

文章编号: 1001-0920(2005)03-0241-05

区域极点配置问题的研究方法

刘满^{1,2}, 井元伟¹, 张嗣瀛¹

(1. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004; 2. 大连民族学院 应用数理系, 辽宁 大连 116600)

摘要: 对区域极点配置的现有研究成果进行综述, 将区域极点配置的基本方法归结为代数Riccati方程(ARE)方法和线性矩阵不等式(LMI)方法, 列出了基于区域极点配置方法的主要研究成果, 包括最优控制、鲁棒性、 H_2 性能、 H_∞ 性能等方面, 最后给出了几点研究展望。

关键词: 区域极点配置; 代数Riccati方程; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Research approaches on pole assignment in specified region

L I U M a n^{1,2}, J I N G Y u a n w e i¹, Z H A N G S i y i n g¹

(1. School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. Department of Mathematics, Dalian Nationalities University, Dalian 116600, China. Correspondent: L I U M a n, Email: liuman_dl@dlnu.edu.cn)

Abstract: An overview of assigning all poles of a closed-loop system in a specified region is presented. The basic methods on assigning all poles of a closed-loop system in a specified region are summarized in two cases: algebraic Riccati equation (ARE) approach and linear matrix inequality (LMI) approach. Brief works on control objectives with regional pole assignment, such as optimal control, robustness, H_2 performance, H_∞ performance, etc., are listed. Some research perspectives about this problem are given.

Key words: regional pole assignment; algebraic Riccati equation; linear matrix inequality

1 引言

区域极点配置是指将一个线性系统的所有极点配置在一个指定的区域内。对于连续系统, 指定的区域在左半开复平面; 对于离散系统, 指定的区域在以原点为圆心的单位圆内。如果记这个指定区域为 D , 则区域极点配置称为 D -极点配置^[1-7]。

首先介绍将系统极点配置在左半开复平面某一区域内的主要目的。线性系统的瞬时响应与它的极点位置紧密相关, 只要将闭环系统的极点配置在复平面上一个适当区域内, 就能保证系统具有一定的动态和稳态特性。以二阶系统为例, 设极点为 $\lambda = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$, 其阶跃响应可由无阻尼自然频率(或无阻尼振荡频率) $\omega_n = |\lambda|$, 阻尼比(或相对阻尼系

数) ζ 和阻尼自然频率 ω_d 完全决定。如果将 λ 配置在一个适当的区域内, 则可保证 ω_n , ζ 和 ω_d 满足给定的界, 从而保证系统具有满意的瞬时响应。对于要达到的控制目的, 一个有意义的区域是图 1 中的

$$S(\alpha, r, \theta) = \{x + jy \mid |x - \alpha| < r, \arg(x + jy) < \theta\}$$

将闭环极点限定在这个区域内, 可保证系统具有最小衰减度 α , 最小阻尼比 $\zeta = \cos \theta$ 和最大阻尼自然频率 $\omega_n = r \sin \theta$ 。这将进一步保证系统的最大超调、振荡模频率、衰减时间、上升时间、调节时间等过渡过程指标不超过由 ζ , ω_n 和 ω_d 确定的界^[5, 6, 8]。

区域 $S(\alpha, r, \theta)$ 有 3 个特征方程, 不易表达。它

收稿日期: 2003-11-26; 修回日期: 2004-03-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(60274099); 教育部博士点基金项目(20020145007)。

作者简介: 刘满(1964—), 男(蒙古族), 辽宁朝阳人, 副教授, 博士生, 从事复杂控制系统、模糊数学应用的研究; 张嗣瀛(1925—), 男, 山东章丘人, 中国科学院院士, 教授, 博士生导师, 从事微分对策、复杂控制系统等研究。

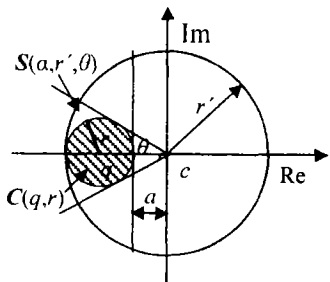


图1 区域 $S(\alpha, r, \theta)$ 和 $C(q, r)$

的内切圆域 $C(q, r) = \{x + jy \mid |x + jy - q| < r\}$ (如图1所示) 特征方程只有一个, 表达比较容易, 并且可与标准的离散时间设计联系起来, 从而易于数值处理. 这一点在用代数 Riccati 方程方法处理时尤其明显. 容易看出, 利用这一圆形区域同样可以达到控制目的, 因此实际应用的是圆域极点约束^[5, 8].

