

文章编号: 1001-0920(2005)03-0266-05

## 受扰线性离散系统的前馈-反馈最优控制

唐功友, 马慧, 张宝琳

(中国海洋大学 信息科学与工程学院, 山东 青岛 266071)

**摘要:** 研究具有已知动态特性但未知初始条件的持续外界扰动的线性离散系统最优控制问题 给出了前馈-反馈最优控制律的存在唯一性条件, 并提出了最优控制律的设计算法 通过降维扰动观测器解决了前馈-反馈最优控制律的物理不可实现问题 对近海结构物振动控制的实例仿真表明, 该设计算法易于实现, 在抑制外部持续扰动和鲁棒性方面优于经典的状态反馈最优控制

**关键词:** 线性离散系统; 持续扰动; 扰动观测器; 前馈-反馈控制; 最优控制

**中图分类号:** TP13 **文献标识码:** A

## Feedforward and feedback optimal control for discrete linear systems with disturbances

TANG Gong-you, MA Hui, ZHANG Bao-lin

(College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266071, China)

Correspondent: TANG Gong-you, E-mail: gtang@ouc.edu.cn

**Abstract:** Optimal control problem is studied for linear discrete systems affected by external persistent disturbances with known dynamic characteristics but unknown initial conditions. The existence and uniqueness conditions of feedforward and feedback optimal control law is proposed. The algorithm of solving the optimal control problem is presented. A reduced-order disturbance observer is designed to get a physically realizable feedforward and feedback optimal controller. A vibration control example for offshore structure shows that the control law is efficient and more robust than the classical state feedback optimal control law with respect to errors produced by the external disturbances.

**Key words:** discrete linear systems; persistent disturbances; disturbance observer; feedforward and feedback control; optimal control

### 1 引言

控制系统总是在各种外部干扰作用下运行 系统的外部扰动主要分为随机扰动和确定性扰动 对于确定性扰动最优抑制问题的研究, 主要集中在对正弦扰动和周期扰动<sup>[1-5]</sup>的抑制方面 实际上, 控制系统的性能受到各种复杂外在扰动的影响 实际应用包括对海洋平台的实时振动控制, 其中扰动来自风力或海浪力, 其动态特性可由波浪理论中的MORISON方程确定<sup>[6,7]</sup>; 此外, 还包括飞机姿态控制

中衰减风剪应力<sup>[8]</sup>, 直升机及工业设计中降低振动, 汽车工业中减少噪声<sup>[9-11]</sup>, 磁盘驱动中解决周期性扰动问题<sup>[12]</sup>等 因此, 研究更一般意义的外部扰动作用下系统的最优控制问题, 具有重要的理论意义和应用价值

本文研究在具有已知动态特征及未知初始条件的外部扰动作用下, 线性离散系统的最优控制问题 首先对所研究的系统模型进行分析, 提出了较正弦扰动和周期扰动更一般化的数学描述; 然后给出了

收稿日期: 2004-05-18; 修回日期: 2004-07-12

基金项目: 国家自然科学基金项目(60074001); 国家863计划项目(2001AA 612022); 山东省自然科学基金项目(Y2000G02).

作者简介: 唐功友(1953-), 男, 山东烟台人, 教授, 博士生导师, 从事控制理论与应用、计算机控制等研究; 马慧(1979-), 女, 山东日照人, 博士生, 从事控制理论与应用、计算机控制的研究

前馈-反馈最优控制律的存在唯一性条件, 并提出了控制律的具体设计算法; 最后通过引进降维扰动观测器, 解决了前馈-反馈最优控制律的物理可实现问题. 对近海结构物振动控制的仿真实例说明该设计方法效率高, 容易实现, 并且对于扰动的鲁棒性和状态收敛远远优于经典的状态反馈最优控制.

