

文章编号: 1001-0920(2005)04-0444-04

基于泰勒级数的迭代学习算法

张丽萍¹, 杨富文²

(1. 福州大学 机械工程及自动化学院, 福建 福州 350002; 2. 福州大学 电气工程及自动化学院, 福建 福州 350002)

摘要: 针对存在不确定扰动的线性时变系统的轨迹跟踪控制问题, 提出了基于泰勒级数的迭代学习算法。该算法利用泰勒级数将系统参数化, 导出一种基于泰勒级数的线性时变系统的近似模型。在此模型的基础上, 利用迭代学习方式修正输入量的泰勒展开系数, 并用 LM I 方法求解学习增益矩阵。所提出算法在系统不满足正则性或无源性时, 仍可用输出误差信号来构造学习律。仿真结果表明了该算法的有效性。

关键词: 线性时变系统; 迭代学习控制; 泰勒级数

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Iterative learning control algorithm based on Taylor series

ZHANG Li-ping¹, YANG Fu-wen²

(1. College of Mechanical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350002, China; 2. College of Electrical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350002, China. Correspondent: YANG Fu-wen; E-mail: ofwyang@fzu.edu.cn)

Abstract: An iterative learning control (LC) algorithm via Taylor series is presented to address the trajectory tracking of a class of linear time-varying system with uncertain exogenous disturbance. The method parameterizes a linear time-varying system with disturbance by using Taylor series expansion. Then, an approximated model for the system is deduced by employing the differential relations of Taylor series. Based on the model, the Taylor series coefficients of control function are adjusted by an iterative learning law and the learning gain matrix is designed via LM I optimization. The proposed algorithm can use the error signals to update the control variable even when the systems do not satisfy regularity nor passivity. Simulation results show the effectiveness of the method.

Key words: linear time-varying system; iterative learning control; Taylor series

1 引言

学习律是迭代学习控制研究的重要问题之一。Arimoto 等^[1]首先对线性连续系统提出 D 型学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma \dot{e}_k(t), t \in [0, T] \quad (1)$$

其中: $k = 0, 1, \dots$ 为迭代次数; Γ 为常数增益矩阵; $\dot{e}_k(t)$ 为输出误差 $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ 的导数信号, 它在学习律(1)的收敛性证明中具有重要作用, 但求导运算减弱了系统抑制噪声的能力^[2]。Arimoto 等^[3]又提出了 P 型学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma e_k(t), t \in [0, T] \quad (2)$$
要证明学习律(2)收敛, 必须假定线性系统满足正

则性^[4](直接传输矩阵 D 行满秩或列满秩) 或无源性^[5], 而实际系统仅有一部分具有无源性。为取消收敛性证明这一假设条件, 人们对 P 型学习律进行改进。Moon 等^[6]提出了使用低通滤波器的学习律, 这种方法只能保证系统在给定的频率范围内实现精确跟踪; Hamamoto 等^[7]研究了基于输入-输出空间的学习律, 但要求每次迭代初值与期望值相同。

本文针对存在不确定扰动的线性时变系统, 提出了基于泰勒级数的迭代学习算法。该方法首先运用泰勒级数展开技术及其微分性质, 导出了系统关于泰勒级数展开的近似模型, 建立了系统输入与输

收稿日期: 2004-06-14; 修回日期: 2004-09-13

基金项目: 国家自然科学基金项目(60474049); 福建省自然科学基金项目(A0410012)。

作者简介: 张丽萍(1972—), 女, 福建仙游人, 博士生, 从事迭代学习控制、模糊控制的研究; 杨富文(1963—), 男, 福建仙游人, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制、迭代学习控制等研究。

出之间的代数方程约束关系 在此基础上, 利用迭代学习方式来修正输入量的泰勒级数展开系数, 并给出了初态偏移有界前提下的误差收敛条件 与文献 [7] 相比, 本文方法放宽了对迭代初值的限制 所提出算法在系统不满足正则性 or 无源性时, 仍可用输出误差来构造学习律 最后以一仿真实例说明了本文方法的有效性

2 泰勒级数及其性质

若函数 $f(t)$ 在 t_0 点的邻域内解析, 则 $f(t)$ 的幂级数展开式为

$$f(t) = f_0 + f_1(t - t_0) + \dots + f_i(t - t_0)^i + \dots \quad (3)$$

其中: $f_i = \frac{1}{i!} f^{(i)}(t_0)$, $i = 0, 1, \dots$ 幂级数 (3) 称为函数 $f(t)$ 的泰勒级数