一些学者讨论了极点配置在半平面 $\text{Re}(s) < -\alpha$ 以及垂直带、椭圆、抛物线、双曲线等形状的区域的条件^[3, 5, 6, 8~11], 但这些讨论要么更多的是理论上而非实践上的意义, 要么不能完全满足控制目的. 可以断言, 对于具有实际意义的区域极点配置问题, 研究圆形区域也就足够了.

近十余年来, 许多学者关注 D -极点配置问题, 并取得了许多研究成果. 这是因为对于线性系统, 许多重要控制问题 (如最优控制^[1~5, 11, 12]、鲁棒性^[5~7, 9, 12~26]、无源性^[10]、 H_2 性能^[6, 10, 11, 22, 27]、 H_∞ 性能^[6, 8~11, 14, 22, 28]等) 都可在 D -极点配置的基础上加以研究. 本文以圆形区域作为主要讨论对象, 对 D -极点配置问题的基本方法和主要成果作了总结.

本文中字母和符号说明如下: 大写字母、小写字母、小写白体字母或希腊字母分别表示矩阵、向量和标量, 上标 T 和 $*$ 分别表示实矩阵的转置和复矩阵的共轭转置, $(\bullet) > 0$ (< 0) 表示矩阵 (\bullet) 是正定的 (负定的), \otimes 为矩阵的 Kronecker 乘积.

2 区域极点配置的代数 Riccati 方程 (ARE) 方法

考虑如下连续系统和离散系统:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1a)$$

$$y = Cx, \quad (1b)$$

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (2a)$$

$$y_k = Cx_k. \quad (2b)$$

其中: u 为 m 维输入向量; x 为 n 维状态向量; y 为 p 维输出向量; A, B, C 为适当维数的常值矩阵. 设 (A, B) 是可控的 (或可达的).

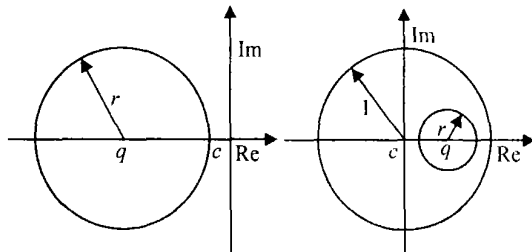
本节所讨论的问题是确定状态反馈

$$u = Fx \text{ 或 } u_k = Fx_k, \quad (3)$$

使得所有闭环极点, 即

$$\det(\lambda I - (A + BF)) = 0 \quad (4)$$

的全部根被配置在圆盘 $C(q, r)$ 内. 圆盘 $C(q, r)$ 对于连续系统如图2(a)所示, 对于离散系统如图2(b)所示.



(a) 左半平面圆盘 (b) 单位圆内圆盘

图2 连续系统和离散系统的 $C(q, r)$

首先讨论矩阵的特征值位于图2圆盘内的条件. 这一条件对于连续和离散的情形都是满足的.

引理 1^[2] 考虑矩阵方程

$$-qA^*P - qPA + A^*PA + (q^2 - r^2)P = -Q, \quad (5)$$

其中 Q 为任意正定矩阵. A 的所有特征值都位于图2的圆盘 $C(q, r)$ 内, 其充分必要条件是方程(5)存在正定解 P .

考虑状态反馈 $u = Fx$ 或 $u_k = Fx_k$. 由引理1, 可得到闭环系统矩阵 $A + BF$ 的全部特征值被配置在圆盘 $C(q, r)$ 内的条件.

定理 1^[2] 考虑如下矩阵方程:

$$-q(A + BF)^*P - qP(A + BF) + (A + BF)^*P(A + BF) + (q^2 - r^2)P = -Q, \quad (6)$$

其中 Q 是正定的. $A + BF$ 的所有特征值位于图2的圆盘 $C(q, r)$ 内, 其充分必要条件是存在正定矩阵 P 满足方程(6).

利用离散的代数 Riccati 方程, 可得出下面的定理, 它给出了系统(1)和(2)的闭环极点被配置在圆盘 $C(q, r)$ 内的状态反馈控制律的设计方法.