## 2 问题提法

考虑带有持续扰动的线性离散系统

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Dv(k), \\ x(0) = x_0, k = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $A, B, D$  为适当维数的常量矩阵;  $x \in R^n$  为状态向量;  $x_0$  为已知的初始状态向量;  $u \in R^m$  为控制向量; 扰动  $v \in R^p$  由下列外系统产生:

$$w(k+1) = Gw(k), v(k) = Fw(k). \quad (2)$$

其中:  $w \in R^q, G \in R^{q \times q}, F \in R^{p \times q}$  ( $p < q$ ) 为已知的常量矩阵. 假设外系统(2)完全能观测, 初始条件  $w(0)$  可以是未知的, 并假设  $G$  的特征值满足

$$|\lambda(G)| < 1, i = 1, 2, \dots, q, \quad (3)$$

且在单位圆上特征值为矩阵  $G$  的最小多项式的单根.

**注 1** 假设(3)表明, 外系统(2)是稳定的但并不一定渐近稳定. 假设(3)是必要的, 否则, 扰动分量中将至少有一个趋向无穷大. 对于无限时域性能指标的最优控制, 其性能指标将趋向无穷大.

**注 2** 外系统(2)是阶跃扰动、正弦扰动、周期扰动以及更广泛的持续扰动的一般形式. 例如, 外系统为下列二阶形式:

$$\begin{cases} v_i(k+2) + g_{i1}v_i(k+1) + \\ g_{i2}v_i(k) = 0, i = 1, 2, \dots, p. \end{cases} \quad (4)$$

如果  $\lambda^2 + g_{i1}\lambda + g_{i2} = 0$  的根为共轭的单位复数, 则外系统(2)可描述具有已知频率但未知振幅和初相角的正弦扰动

$$v(k) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \sin(\omega(k) + \varphi_1) \\ \vdots \\ \alpha_p \sin(\omega_p k + \varphi_p) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

对于形如式(5)的正弦扰动的离散系统(1)的最优控制问题, 文献[3]作了详细讨论. 类似地, 如果外系统(2)的所有极点都是互异的单位复数, 则可描述未知振幅和初相角的周期扰动. 如果外系统(2)存在  $\lambda = 1$  的极点, 则对应于阶跃扰动的分量

根据外系统的不同情况, 可以选择不同的性能指标. 如果外系统(2)是渐近稳定的, 则可选取常规的无限时域二次型性能指标

$$J = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{k=0}^k [x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)] \quad (6)$$

其中:  $Q \in R^{n \times n}$  是半正定矩阵,  $R \in R^{m \times m}$  是正定矩

阵.

如果外系统(2)至少有一个单位极点, 则外部扰动  $v$  不趋向于零, 所以状态向量  $x$  和控制量  $u$  至少有一个不趋向于零. 对于这类系统的最优控制, 如果选择通常的无限时域二次型性能指标, 则其性能指标值是不收敛的. 在这种情况下, 可选取如下形式的平均二次型性能指标:

$$J(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N [x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)] \quad (7)$$

本文的目的是针对具有持续扰动(2)的线性离散系统(1)寻找最优控制  $u^*(k)$ , 使由式(6)或(7)描述的性能指标  $J$  取最小值. 对于由式(6)或(7)描述的性能指标, 其最优控制律的形式和推导过程是相同的.

## 3 前馈-反馈最优控制律

本节讨论由线性离散系统(1)、(2)和性能指标(6)或(7)描述的最优控制问题. 为证明前馈-反馈最优控制律的存在唯一性, 引入下述引理:

**引理 1**<sup>[13]</sup> 设  $A_1 \in R^{n \times n}, B_1 \in R^{n \times m}, C_1 \in R^{n \times m}$ , 则 Stein 矩阵方程  $A_1XB_1 - X = C_1$  的解  $X$  唯一存在, 其充分必要条件是

$$\lambda(A_1)\lambda(B_1) \neq 1, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m.$$

下面给出前馈-反馈最优控制律的存在唯一性条件, 并给出最优控制律的设计算法.

**定理 1** 考虑由式(1)和(2)定义的线性离散系统关于二次型性能指标(6)或(7)的最优控制问题. 假设下列条件成立:

1)  $(A, B)$  完全能控,  $(A, C)$  完全能观测, 其中  $C$  为满秩矩阵, 由  $Q = C^TC$  定义;

2) 假设(3)成立.

