

文章编号: 1001-0920(2005)02-0156-05

## 混合量子遗传算法及其性能分析

王 凌<sup>1</sup>, 吴 昊<sup>1</sup>, 唐 芳<sup>2</sup>, 郑大钟<sup>1</sup>, 金以慧<sup>1</sup>

(1. 清华大学 自动化系, 北京 100084; 2 北京航空航天大学 物理系, 北京 100083)

**摘 要:** 首先比较了带量子门更新和群体灾变的量子算法(QA)以及加入对量子位的交叉和变异操作的量子遗传算法(QGA);然后结合量子搜索和传统遗传搜索提出了混合量子遗传算法的框架,并给出了基于二进制编码的混合量子遗传算法(BQGA)和基于实数编码的混合量子遗传算法(RQGA)。基于典型问题的数值仿真和比较表明,RQGA 的性能明显优于其他算法,对参数和初值具有较好的鲁棒性

**关键词:** 遗传算法; 量子遗传算法; 混合量子遗传算法; 性能分析

**中图分类号:** TP18 **文献标识码:** A

## Hybrid quantum genetic algorithms and performance analysis

WANG Ling<sup>1</sup>, WU Hao<sup>1</sup>, TANG Fang<sup>2</sup>, ZHENG Da-zhong<sup>1</sup>, JIN Yi-hui<sup>1</sup>

(1. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 2 Department of Physics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China. Correspondent: WANG Ling, Email: wangling@tsinghua.edu.cn)

**Abstract** Quantum algorithm (QA) with updating of quantum gates and catastrophe of population is compared with quantum genetic algorithm (QGA) by including crossover and mutation for quantum bits. Furthermore, a framework of hybrid quantum GA is proposed which combines the quantum based search and classic genetic search, and hybrid QGA with binary encoding (BQGA) and hybrid QGA with real encoding (RQGA) are presented. Numerical simulation on typical problems show that the performances of RQGA are the best among all testing algorithms and it is much robust on parameters and initial conditions.

**Key words:** genetic algorithm; quantum GA; hybrid quantum GA; performance analysis

### 1 引 言

量子计算(QC)是信息科学和量子力学相结合的新兴交叉科学。自 20 世纪 80 年代初 QC 概念提出后,尤其在 Grover 提出随机数据库搜索的量子算法和<sup>[1]</sup>Shor 提出离散对数与大整数质因子分解的量子算法<sup>[2]</sup>之后, QC 以其独特的计算方式引起了学者们的广泛关注和研究。QC 利用量子理论中有关量子态的叠加和纠缠等特性,通过量子并行计算来求解问题。遗传算法(GA)是目前研究较热的另一种并行算法,它基于“适者生存”的思想将问题的求解表示成“染色体”的适者生存过程,通过“染色体”群的不断进化,包括复制、交叉、变异等,最终收敛到

问题的最优解或满意解<sup>[3]</sup>。量子算法(QA)建立在量子的态矢量表达基础上,将量子比特的几率幅表示应用于染色体的编码,使得一个染色体可以表达多个态的叠加,比传统 GA 更具并行性。同时,利用当前最优个体的信息更新量子旋转门可加速算法收敛,引入量子交叉、变异和灾变等操作可克服早熟收敛现象<sup>[4]</sup>。因此,量子遗传算法(QGA)目前已成为国际学术界的一个新课题<sup>[5]</sup>。

本文首先比较了带量子门更新和群体灾变的 QA 以及加入量子交叉和变异的 QGA,进而提出了混合量子遗传算法的框架,然后分别给出了基于二进制编码和基于实数编码的混合量子遗传算法