定理 2^[2] 状态反馈控制律

$$u = -(r^2R + B^T PB)^{-1} B^T P (A - qI)x. \quad (7)$$

将连续系统(1)或离散系统(2)的所有闭环极点都配置在图2的圆盘 $C(q, r)$ 内, 其中 P 为代数 Riccati 方程

$$P = \frac{(A - qI)^T}{r} P \frac{(A - qI)}{r} + H^T H - \frac{(A - qI)^T}{r} P B (r^2 R + B^T P B)^{-1} B^T P \frac{(A - qI)}{r} \quad (8)$$

的对称正定解, R 为任一正定矩阵, H 为使序偶 (A, H) 可观测的矩阵

对于其他类型的区域(如椭圆形、垂直带形、双曲线形、抛物线形等), 可从文献[3, 5] 中获取控制器的设计方法。其中既包括状态反馈的情形, 也包括输出反馈的情形; 既包括静态控制器设计, 也包括动态控制器设计。

对于某些形状的区域, 可先利用保(共)形映射将其映成另一复平面上的圆域, 然后利用前述的圆形区域极点配置方法进行系统的分析和设计^[4]。

3 区域极点配置的线性矩阵不等式(LMI)方法

为讨论方便, 引入如下定义:

定义1(LMI区域)^[6, 8] 复平面上的一个子集 D 称为一个线性矩阵不等式区域, 记为LMI区域。如果存在对称阵 $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 和矩阵 $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$, 使得

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid L + zM + \bar{z}M^T < 0\}, \quad (9)$$

其中矩阵函数

$$f_D(z) = L + zM + \bar{z}M^T \quad (10)$$

称为 D 的特征函数。特别地, 圆形区域 $C(q, r)$ 的特征函数为

$$f_{C(q, r)}(z) = \begin{bmatrix} -r & q+z \\ q+z & -r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r & q \\ q & -r \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \bar{z} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (11)$$

注1^[6, 8] LMI区域是凸的, 且关于实轴对称。

定理3^[6, 8] 矩阵 A 的所有特征值都位于式(9)的LMI区域 D 内, 其充分必要条件是存在对称矩阵 X , 使得

$$M_D(A, X) < 0, X > 0 \quad (12)$$

其中

$$M_D(A, X) = L \otimes X + M \otimes (AX) + M^T \otimes (AX)^T. \quad (13)$$

特别地, 对于图2所示的圆盘 $C(q, r)$, 式(13)成为

$$\begin{bmatrix} -rX & qX + AX \\ qX + XA^T & -rX \end{bmatrix} < 0, X > 0 \quad (14)$$

注2^[6, 8] 一族LMI区域的交集仍是LMI区域。以两个集合交的情形说明如下: 设有两个LMI区域 D_1 和 D_2 , 它们的特征函数分别为 f_{D_1} 和 f_{D_2} , 则交集 $D = D_1 \cap D_2$ 为LMI区域, 且具有特征函数 $f_{D_1 \cap D_2} = \text{Diag}(f_{D_1}, f_{D_2})$ 。矩阵 A 的全部特征值位于LMI区域 $D = D_1 \cap D_2$ 内, 其充分必要条件是存在共同的对称正定矩阵 X , 使得 $M_{D_1}(A, X) < 0$ 和 $M_{D_2}(A, X) < 0$ 同时成立, 并且采用同一变量 X 不会带来任何保守性。所有这些结论都可推广到有限多个LMI

区域的交集的情形。

基于以上基本原理, 可利用基于线性矩阵不等式的区域极点配置方法, 综合考虑其他控制问题。

注3 ARE方法与LMI方法的异同点: ARE方法可给出所考虑问题的精确隐式解析解, 但ARE是非线性方程, 因而不易得到数值解。当所研究的系统很复杂或控制问题为多目标时, 这一点尤其突出。因此将ARE转化成LMI, 因为LMI是线性的, 利用LMI方法容易得到数值解, 并且可用较成熟的数学软件来解LMI, 从而使求解变得更加容易。但这种方法也有它的局限性, 在多目标控制问题中, 其解具有较大的保守性。如何克服这一缺点也是有待进一步研究的问题。