则前馈-反馈最优控制律存在且唯一. 前馈-反馈最优控制律可表示为

$$u^*(k) = -S^{-1}B^T[PAx(k) + PDv(k) + \bar{P}Gw(k)] \quad (8)$$

其中:  $S = R + B^TPB$ ;  $P$  为离散 Riccati 矩阵方程的唯一正定解, 即

$$A^T(I - PBS^{-1}B^T)PA - P + Q = 0; \quad (9)$$

$\bar{P}$  为 Stein 矩阵方程的唯一解, 即

$$\begin{aligned} A^T(I - PBS^{-1}B^T)\bar{P}G - \bar{P} = \\ -A^T(I - PBS^{-1}B^T)PDF. \end{aligned} \quad (10)$$

**证明** 根据最优控制的必要条件, 由式(1)和(2)定义的系统关于性能指标(6)或(7)的最优控制律为

$$u^*(k) = -R^{-1}B^T\lambda(k+1). \quad (11)$$

其中  $\lambda(k)$  是以下两点边值问题的解:

$$\begin{cases} x(k+1) = \\ Ax(k) - BR^{-1}B^T\lambda(k+1) + Dv(k), \\ Qx(k) + A^T\lambda(k+1) - \lambda(k) = 0, \\ x(0) = x_0, \lambda(\cdot) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

为了求解式(12), 令

$$\lambda(k) = Px(k) + \bar{P}w(k). \quad (13)$$

由式(12)的第1式以及(2)和(13), 可得到

$$\begin{aligned} B^T\lambda(k+1) &= \\ B^TPx(k+1) + B^T\bar{P}w(k+1) &= \\ B^TP[Ax(k) - BR^{-1}B^T\lambda(k+1) + \\ Dv(k)] + B^T\bar{P}Gw(k). \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} R^{-1}B^T\lambda(k+1) &= \\ S^{-1}B^T[PAx(k) + PDv(k) + \bar{P}Gw(k)] \end{aligned} \quad (14)$$

将式(14)代入(11), 得到前馈-反馈最优控制律(8).

下面证明前馈-反馈最优控制律(8)的存在唯一性. 显然, 要证明式(8)的存在唯一性, 只要证明矩阵  $P$  和矩阵  $\bar{P}$  的存在唯一性即可. 将式(1), (2)和(13)代入(12)的第2式, 得

$$\begin{aligned} \lambda(k) &= Qx(k) + A^T\lambda(k+1) = \\ Qx(k) + A^T[Px(k+1) + \bar{P}w(k+1)] &= \\ [Q + A^T(I - PBS^{-1}B^T)PA]x(k) + \\ A^T(I - PBS^{-1}B^T)(PDF + \bar{P}G)w(k). \end{aligned} \quad (15)$$

比较式(13)和(15), 得

$$\begin{aligned} [A^T(I - PBS^{-1}B^T)PA - P + Q]x(k) + \\ [A^T(I - PBS^{-1}B^T)(PDF + \bar{P}G) - \\ \bar{P}]w(k) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

比较式(16)中  $x$  和  $w$  的系数矩阵, 可得到离散 Riccati 矩阵方程(9)和 Stein 矩阵方程(10). 由最优控制理论知, 如果定理1的条件1)成立, 则 Riccati 矩阵方程(9)有唯一正定解  $P$ .

下面证明 Stein 矩阵方程(10)解的存在唯一性. 根据最优控制理论, 可知下列不等式成立:

$$|\lambda[A^T(I - PBS^{-1}B^T)]| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

注意到定理1的条件2), 则下列不等式成立:

$$\begin{aligned} |\lambda[A^T(I - PBS^{-1}B^T)]\lambda(G)| < 1, \\ i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, q \end{aligned}$$

由引理1知 Stein 矩阵方程(10)的解  $\bar{P}$  存在且唯一.

当  $P$  和  $\bar{P}$  唯一确定后, 代入式(8)可唯一确定  $u^*(k)$ .