收稿日期: 2004-05-09; 修回日期: 2004-08-23

基金项目: 国家自然科学基金项目(60204008, 60374060); 国家 973 计划项目(2002CB312200)。

作者简介: 王凌(1972—),男,江苏武进人,副教授,博士,从事智能优化理论与方法的研究; 吴昊(1986—),男,北京人,硕士生,从事优化与计算方法的研究

(BQGA 和 RQGA), 最后通过数值仿真和比较验证了 RQGA 在优化质量、参数鲁棒性和初值鲁棒性方面的优越性

## 2 量子算法和量子遗传算法

在量子算法中, 染色体不是用确定性的值(如二进制数或浮点数)表示, 而是用量子位表示, 或者是概率幅的方式表示。一个量子位可表示为  $[\alpha \ \beta]^T$ , 其中  $\alpha$  和  $\beta$  为复数, 分别表示状态  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  的概率幅, 且满足归一化条件  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ 。从而一个用  $n$  个量子位编码的染色体就可以表示  $2^n$  个状态。譬如, 用 3 个量子位编码的染色体可表示为  $\sqrt{2}/4|000\rangle + \sqrt{6}/4|001\rangle + 0|010\rangle + 0|011\rangle - \sqrt{2}/4|100\rangle - \sqrt{6}/4|101\rangle + 0|110\rangle + 0|111\rangle$ , 共 8 个状态。在 QA 中, 量子门是实现演化操作的执行机构, 其构造是 QA 的关键, 直接影响 QA 的性能。根据 QA 的计算特点, 选择量子旋转门较为合适。量子旋转门的调整操作如下:

$$\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中:  $[\alpha_i, \beta_i]^T$  为染色体中的第  $i$  个量子位,  $\theta$  为旋转角, 其大小和方向的调整策略如表 1 所示

表 1 量子旋转门的调整策略

$x_i$	$b_i$	$f(x) < f(b)$	$\Delta\theta$	$\alpha, \beta_i$			
				$\alpha\beta_i > 0$	$\alpha\beta_i < 0$	$\alpha = 0$	$\beta_i = 0$
0	0	False	0	0	0	0	0
0	0	True	0	0	0	0	0
0	1	False	0	0	0	0	0
0	1	True	$0.05\pi$	-1	+1	$\pm 1$	0
1	0	False	$0.01\pi$	-1	+1	$\pm 1$	0
1	0	True	$0.025\pi$	+1	-1	0	$\pm 1$
1	1	False	$0.005\pi$	+1	-1	0	$\pm 1$
1	1	True	$0.025\pi$	+1	-1	0	$\pm 1$

表 1 中,  $x_i$  和  $b_i$  分别为解  $x$  与当前最优个体  $b$  的第  $i$  个量子位对应的二进制位,  $f(\bullet)$  为目标函数,  $\Delta\theta$  和  $(\alpha, \beta_i)$  为旋转角度的幅度和旋转方向, 实际旋转角  $\theta = s(\alpha, \beta_i) \Delta\theta$

基本 QA 的步骤可描述如下:

步骤 1: 随机产生种群  $P(t) = \{p^1, \dots, p^i\}$ , 其中  $p^j$  为第  $t$  代种群中的第  $j$  个个体, 且有

$$p^j = \begin{bmatrix} \alpha_1^j & \alpha_2^j & \dots & \alpha_m^j \\ \beta_1^j & \beta_2^j & \dots & \beta_m^j \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中  $m$  为量子位数, 即量子染色体的长度

步骤 2: 根据  $P(t)$  中概率幅的取值情况构造  $R(t) = \{a^1, \dots, a^i\}$ , 其中  $a^j$  是一个长度为  $m$  的二进制串。其产生方式为: 产生一个  $[0, 1]$  上随机数  $r$ , 若  $|\alpha|^2 > r$  则取值为 1, 否则为 0

步骤 3: 评价  $R(t)$  各个体, 保留最优个体。若终止条件满足, 则算法终止, 否则继续

步骤 4: 判断种群是否需要灾变。若需要则进行灾变并跳至步骤 6, 否则算法继续

步骤 5: 使用量子旋转门  $U(t)$  更新  $P(t)$ 。

步骤 6: 令  $t = t + 1$ , 并返回步骤 2

算法中的灾变操作<sup>[6]</sup>通常用于避免陷入局部极小, 即若算法连续若干代(仿真时设置为最大进化步数的 1/5)均保持最优值不变, 则仅保留最优个体, 其余个体重新生成。但 QA 只采用量子旋转门和灾变操作, 而没有交叉和变异等遗传操作, 仍可能陷入局部极小。因而, QGA 在 QA 的量子旋转门操作之后加入了量子交叉和变异操作。QGA 中遗传操作的对象是量子位, 中间过程产生的二进制串仅用于计算适配值。量子交叉可采用单点交叉, 即随机产生一个交叉位置, 保留两个体在交叉位置前的片段, 只交换交叉位置之后的量子位。量子变异则首先以变异概率  $p_m$  选中个体, 然后随机产生变异位置, 交换相应量子位的两个概率幅  $\alpha$  和  $\beta_i$ , 使得原先倾向于“0”的状态转变为倾向于“1”的状态, 反之亦然