从函数逼近的观点说, 可用式 (3) 的前有限项来逼近 $f(t)$. 取前 $m + 1$ 项 (m 由逼近误差确定), 则 $f(t)$ 可近似表示为

$$f(t) \approx \sum_{i=0}^m f_i \theta_i(t) = f^T D_{m+1}(t) \quad (4)$$

其中: f 是泰勒级数的系数向量, $D_{m+1}(t)$ 是泰勒级数的基向量 这两个向量定义为

$$f = [f_0, f_1, \dots, f_m]^T, \\ D_{m+1}(t) = [\theta_0(t), \theta_1(t), \dots, \theta_m(t)]^T = [1, t - t_0, \dots, (t - t_0)^m]^T.$$

泰勒级数具有如下递推关系:

$$\begin{cases} \theta_0(t) = 1, \\ \theta_i(t) = (t - t_0) \theta_{i-1}(t), i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5)$$

本文的研究中将用到其微分性质

$$\dot{\theta}_i(t) = i \theta_{i-1}(t), i = 1, 2, \dots \quad (6)$$

3 系统的近似模型

考虑可重复的受扰线性时变系统

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = A(t)x_k(t) + B(t)u_k(t) + w_k(t), \\ y_k(t) = C(t)x_k(t) + v_k(t), t \in [0, T] \end{cases} \quad (7)$$

其中: 下标 k 为迭代次数; $x_k(t) \in R^n, u_k(t) \in R^l$ 和 $y_k(t) \in R^r$ 分别为系统的状态、输入和输出; $A(t), B(t)$ 和 $C(t)$ 是适当维数的时变系数矩阵; $w_k(t) \in R^n$ 和 $v_k(t) \in R^r$ 分别为状态扰动和测量噪声

给定理想输出轨迹 $y_d(t) (t \in [0, T])$, 迭代学习控制的目标是寻求控制输入 $u_k(t) (t \in [0, T])$, 使得当 k 充分大时, 系统的输出 $y_k(t) (t \in [0, T])$ 尽可能跟踪理想轨迹 $y_d(t) (t \in [0, T])$.

假定初态偏移满足 $x_d(0) - x_k(0) \leq b_x$; 状态干扰和测量噪声满足 $w_k(t) \leq b_w, v_k(t) \leq b_v$ 将系统 (7) 中各变量用泰勒级数展

开, 并截取前 $m + 1$ 项, 有

$$x_k(t) = [x_{k0}, x_{k1}, \dots, x_{km}] D_{m+1}(t), \quad (8a)$$

$$u_k(t) = [u_{k0}, u_{k1}, \dots, u_{km}] D_{m+1}(t), \quad (8b)$$

$$y_k(t) = [y_{k0}, y_{k1}, \dots, y_{km}] D_{m+1}(t), \quad (8c)$$

$$w_k(t) = [w_{k0}, w_{k1}, \dots, w_{km}] D_{m+1}(t), \quad (8d)$$

$$v_k(t) = [v_{k0}, v_{k1}, \dots, v_{km}] D_{m+1}(t), \quad (8e)$$

$$A(t) = [A_0, A_1, \dots, A_m] D_{m+1}(t), \quad (8f)$$

$$B(t) = [B_0, B_1, \dots, B_m] D_{m+1}(t), \quad (8g)$$

$$C(t) = [C_0, C_1, \dots, C_m] D_{m+1}(t). \quad (8h)$$

将各变量的泰勒展式 (8) 代入 (7), 并利用性质 (6), 可导出

$$\begin{cases} \dot{ix}_{ki} = \sum_{j=0}^{i-1} (A_{i-j-1} x_{kj} + B_{i-j-1} u_{kj}) + w_{k(i-1)}, \\ y_{ki} = \sum_{j=0}^i C_{i-j} x_{kj} + v_{ki}, i = 0, 1, \dots, m. \end{cases} \quad (9)$$

记

$$G = \begin{bmatrix} I_n & 0 & \dots & 0 \\ -A_0 & 2I_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -A_{m-2} & -A_{m-3} & \dots & m I_n \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} B_0 & 0 & \dots & 0 \\ B_1 & B_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ B_{m-1} & B_{m-2} & \dots & B_0 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} C_0 & 0 & \dots & 0 \\ C_1 & C_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ C_{m-1} & C_{m-2} & \dots & C_0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = [A_0^T, A_1^T, \dots, A_m^T]^T,$$