**注3** 对于系统(1)的最优控制问题, 也可采用有限时域的二次型性能指标

$$J(N) = x^T(N)Q_Nx(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k)Qx(k) +$$

$$u^T(k)Ru(k)], \quad (17)$$

其中  $Q_N, R^{n \times n}$  为半正定矩阵. 对于性能指标(17), 最优控制律为

$$\begin{aligned} u^*(k) &= \\ -S^{-1}(k+1)B^T[P(k+1)Ax(k) + \\ P(k+1)Dv(k) + \bar{P}(k+1)Gw(k)] \end{aligned}$$

其中:  $S(k) = R + B^TP(k)B$ ;  $P(k)$  为 Riccati 矩阵差分方程的唯一半正定解, 即

$$\begin{aligned} P(k) &= A^TP(k+1)A + Q - A^TP(k+1)BS^{-1}(k+1)B^TP(k+1)A, \\ P(N) &= Q_N; \end{aligned}$$

$\bar{P}(k)$  为下列 Stein 矩阵方程的唯一解:

$$\begin{aligned} A^T[I - P(k+1)BS^{-1}(k+1)B^T]\bar{P}(k+1)G - \bar{P}(k) &= \\ -A^T[1 - P(k+1)BS^{-1}(k+1)B^T]P(k+1)DF. \end{aligned}$$

#### 4 前馈控制的物理可实现问题

上节得到的式(8)描述的最优控制律  $u^*(k)$  中, 前馈控制部分含有  $w(k)$ , 即含有外系统(2)的状态向量, 这样的控制律是物理不可实现的. 因此, 实际应用中需要对式(8)作适当处理, 使其物理可实现. 本节用降维扰动观测器解决前馈控制的物理不可实现问题.

在外系统(2)中, 将  $G$  和  $w(k)$  分别记为

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}.$$

其中:  $w_1 \in R^p, w_2 \in R^{q-p}, G_{ij} (i, j = 1, 2)$  为适当维数的常量矩阵.

不失一般性, 令  $F = [I_p \quad 0]$ , 即  $v = w_1$ . 则式(2)可重写成

$$\begin{cases} w_1(k+1) = G_{11}w_1(k) + G_{12}w_2(k), \\ w_2(k+1) = G_{21}w_1(k) + G_{22}w_2(k), \\ v(k) = w_1(k). \end{cases} \quad (18)$$

注意到  $(G, F)$  是完全能观测的, 所以  $(G_{22}, G_{12})$  也完全能观测. 由于  $v(k)$  是系统(18)的输出, 可按下表来构造降维扰动观测器:

$$\begin{cases} \mathcal{Q}(k+1) = \\ (G_{22} - KG_{12})\mathcal{Q}(k) + [(G_{21} - KG_{11}) + \\ (G_{22} - KG_{12})K]v(k), \\ \hat{w}_2(k) = \mathcal{Q}(k) + Kv(k), \end{cases} \quad (19)$$

以获得  $w_2(k)$  的估计值  $\hat{w}_2(k)$ . 其中  $K$  是降维扰动观测器的增益矩阵. 注意到  $v \in R^p$ , 故该降维扰动观测器是  $q-p$  维的.

记  $\tilde{w}_2(k) = w_2(k) - \hat{w}_2(k)$  为观测误差. 下面证明观测误差趋近于零的条件, 并由此得到降维扰

动观测器的增益矩阵  $K$  的设计依据 对观测误差  $\tilde{w}_2(k)$  求向前差分, 得

$$\begin{aligned} \tilde{w}_2(k+1) &= \hat{w}_2(k+1) - w_2(k+1) = \\ &= (G_{22} - KG_{12})\tilde{w}_2(k). \end{aligned}$$

因为  $(G_{22}, G_{12})$  是完全能观测的, 所以可选择合适的增益阵  $K$  来任意配置  $G_{22} - KG_{12}$  的全部特征值, 使得  $\tilde{w}_2(k)$  以要求的衰减率趋向零, 即

$$\lim_k \tilde{w}_2(k) = \lim_k (G_{22} - KG_{12})^k \tilde{w}_2(0) = 0$$

由式(19)的第2式得  $w(k)$  的重构状态

$$\hat{w}(k) = \begin{bmatrix} v(k) \\ \hat{w}_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_p \\ K \end{bmatrix} v(k). \quad (20)$$

在最优控制律(8)中用  $w(k)$  取代  $\hat{w}(k)$ , 并用式(19)和(20)得到物理可实现的前馈-反馈动态最优控制律

$$\begin{cases} \mathcal{Q}(k+1) = \\ (G_{22} - KG_{12})\Phi_k + [(G_{21} - KG_{11}) + \\ (G_{22} - KG_{12})K]v(k), \\ u^*(k) = -S^{-1}B^T[PAx(k) + (PD + \\ \bar{P}G\bar{K})v(k) + \bar{P}G_2\Phi_k] \end{cases} \quad (21)$$