## 3 QA 和 QGA 的性能比较

选取如下两个典型多极小函数进行算法性能比较:

$$f_1(x_1, x_2) = \left(x_2 - \frac{5.1}{4\pi}x_1^2 + \frac{5}{\pi}x_1 - 6\right)^2 + 10\left(1 - \frac{1}{8\pi}\cos x_1 + 10, -5, x_1, 10, 0, x_2, 15\right); \quad (3)$$

$$f_2(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 2.1x_1^4 + x_1^6/3 + x_1x_2 - 4x_2^2 + 4x_2^4 - 5, -5, x_1, 5, -5, x_2, 5; \quad (4)$$

其最优性能分别为

$$\begin{aligned} f_1(x_1^*, x_2^*) &= f_1(9.425, 2.425) = \\ f_1(3.142, 2.275) &= \\ f_1(-3.142, 2.275) &= 0.3979; \\ f_2(x_1^*, x_2^*) &= f_2(-0.08983, 0.7126) = \\ f_2(0.08983, 0.7126) &= -1.032 \end{aligned}$$

设置变量精度为  $10^{-6}$ , 则因  $f_1$  的变量区间长度为 15 而使染色体长度为 24, 因  $f_2$  变量区间长度为 10 而使染色体长度为 23。取交叉和变异概率分别为 1 和 0.05, 保持种群数与最大进化代数的乘积为 3 000 不变, 对 QA 和 QGA 进行比较。仿真硬件条件

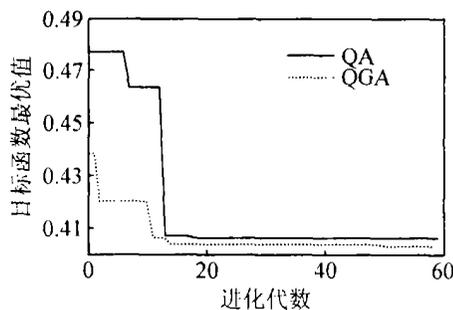
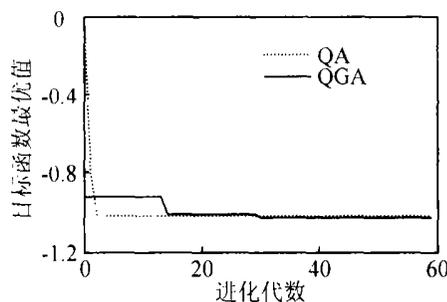
表2 优化  $f_1$  时 QA 和 QGA 的性能比较

种群 * 最大步数	QA				QGA			
	最优值	时间	平均值	均方差	最优值	时间	平均值	均方差
30 * 100	0.397 9	6.328	0.416 9	0.046 5	0.397 9	6.546	0.403 2	0.010 0
40 * 75	0.397 9	6.296	0.418 5	0.035 7	0.397 9	6.343	0.404 4	0.010 8
50 * 60	0.397 9	6.109	0.418 4	0.045 3	0.397 9	6.281	0.407 5	0.016 1
60 * 50	0.398 2	6.046	0.423 2	0.029 3	0.397 9	6.265	0.410 4	0.018 5
100 * 30	0.398 1	5.859	0.434 3	0.041 3	0.398 1	6.078	0.424 9	0.054 1

表3 优化  $f_2$  时 QA 和 QGA 的性能比较

种群 * 最大步数	QA				QGA			
	最优值	时间	平均值	均方差	最优值	时间	平均值	均方差
30 * 100	-1.032	6.218	-0.985 7	0.062 2	-1.032	6.469	-1.006	0.025 3
40 * 75	-1.032	6.218	-0.992 8	0.050 0	-1.031	6.484	-0.997 5	0.032 2
50 * 60	-1.032	6.234	-0.994 3	0.030 1	-1.032	6.484	-1.004	0.026 4
60 * 50	-1.031	6.25	-0.970 8	0.082 7	-1.031	6.484	-1.002	0.022 3
100 * 30	-1.031	6.312	-0.976 2	0.050 5	-1.031	6.578	-0.981 7	0.061 5