4 研究成果一览

综上所述, D -极点配置是进行系统分析和设计的一种有效方法, 现已取得了许多研究成果。下面分为两种研究方法列出这方面的主要工作。

4.1 基于ARE方法的工作

Furuta和Kim等^[2, 4]研究了最优控制、调节器设计、增益裕度和相位裕度等问题; 此外, Shieh等^[3]、Haddad等^[5]、袁廷奇等^[12]讨论了最优控制问题; Haddad等^[5]、Saeki^[9]、袁廷奇等^[12]、Zhu等^[13]、Wang等^[14, 17, 24]、张端金等^[19, 23]、蒋培刚等^[25]、李罗文等^[26]研究了系统的鲁棒性; Shieh等^[3]讨论了容错控制问题; Saeki^[9]、Wu等^[11]、Wang等^[14]研究了 H_2 或 H_∞ 控制; Saeki^[9]、Wang等^[14]、张端金等^[23]讨论了多目标控制问题; 李罗文等^[26, 29, 30]利用矩阵广义逆给出了一些圆形区域极点配置的条件; 王子栋等^[14, 17, 31, 32]通过设计滤波增益对线性随机系统讨论了极点约束下的状态估计问题。有的学者是通过状态反馈设计控制器^[2, 3, 4, 12, 14, 19, 23, 25, 30], 有的学者是通过输出反馈设计控制器^[5, 13, 24, 26, 32]。这部分最具代表性的文献是[2, 7, 13], 而前沿工作可参见文献[9, 23]。

4.2 基于LMI方法的工作

俞立等^[6, 18, 20]、Garcia等^[7]、徐胜元等^[15, 16]、钱龙军等^[21]、Farsangi等^[22]对某些不确定系统研究了其鲁棒性; 俞立^[6]、Chilali等^[8]、Carsten等^[10]、Farsangi等^[22]、张家凡等^[27]、程相权等^[28]给出了系统的 H_2 或 H_∞ 设计方法; 俞立^[6]、Carsten等^[10]、Farsangi等^[22]讨论了 H_2/H_∞ 混合控制问题; 钱龙军等^[21]、程相权等^[28]讨论了满意控制问题; 徐胜元等^[15, 16]、钱龙军等^[21]、程相权等^[28]分别对广义系统和线性随机系统给出了区域极点配置的条件。同ARE方法的情形一样, 有的学者是通过状态反馈设计控制器^[7, 8, 15, 18, 27], 有的学者是通过输出反馈设计

控制器^[8, 10, 16, 20, 21, 28]。这部分最具代表性的文献是[6, 8, 10], 对于输出反馈的情形, 文献[10]作了很好的综述。这方面的前沿工作可参见文献[22, 28]。

5 研究展望

在对系统的分析和设计中, 首先要考虑的是系统的稳定性问题, 而线性系统的稳定性与其极点的位置紧密相关。在综合考虑系统的各种性能时(如鲁棒性、无源性、容错性、 H_2 和 H_∞ 等), 如果系统极点配置在指定位置, 则不能满足系统综合的要求。为此, 需要根据分析和设计的目的, 将系统极点配置在指定区域内。因此, D -极点配置问题是一个具有实际意义和吸引力的研究领域。

作者认为可沿着以下3个方向进一步开展研究工作:

1) 考虑广义系统、组合系统等复杂系统基于区域极点配置的系统分析和设计问题。首先考虑这些系统的极点配置在某一区域的条件, 其中一个重要方面是根据系统结构的特殊性, 找出相应的代数Riccati方程或线性矩阵不等式的特殊性, 以使问题的求解变得简便(对于广义线性系统, Xu等^[15, 16]已做了一些工作)。在此基础上, 考虑系统的其他性能, 进行系统的综合设计。将互联项视为积极作用来研究组合系统, 是长期以来未能很好解决的问题。从区域极点配置这一角度, 研究协调控制中互联项的积极作用, 是一项具有开创性的工作。

2) 对系统考虑多目标控制问题。一个实际系统, 为达到某种控制目的, 需要考虑多种指标的约束。这方面已有的成果还比较少, 或者说考虑的指标数不足以达到控制目的^[6, 9, 10, 14, 22, 23]。因此, 基于区域极点配置的多目标控制是一个重要的研究方向。

3) 改进现有的研究方法。例如, 在多目标控制问题中, 为了求解的便利, 已有的研究方法是将各个指标所对应的方程或不等式的变量 X 设成共同的, 而这一共同性带来的是解的保守性。如何减弱这种保守性, 是改进系统性能的一个关键, 也是一个很有意义且具挑战性的课题。

参考文献(References)

[1] Mori Y, Shimemura Y. On a design method for feedback control law to locate the eigenvalues in a specified region[J]. *SICE*, 1980, 16(3): 462-463

[2] Furuta K, Kim S B. Pole assignment in a specified disk[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1987, 32(5): 423-427.