$$P = [C_1^T, C_2^T, \dots, C_m^T]^T.$$

其中 I_n 是维数为 n 的单位阵 则式 (9) 可写成矩阵形式

$$GX_k = \Gamma x_{k0} + H U_k + W_k, \quad (10a)$$

$$Y_k = \Lambda X_k + V_k + P x_{k0}, \quad (10b)$$

$$y_{k0} = C_0 x_{k0} + v_{k0} \quad (10c)$$

其中

$$Y_k = [y_{k1}^T, y_{k2}^T, \dots, y_{km}^T]^T,$$

$$X_k = [x_{k1}^T, x_{k2}^T, \dots, x_{km}^T]^T,$$

$$U_k = [u_{k0}^T, u_{k1}^T, \dots, u_{k(m-1)}^T]^T,$$

$$W_k = [w_{k0}^T, w_{k1}^T, \dots, w_{k(m-1)}^T]^T,$$

$$V_k = [v_{k1}^T, v_{k2}^T, \dots, v_{km}^T]^T.$$

令 $\bar{X}_k = [x_{k0}^T, X_k^T]^T, \bar{Y}_k = [y_{k0}^T, Y_k^T]^T$, 则 $x_k(t), y_k(t), u_k(t)$ 的近似值为

$$x_k(t) = (D_{m+1}(t) \otimes I_n) \bar{X}_k, \quad (11a)$$

$$\hat{y}_k(t) = (D_{m+1}(t)^T \otimes I_r) \bar{Y}_k, \quad (11b)$$

$$u_k(t) = (D_m(t)^T \otimes I_l) U_k \quad (11c)$$

其中: $D_m(t) = [\theta_0(t), \theta_1(t), \dots, \theta_{m-1}(t)]^T$, I_r 和 I_l 分别表示维数为 r 和 l 的单位阵

定义 1 称式(10)和(11)为系统(7)关于泰勒级数的 m 阶 ($m \geq 1$) 近似系统, 记为 Σ_m .

Σ_m 的约束方程(10)的推导避免了由基向量乘积和积分等引起的繁琐矩阵计算, 其推证过程较文献[8]更为简单, 并考虑到系统存在不确定干扰的情形

由式(10a)和(10b)可推出

$$Y_k = S x_{k0} + F U_k + d_k \quad (12)$$

其中: $S = \Lambda G^{-1} \Gamma + P$, $F = \Lambda G^{-1} H$, $d_k = \Lambda G^{-1} W_k + V_k$

如果考虑推导过程所忽略的泰勒展式的高阶部分, 则式(12)可表示成

$$Y_k = S^* x_{k0} + F^* U_k + d_k^* \quad (13)$$

其中: $S^* = S + \Delta S$, $F^* = F + \Delta F$, $d_k^* = d_k + \Delta d_k$, ΔF 是 F^* 和 F 之间的差异阵(未知矩阵). 同理可定义 ΔS 和 Δd_k .

4 迭代学习律

现将控制问题转化为寻求 $u_k(t)$ 的泰勒展式系数向量 U_k . 定义期望输出 $y_d(t)$ 和期望输入 $u_d(t)$ 的泰勒级数系数向量 $Y_d = [y_{d1}^T, y_{d2}^T, \dots, y_{dm}^T]^T$, $U_d = [u_{d0}^T, u_{d1}^T, \dots, u_{d(m-1)}^T]^T$. 在第 k 个学习周期内, Y_d 与 Y_k , U_d 与 U_k 向量之差分别为

$$\epsilon_k = Y_d - Y_k, \quad \bar{\epsilon}_k = U_d - U_k \quad (14)$$

迭代学习律为

$$U_{k+1} = U_k + L \bar{\epsilon}_k, \quad (15)$$

其中 $L \in R^{m \times m}$ 为增益矩阵

定理 1 考虑由式(7)描述的线性时变受扰系统, 给定可达的期望输出 $y_d(t)$, $t \in [0, T]$, 应用控制量的泰勒级数展开式(11c)和学习律(15), 若满足条件

$$\rho = \|I - L F^*\| < 1, \quad (16)$$

则当 $t_0 = 0$ 时, 系统输出误差 $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上渐近有界($\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = 0$).