为: P4-2.4 GHz, 528 M 内存, Windows XP 操作系统, VC++ 环境。两种方法对  $f_1$  各 50 次随机仿真的统计结果如表 2 所示, 典型性能变化曲线如图 1 所示 (种群数为 50, 进化代数为 60); 两种方法对  $f_2$  各 50 次随机仿真的统计结果如表 3 所示, 典型性能变化曲线如图 2 所示。

图1 优化  $f_1$  时 QA 和 QGA 的性能变化曲线图2 优化  $f_2$  时 QA 和 QGA 的性能变化曲线

可见, QGA 对初值的鲁棒性(均方差)明显好于 QA, 收敛速度和质量稍优于 QA, 但改进幅度很有限且计算时间稍大于 QA。同时, 不同种群数和进化代数对算法性能有一定的影响。因此, 单纯基于量子位的搜索结果不能令人满意。下面结合 QGA 和

传统 GA 提出混合量子遗传算法。

#### 4 混合量子遗传算法

No Free Lunch 定理说明, 没有一种方法能够最有效地解决所有问题, 这也正是目前混合算法受到重视的一个原因<sup>[3]</sup>。在 QA 和 QGA 中, 遗传操作是针对量子位的, 转化到二进制串仅是为计算个体适配值。然而, 函数优化中大部分遗传操作是针对二进制编码的, 同时大量研究表明实数编码的 GA 对复杂函数优化问题具有较好的性能。因此, 考虑 QGA 和传统 GA (包括二进制编码的 GA, 即 BGA; 实数编码的 GA, 即 RGA) 的混合, 提出如图 3 所示的混合量子遗传算法框架。

可见, 混合算法纵向是 QGA 基于量子门更新的搜索过程, 横向是 BGA 或 RGA 基于二进制串或实数本身的遗传搜索过程。基于不同的解表征空间上搜索的混合, 基于不同的解表征方式的多种遗传操作的混合, 有利于丰富搜索行为和增强搜索能力, 进而避免早熟收敛。另外, QGA 的优良结果和 BGA 或 RGA 上代的搜索结果采用整体择优进行更新, 可避免优良解的遗失和加快种群的整体收敛。为方便起见, 记 QGA 和 BGA 的混合为 BQGA, 记 QGA 和 RGA 的混合为 RQGA。

混合算法纵向主线为 QGA, 因此可按上文实现。对于 BGA 和 RGA, 本文采用文献[7]中的选择策略, 即按适配值最优到最差将种群中所有  $n$  个个体排序, 复制前  $m$  个(仿真时令  $m = n/5$ ) 个体两份, 淘汰最后  $m$  个个体, 保留中间  $n - 2m$  个个体。BGA 采用单点交叉<sup>[3]</sup>; RGA 采用算术交叉<sup>[3]</sup>。BGA 采用单位位置变异, 即以变异概率  $p_m$  对相应位置上的二进

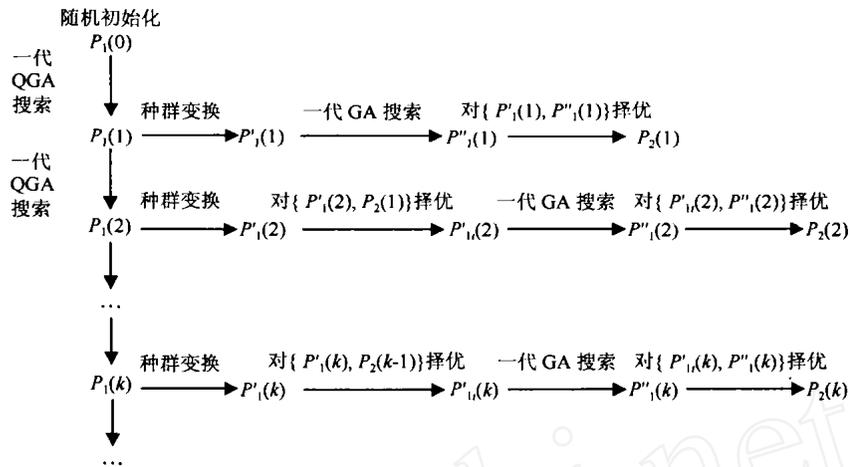


图 3 混合量子遗传算法的框架

制基因取反; RGA 采用高斯变异, 即以变异概率  $p_m$  选中个体, 并对其附加服从正态分布  $N(0, 1)$  的随机数<sup>[3]</sup>. 需要指出的是, 横向的 BGA 或 RGA 搜索也可以采用多代搜索, 同时 QGA 和 BGA 或 RGA 完全可采用不同的算法参数进行搜索