[3] Shieh L S, Dib H M, Ganesan S, et al. Optimal pole-placement for state-feedback systems possessing integrity[J]. *Int J Systems Science*, 1988, 19(8):

1419-1435

[4] Sang-bong Kim, Katsuhisa Furuta. Regulator design with poles in a specified region[J]. *Int J Control*, 1988, 47(1): 143-160

[5] Wassim M Haddad, Dennis S Bernstein. Controller design with regional pole constraints[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(1): 54-69.

[6] 俞立. 鲁棒控制: LM I方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002

[7] Gemain Garcia, Jacques Bernussou. Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(1): 184-190

[8] Mahmoud Chilali, Pascal Gahinet. H_∞ design with pole placement constraints: An LM I approach[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(3): 358-367.

[9] Masami Saeki. On the pole location of a system designed by robust stability-degree assignment[J]. *Systems and Control Letters*, 2001, 42(2): 353-361.

[10] Carsten W Scherer, Pascal Gahinet, Mahmoud Chilali. Multiobjective output-feedback control via LM I optimization[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(7): 896-911.

[11] Wu J L, Lee T T. A new approach to optimal regional pole placement[J]. *Automatica*, 1997, 33(10): 1917-1921.

[12] 袁廷奇, 刘文江. 区域极点配置控制系统的鲁棒摄动界[J]. *西安交通大学学报*, 2000, 34(7): 99-102
(Yuan T Q, Liu W J. Perturbation bounds of linear quadratic feedback control system with specified region[J]. *J of Xi'an Jiaotong University*, 2000, 34(7): 99-102)

[13] Zhu J H, Guo Z. Robust circular pole placement via dynamic output feedback for perturbed linear system[J]. *Control Theory and Applications*, 1996, 13(4): 489-494

[14] Wang Z D, Tang G Q. Studies on multiobjective state-feedback control for linear continuous systems with variance constraints[J]. *Control Theory and Applications*, 1998, 15(1): 39-47.

[15] 徐胜元, 齐延信, 杨成梧. 不确定广义系统的圆形区域极点配置[J]. *信息与控制*, 1999, 28(3): 168-171
(Xu S Y, Qi Y X, Yang C W. Pole assignment in a specified circular region for uncertain singular systems[J]. *Information and Control*, 1999, 28(3): 168-171)

[16] 徐胜元, 徐慧玲, 杨成梧. 广义系统的圆形区域极点配置: 输出反馈情形[J]. *南京理工大学学报*, 2000, 24(1): 49-51
(Xu S Y, Xu H L, Yang C W. Pole assignment in a specified circular region for general systems: Output

