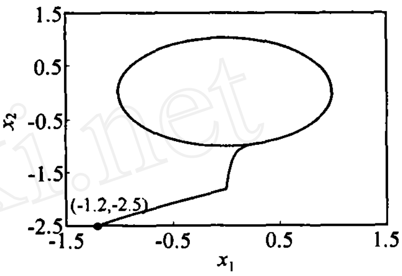

图 1　仿真曲线

6　结　　语

本文给出了一类切换系统的一个不变性原理, 并将输入对状态稳定的概念推广到输入对系统某个能量函数稳定的情况. 利用上述不变性原理以及推广的输入对系统某个能量函数稳定的概念, 结合 Jurdjevic-Quinn 方法, 用多 Lyapunov 函数方法提出并证明了切换系统对于某个不变集可状态反馈镇定的条件, 并通过一个例子证明了方法的可行性. 最后, 本文讨论了输入对系统某个能量函数稳定与输入对状态稳定之间的关系.

参考文献(References)

[1] Branicky M. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems [J]. *IEEE Trans on Automatica Control*, 1998, 43(4): 475-482.

[2] Mancilla-Aguilar J L, Garcia R A. A converse Lyapunov theorem for nonlinear switched systems [J]. *System and Control Letters*, 2000, 41(1): 67-71.

[3] Zhao J, Nie H. Sufficient conditions for input-to-state stability of switched systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2003, 29(2): 252-257.

[4] Jurdjevic V, Quinn J P. Controllability and stability [J]. *J of Differential Equations*, 1978, 28(2): 381-389.

[5] Hespanha J P. Extending Lasalle's invariant principle to switched linear systems [A]. *Proc of the 40th IEEE Conf on Decision and Control* [C]. Driando, 2001: 2496-2501.

(下转第 136 页)

H_∞ 性能和 H_2 性能分别与用 H_∞ 状态反馈控制器得到的 H_∞ 性能和 H_2 状态反馈控制器得到的 H_2 性能基本相同.

6 结 语

本文提出一种基于遗传算法的混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制器的设计方法. 首先利用线性矩阵不等式得到多个 γ_∞ 值的 γ_∞-次优 H_∞ 控制器; 然后通过遗传算法对得到的控制器进行 H_2 性能优化, 从而设计出鲁棒性强且满足系统性能要求的混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制器. 从仿真结果可以看出, 用本文方法设计的混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制器的 H_∞ 性能和 H_2 性能, 分别与用 H_∞ 状态反馈控制器得到的 H_∞ 性能和 H_2 状态反馈控制器得到的 H_2 性能基本相同.

参考文献(References)

[1] Zhou K. Mixed H_2 and H_∞ performance objective I: Robust performance analysis[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(8): 1564-1574.

[2] Doyle J C. Mixed H_2 and H_∞ performance objective II: Optimal control[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(8): 1575-1587.

[3] Kargonekar P P. Mixed H_2/H_∞ control: A convex optimization approach[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(7): 834-837.

[4] 袁立嵩. 具有闭环极点位置约束的 H_2/H_∞ 混合控制[J]. *自动化学报*, 1995, 21(2): 170-177.
(Yuan L S. Mixed H_2/H_∞ control for systems with poles in specified region[J]. *Acta Automatica Sinica*, 1995, 21(2): 170-177.)

[5] 潘伟, 米阳, 井元伟. 基于遗传算法的广义离散系统降阶 H_∞ 控制器[A]. 2004 *中国控制与决策学术年会论文集*[C]. 黄山, 2004: 23-26.

[6] 杨冬梅, 张庆灵, 沙成满. 基于 LMI 的广义系统混合 H_2/H_∞ 优化控制[J]. *控制与决策*, 2003, 18(3): 320-323.
(Yang D M, Zhang Q L, Sha C M. LMI-based mixed H_2/H_∞ optimal control for descriptor systems[J]. *Control and Decision*, 2003, 18(3): 320-323.)

[7] Forrest S. Genetic algorithms[A]. *Proc of the Fifth Int Conf on Genetic Algorithms*[C]. San Mateo: Morgan Kaufmann Publishers, 1993: 35-42.

[8] Jwasaki T, Skelton R E. All controller for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas[J]. *Automatica*, 1994, 30(8): 1307-1371.

[9] Fogel D B. An introduction to simulated evolutionary optimization[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 1994, 5(1): 3-14.

[10] 王进华, 史忠科, 曹力, 等. 混合 H_2/H_∞ 鲁棒控制在飞行控制中的应用[J]. *飞行力学*, 2000, 18(4): 68-72.
(Wang J H, Shi Z K, Cao L, et al. Application of mixed H_2/H_∞ robust control to aircraft[J]. *Flight Dynamics*, 2000, 18(4): 68-72.)

(上接第 131 页)

[6] Hespanha J P, Liberzon D, Sontag E D. Nonlinear observability and an invariant principle for switched systems[A]. *Proc of the 41st IEEE Conf on Decision and Control*[C]. Las Vegas, 2002: 4300-4305.

[7] Chellaboina V, Bhat S P, Haddard W M. An invariance principle for nonlinear hybrid and impulsive dynamical systems[A]. *Proc of the American Control Conf*[C]. Chicago, 2000: 3116-3122.

[8] Lin W. Feedback stabilization of general nonlinear control systems: A passive system approach[J]. *System Control Letters*, 1995, 25(1): 41-52.

[9] Byrnes C I, Isidori A, Willems J C. Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 36(11): 1228-1240.

[10] Shiriaev A S. The notion of V-detectability and stabilization of invariant sets of nonlinear systems[J]. *Systme Control Letters*, 2000, 39(5): 327-338.

[11] Shiriaev A S. Stabilization of compact sets for passive affine nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2000, 36(9): 1373-1379.

[12] Shiriaev A S, Fradkov A L, Stabilization of invariant sets for nonlinear non-affine systems[J]. *Automatica*, 2000, 36(11): 1709-1715.

[13] Bacciotti A, Mazzi L. Stabilization of closed orbits[J]. *System Control Letters*, 1995, 24(2): 97-101.

[14] Sontag E D, Wang Y. On characterizations of the input-to-state stability property[J]. *System Control Letters*, 1995, 24(5): 351-359.

[15] Sontag E D. Smooth Stabilization Implies coprime Factorization[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(4): 435-443.

[16] John Lygeros, Johansson K H, Simic S N, et al. dynamical properties of hybrid automata[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(1): 2-16.

[17] Ferdinand Verhulst. *Nonlinear differential equations and dynamical systems*[M]. Berlin: Springer, 1996.

[18] Khalil H K. *Nonlinear systems*[M]. 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2002.