### 5 混合量子遗传算法的性能测试

采用前文函数对各算法进行性能测试和比较各种方法对  $f_1$  各 50 次随机仿真的统计结果如表 4 所示, 典型性能变化曲线如图 4 所示(种群数为 50, 进化代数数为 60); 各种方法对  $f_2$  各 50 次随机仿真的统计结果如表 5 所示, 典型性能变化曲线如图 5 所示

由图表可见: RQGA 的收敛速度是最好的, 它只需较少进化代数就可收敛到最优解, RQGA 的收

敛质量是最好的, 在不同的参数下均可得到最优解, 并且平均值与最优值很接近; RQGA 对初值的鲁棒性是最好的, 不同初始条件下所得结果几乎一样, 所得结果的方差几乎为零; RQGA 的搜索时间较 QGA 有所增加, 但明显少于 BQGA; 在总评价次数固定的情况下, 种群数和最大进化代数对 RQGA 的性能几乎没有影响, 即 RQGA 对参数具有一定的鲁棒性. 另外, 对比 BQGA 和 QGA 的性能可见, BQGA 对 QGA 有所改进, 但改进幅度很有限

RQGA 之所以具有优良的性能, 原因在于量子位空间上搜索与实数空间上搜索的融合(微空间和宏空间的混合), 以及多种不同类型遗传操作的结合, 从而丰富了算法的搜索行为, 增强和均衡了全局和局部搜索能力

表 4 优化  $f_1$  时各种方法的性能统计

种群 * 最大 步数	QGA				BQGA				RQGA			
	最优值	时间	平均值	均方差	最优值	时间	平均值	均方差	最优值	时间	平均	均方差
30 * 100	0.3979	6.546	0.4032	0.0100	0.3979	9.140	0.3998	0.0038	0.3979	7.281	0.4003	0.0064
40 * 75	0.3979	6.343	0.4044	0.0108	0.3979	9.218	0.4019	0.0067	0.3979	7.484	0.3983	0.0008
50 * 60	0.3979	6.281	0.4075	0.0161	0.3986	9.218	0.4029	0.0092	0.3979	7.500	0.3983	0.0016
60 * 50	0.3979	6.265	0.4104	0.0185	0.3979	9.328	0.4046	0.0129	0.3979	8.250	0.3985	0.0040
100 * 30	0.3981	6.078	0.4249	0.0541	0.3979	9.687	0.4080	0.0126	0.3979	8.343	0.3981	0.0011

表 5 优化  $f_2$  时各种方法的性能统计

种群 * 最大 步数	QGA				BQGA				RQGA			
	最优值	时间	平均值	均方差	最优值	时间	平均值	均方差	最优值	时间	平均	均方差
30 * 100	-1.032	6.469	-1.006	0.0253	-1.032	9.593	-1.011	0.0205	-1.032	7.390	-1.026	0.0151
40 * 75	-1.031	6.484	-0.9975	0.0322	-1.032	9.593	-1.013	0.0188	-1.032	7.468	-1.030	0.0051
50 * 60	-1.032	6.484	-1.004	0.0264	-1.032	9.609	-1.011	0.0158	-1.032	7.687	-1.031	0.0009
60 * 50	-1.031	6.484	-1.002	0.0223	-1.032	9.765	-1.010	0.0236	-1.032	7.796	-1.031	0.0013
100 * 30	-1.031	6.578	-0.9817	0.0615	-1.032	10.13	-1.014	0.0183	-1.032	8.515	-1.030	0.0086