- feedback case[J]. *J of Nanjing University of Science and Technology*, 2000, 24(1): 49-51.)
- [17] 王子栋, 郭治 误差方差及圆形区域极点约束下状态估计问题的研究: 离散时间情形[J]. *控制理论与应用*, 1995, 12(6): 681-686
(Wang Z D, Guo Z A study of error variance and circular pole-constrained state estimation for discrete systems[J]. *Control Theory and Applications*, 1995, 12(6): 681-686.)
- [18] 俞立 具有区域极点和方差约束的不确定连续系统鲁棒控制[J]. *自动化学报*, 2000, 26(4): 509-514
(Yu L. Robust control of uncertain systems with regional pole and variance constraints [J]. *Acta Automation Sinica*, 2000, 26(4): 509-514.)
- [19] 张端金, 吴捷, 杨成梧 Delta算子系统圆形区域极点配置的鲁棒性[J]. *控制与决策*, 2001, 16(3): 337-340
(Zhang D J, Wu J, Yang C W. Robustness of pole assignment in a circular region for Delta operator systems[J]. *Control and Decision*, 2001, 16(3): 337-340.)
- [20] 俞立, 陈国定, 杨马英 不确定系统的鲁棒输出反馈区域极点配置[J]. *控制理论与应用*, 2002, 19(2): 244-246
(Yu L, Chen G D, Yang M Y. Robust regional pole assignment of uncertain systems via output feedback controllers [J]. *Control Theory and Applications*, 2002, 19(2): 244-246.)
- [21] 钱龙军, 盛安冬, 郭治 随机离散系统的满意鲁棒控制[J]. *南京理工大学学报*, 2002, 26(3): 274-278
(Qian L J, Sheng A D, Guo Z Robust satisfactory control for stochastic discrete systems [J]. *J of Nanjing University of Science and Technology*, 2002, 26(3): 274-278.)
- [22] Farsangi M M, Song Y H, Tan M. Multiobjective design of damping controllers of devices via mixed H_2/H_∞ with regional pole placement[J]. *Electrical Power and Energy Systems*, 2003, 25: 339-346
- [23] 张端金, 王忠勇, 吴捷 Delta算子不确定系统的多目标鲁棒 H_∞ 控制[J]. *控制与决策*, 2003, 18(2): 164-168
(Zhang D J, Wang Z Y, Wu J. Multiobjective robust H_∞ control for the delta operator formulated uncertain systems[J]. *Control and Decision*, 2003, 18(2): 164-168.)
- [24] 王子栋, 郭治 基于输出反馈的区域极点配置[J]. *南京理工大学学报*, 1998, 22(2): 97-100
(Wang Z D, Guo Z A parametric approach to regional pole assignment[J]. *J of Nanjing University of Science and Technology*, 1998, 22(2): 97-100.)
- [25] 蒋培刚, 苏宏业, 褚健, 等 线性不确定离散系统区域极点配置的状态反馈实现方法[J]. *控制与决策*, 1999, 14(1): 81-84
(Jiang P G, Su H Y, Chu J, et al Specified disk pole assignment for linear discrete uncertain systems via state feedback[J]. *Control and Decision*, 1999, 14(1): 81-84.)
- [26] 李罗文, 王子栋, 郭治 基于区域极点配置的状态观测器的统一代数刻画[J]. *信息与控制*, 1997, 26(1): 28-32
(Li L W, Wang Z D, Guo Z The algebraic parameterization of regional pole assignment for state observer[J]. *Information and Control*, 1997, 26(1): 28-32.)
- [27] 张家凡, 郑晓, 胡志刚 具有极点约束的线性振动系统的一种主动控制设计: LM I方法[J]. *振动与冲击*, 2002, 21(3): 67-69
(Zhang J F, Zheng X, Hu Z G Active control design for linear vibration systems with regional pole placement: An LM I approach[J]. *J of Vibration and Shock*, 2002, 21(3): 67-69.)
- [28] 程相权, 郭治, 王远钢 满足 H_∞ 、区域极点和方差指标约束的动态输出反馈控制研究[J]. *控制与决策*, 2002, 17(3): 283-286
(Cheng X Q, Guo Z, Wang Y G On dynamic output control with constraints on H_∞ pole placement and covariance [J]. *Control and Decision*, 2002, 17(3): 283-286.)
- [29] 李罗文, 王子栋, 郭治 基于圆形区域极点配置的降维状态观测器设计[J]. *南京理工大学学报*, 1997, 21(2): 169-172
(Li L W, Wang Z D, Guo Z The research and design of regional pole assignment for reduced-order state observers[J]. *J of Nanjing University of Science and Technology*, 1997, 21(2): 169-172.)
- [30] 王子栋, 郭治 基于广义逆理论的区域极点配置研究[J]. *南京理工大学学报*, 1999, 23(1): 19-22
(Wang Z D, Guo Z Regional pole assignment based on generalized inverse theory [J]. *J of Nanjing University of Science and Technology*, 1999, 23(1): 19-22.)
- [31] 王子栋, 郭治 误差方差及圆形区域极点约束下状态估计问题的研究: 连续时间情形[J]. *自动化学报*, 1996, 22(1): 92-95
(Wang Z D, Guo Z A study of error variance and circular pole-constrained state estimation for continuous systems [J]. *Acta Automation Sinica*, 1996, 22(1): 92-95.)
- [32] 王子栋, 郭治 配置区域极点的约束方差下动态输出反馈控制[J]. *自动化学报*, 1996, 22(6): 681-686
(Wang Z D, Guo Z Variance-constrained dynamic output feedback control with regional pole assignment [J]. *Acta Automation Sinica*, 1996, 22(6): 681-686.)