其中

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} I_p \\ K \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} G_{12} \\ G_{22} \end{bmatrix}.$$

为描述闭环系统的结构, 令系统的初始条件全部为零, 并对式(1)和(21)进行  $z$  变换, 得

$$\begin{aligned} X(z) &= (zI - A)^{-1}(BU(z) + DV(z)), \\ \Phi(z) &= (zI - G_{22} + KG_{12})^{-1}[(G_{21} - \\ &KG_{11}) + (G_{22} - KG_{12})K]V(z), \\ U(z) &= -S^{-1}B^T[PA X(z) + (PD + \\ &\bar{P}G\bar{K})V(z) + \bar{P}G_2\Phi(z)]. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \\ PD + \bar{P}G\bar{K} + \bar{P}G_2(zI - G_{22} + \\ &KG_{12})^{-1}[(G_{21} - KG_{11}) + (G_{22} - KG_{12})K], \end{aligned}$$

则闭环系统的  $z$  变换表达式可描述为

$$\begin{cases} X(z) = (zI - A)^{-1}(BU(z) + DV(z)), \\ U(z) = -S^{-1}B^T[PA X(z) + \Omega(z)V(z)] \end{cases} \quad (22)$$

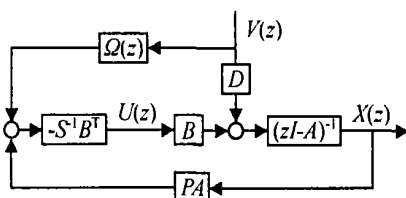


图 1 闭环系统结构

由式(22)可得到图1所示的物理可实现的闭环系统结构

### 5 实例仿真

本节通过对受水平波浪力作用的近海结构物(海洋平台)振动控制的仿真例子<sup>[6]</sup>, 考察所提出的前馈-反馈最优控制律的有效性. 取采样周期  $T = 0.1$  s, 则原系统的离散化模型由式(1)描述, 外部扰动的动态特性由外系统(2)描述. 其中

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0.9878 & 0.0988 \\ -0.2436 & 0.9723 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0.0014 \\ 0.0271 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.0014 \\ 0.0271 \end{bmatrix}, \\ G &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1.996 \end{bmatrix}, w(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1256 \end{bmatrix}, \\ F &= [1 \ 0], x_0 = [0 \ 0]^T. \end{aligned}$$

系统的状态变量  $x_1$  和  $x_2$  分别表示近海结构物的位置和速度, 扰动  $v$  表示近海结构物承受的波浪力. 取二次型平均性能指标

$$J(N) = \lim_N \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (50x_1^2(k) + 0.23u^2(k)).$$

为得到最优控制律, 解 Riccati 矩阵方程(9)和 Stein 矩阵方程(10), 分别得到

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} 323.3101 & 69.2650 \\ 69.2650 & 60.6905 \end{bmatrix}, \\ \bar{P} &= \begin{bmatrix} 68.2229 & -75.7444 \\ 22.1614 & -17.5515 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

取  $\lambda_{1,2}(G_{22} - KG_{12}) = 0.01 \pm 0.01i$ , 则  $K = 1.9861$ .

为验证前馈-反馈最优控制律的效果, 对近海结构物在不同控制规律下的响应进行比较. 系统状态分量和最优控制律的仿真结果分别如图2和图3所示. 其中: 点划线表示没有控制作用(UC)的情况, 虚线表示经典状态反馈最优控制律(CLOC)的情况, 实线表示前馈-反馈最优控制律(FFOC)的情况.