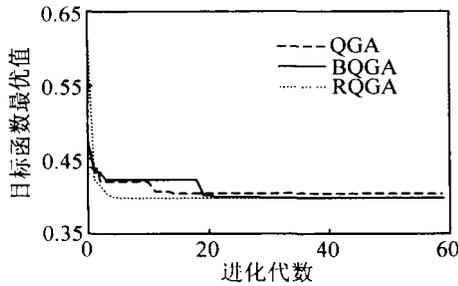


图4 优化 $f_1$ 时各种方法的性能变化曲线

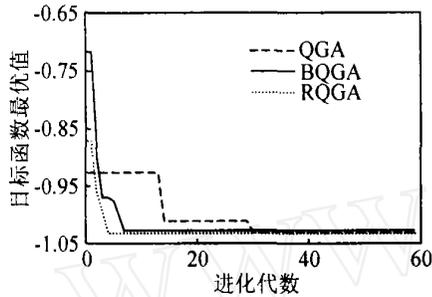


图5 优化 $f_2$ 时各种方法的性能变化曲线

需要指出的是,仿真中QGA和RGA所用的参数(譬如种群数、交叉和变异概率等)相同,而这些参数完全可以不一样,甚至可以是自适应时变的,以体现不同的搜索特性和行为

## 6 结 语

本文提出了量子遗传算法与传统GA的混合框架,采用多模态空间和多操作搜索的混合(即量子搜索空间和遗传码空间混合搜索以及量子搜索和遗传搜索的多方位混合),给出了混合量子遗传算法

RQGA。仿真研究表明,RQGA能有效地改善QGA的收敛速度和质量以及对初值的鲁棒性。进一步的工作是开展有关RQGA的理论研究,并尝试在实际问题中的应用

## 参考文献(References)

- [1] Grover L K. A fast quantum mechanical algorithm for database search [A]. *Proc of the 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing* [C]. Pennsylvania, 1996: 212-221.
- [2] Shor P W. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring [A]. *Proc of the 35th Annual Symposium on the Foundation of Computer Sciences* [C]. Los Alamitos, 1994: 20-22.
- [3] 王凌. 智能优化算法及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001.
- [4] Yang J A, Li B, Zhuang Z Q, et al. Quantum genetic algorithm and its application research in blind source separation [J]. *Micro Systems*, 2003, 24(8): 1518-1523.
- [5] Han K H, Kim J H. Genetic quantum algorithm and its application to combinatorial optimization problem [A]. *IEEE Int Conf on Evolutionary Computation* [C]. La Jolla, 2000: 1354-1360.
- [6] Narayanan A, Moore M. Quantum inspired genetic algorithm [A]. *IEEE Int Conf on Evolutionary Computation* [C]. Nagoya, 1999: 161-661.
- [7] Zhang G X, Jin W D. Improvement of quantum genetic algorithm and its application [J]. *J of Southwest Jiaotong University*, 2000, 38(6): 717-722.

(上接第155页)

## 参考文献(References)

- [1] 李士勇, 夏承光. 模糊控制和智能控制理论与应用[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1990.
- [2] Pappis C P, Mamdani E H. A fuzzy logic controller for a traffic junction [J]. *IEEE Trans on System, Man, and Cybernetics*, 1977, 7(10): 707-717.
- [3] 陈洪, 陈森发. 单路口交通实时模糊控制的一种方法 [J]. *信息与控制*, 1997, 26(3): 227-233.  
(Chen H, Chen S F. A method for real-time traffic fuzzy control of a single intersection [J]. *Information and control*, 1997, 26(3): 227-233.)
- [4] Jee-Hyong Lee, Hyung Lee-Kwang. Distributed and cooperative fuzzy controllers for traffic intersections group [J]. *IEEE Trans on System, Man, and Cybernetics*, 1999, 29(2): 263-271.
- [5] 李艳, 樊晓平. 基于模糊控制的城市交叉路口群信号控制及仿真 [J]. *交通运输工程学报*, 2003, 3(2): 117-119.  
(Li Y, Fan X P. Fuzzy logic control and simulation of urban traffic Intersections group [J]. *J of Traffic and Transportation Engineering*, 2003, 3(2): 117-119.)
- [6] Li Y, Fan X P. Design of signal controllers for urban intersections based on fuzzy logic and weightings [A]. *The 6th IEEE Int Conf on Intelligent Transportation System* [C]. Shanghai, 2003: 867-871.
- [7] 王立新. 自适应模糊系统与控制——设计与稳定性分析 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1995.
- [8] 陈建勤, 吕剑虹, 陈来九. 模糊控制系统的闭环模型及稳定性分析 [J]. *自动化学报*, 1994, 20(1): 1-10.  
(Chen J, Lv J H, Chen L J. Model and stability analysis of fuzzy closed-loop control systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1994, 20(1): 1-10.)