以  $J_1$  表示 UC 的性能指标值,  $J_2$  表示采用

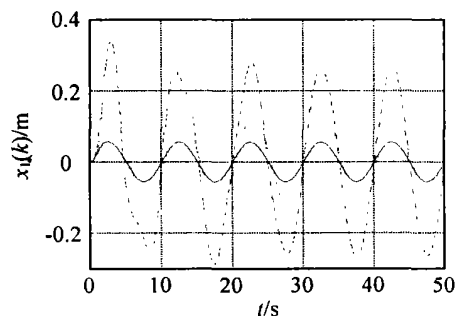


图 2 结构物的位置向量曲线

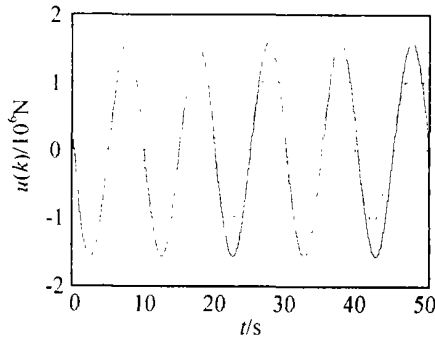


图3 控制变量曲线

CLOC 得到的性能指标值,  $J_3$  表示采用 FFOC 得到的性能指标值, 则  $J_1 = 0.0178$ ,  $J_2 = 0.0057$ ,  $J_3 = 0.0036$ 。FFOC 与 UC 和 CLOC 相比, 性能指标值分别降低了 79.78% 和 36.84%。

从仿真结果可以看出, 在本文提出的 FFOC 控制下, 由于海浪作用产生的近海结构物的振荡明显降低, FFOC 对外部扰动的抑制能力和鲁棒性远远优于 CLOC。

## 6 结 论

本文针对具有已知动态特性但未知初始条件的外部扰动的线性离散系统, 研究了前馈-反馈最优控制律的设计问题, 所研究的对象是比具有正弦扰动或周期扰动的系统更为一般的系统。给出了前馈-反馈最优控制律的存在唯一性条件, 并提出了前馈-反馈最优控制律的设计算法。通过引入降维扰动观测器解决了前馈控制的物理不可实现问题。对近海结构物振动控制的实例仿真表明, 与经典的状态反馈最优控制相比, 该前馈-反馈最优控制律对外部动态扰动的抑制效果更好, 鲁棒性更强, 且易于实现。

## 参考文献(References)

- [1] Blanchini F, Sznajder M. Persistent disturbance rejection via static-state feedback [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(6): 1127-1131.
- [2] Dahleh M A, Shamma J S. Rejection of persistent bounded disturbances: Nonlinear controllers [J]. *Systems and Control Letters*, 1992, 18(4): 245-252.
- [3] Lindquist A, Yakubovich V A. Optimal damping of forced oscillations in discrete-time systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(6): 786-802.
- [4] Tang G Y. Feedforward and feedback optimal control for linear systems with sinusoidal disturbances [J]. *High Technology Letters*, 2001, 7(4): 16-19.
- [5] Sievers L A, Von Flotow A H. Comparison and extensions of control methods for narrow-band disturbance rejection [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1992, 40(10): 2377-2391.
- [6] Li H, Hu S J, Cheng Z M. Multiple-step predictive control for offshore structures [J]. *China Ocean Engineering*, 1999, 13(3): 231-246.
- [7] Bisht R S, Jain A K. Wind and wave induced behaviour of offshore guyed tower platforms [J]. *Ocean Engineering*, 1998, 25(7): 501-519.
- [8] Miele A. Optimal trajectories and guidance trajectories for aircraft flight through windshears [A]. *Proc 29th IEEE Conf on Decision and Control* [C]. Honolulu, 1990: 737-746.
- [9] Bittanti S, Lorito F, Strada S. An LQ approach to active control of vibrations in helicopters [J]. *ASME J Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1996, 118(3): 482-488.
- [10] Shoureshi R, Brackney L, Kubota N, et al. A modern control approach to active noise control [J]. *ASME J Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1993, 115(4): 673-678.
- [11] Tokhi M O, Veres S M. Intelligent adaptive active control of noise and vibration [A]. *Proc 14th IFAC World Congress* [C]. Beijing, 1999: 477-481.
- [12] Sacks A, Bodson M, Khosla P. Experimental results of adaptive periodic disturbance cancellation in a high performance magnetic disk drive [J]. *ASME J Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1996, 118(3): 416-424.
- [13] Lancaster P, Lerer L, Tismenetsky M. Factored forms for solutions of  $AX - XB = C$  and  $X - AXB = C$  in companion matrices [J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 1984, 62: 19-49.