证明 由式(14)和(15)可得

$$\bar{\epsilon}_{k+1} = \bar{\epsilon}_k - L \bar{\epsilon}_k \quad (17)$$

根据式(17)可导出

$$\bar{\epsilon}_k = (I - L F^*)^k \bar{\epsilon}_0, \quad (18)$$

其中 $\Delta x_{k0} = x_{d0} - x_{k0}$. 将式(18)代入(17), 有

$$\bar{\epsilon}_{k+1} = (I - L F^*) \bar{\epsilon}_k - L S^* \Delta x_{k0} + L d_k^*. \quad (19)$$

对式(19)取 2-范数, 有

$$\|\bar{\epsilon}_{k+1}\|_2 \leq \rho \|\bar{\epsilon}_k\|_2 + \|L S^* \Delta x_{k0} + L d_k^*\|_2$$

$$\Delta x_{k0} + \|L d_k^*\|_2 \quad (20)$$

当 $t_0 = 0$ 时, $x_{k0} = x_k(0)$. 由第 3 节的假设条件及文献[9]附录中引理 A. 2.3, 可得

$$\lim_k \|\bar{\epsilon}_k\|_2 \leq b/(1 - \rho), \quad (21)$$

其中

$$b = \|L S^* \Delta x_{k0} + L d_k^*\|_2$$

由式(18)和(21)知 $\|\bar{\epsilon}_k\|_2$ 渐近有界. 设 $\lim_k \|\bar{\epsilon}_k\|_2 = b\epsilon$, 则有

$$\lim_k \|e_k(t)\|_2 \leq b_d + b_0 + b_k \quad (22)$$

其中

$$b_d = \sup_{t \in [0, T]} \|y_d(t) - \sum_{i=0}^m y_{di} \theta_i(t)\|_2,$$

$$b_0 = b_x \cdot C(0) + b_v,$$

$$b_k = b_\epsilon \sup_{t \in [0, T]} \|\bar{D}_m(t)\|_2,$$

$$\bar{D}_m(t) =$$

$$[\theta_0(t), \theta_1(t), \dots, \theta_m(t)] \otimes I_n$$

当 $b_x, b_v, b_w = 0$ 时, $\lim_k \|e_k(t)\|_2 \leq b_d$

由于无法获得精确的 F^* 阵, 本文将满足式(16)的学习增益矩阵 L 设计问题变为不确定离散系统的稳定设计问题^[7]. 考虑不确定离散系统

$$\begin{cases} \bar{\epsilon}_{k+1} = \bar{\epsilon}_k + v, \\ z = \bar{\epsilon}_k, \\ \mu = F z + w. \end{cases} \quad (23)$$

其中: 静态输出反馈控制器 $v = -L \mu$, $w = \Delta F z$. 为推导使系统闭环稳定的控制器, 假定不确定项 ΔF 满足 $\alpha_{\max}(\Delta F) < \gamma^{-1}$ ($\gamma > 0$), $\alpha_{\max}(\bullet)$ 表示最大奇异值. 有了上述假设条件, 便可用离散 H^∞ 控制设计方法求出 L .

根据以上分析, 控制量 $u(t)$ 的求解步骤如下:

- 1) 由给定系统计算 F 阵;
- 2) 用 LM I 寻优方法求解学习增益矩阵 L ;
- 3) 由式(15)和(11c)计算 $u_k(t)$;
- 4) 根据 $u_k(t)$ 求出 $y_k(t)$, 并通过拟合获得 Y_k ;
- 5) 重复步骤 3) 和步骤 4), 直至跟踪误差小于给定值

5 仿真实例

设存在扰动的线性时变系统由如下方程决定:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} t^4 - 3t & 2t^3 - 1 \\ t^4 - 6t^2 & t^2 + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^3 - t^2 - 1 \\ 2t^4 + t + 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix},$$

$$y(t) = [t^2 + 1 \quad 2t^5 - 3t^3] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + v(t).$$

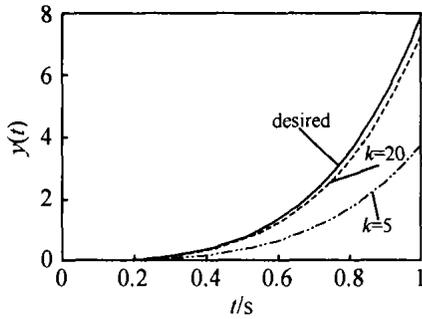


图 1 系统输出曲线(无初始误差和扰动)

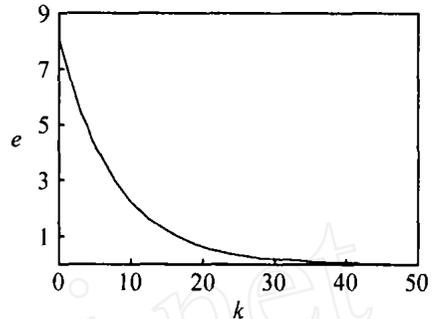


图 2 最大跟踪误差曲线(无初始误差和扰动)

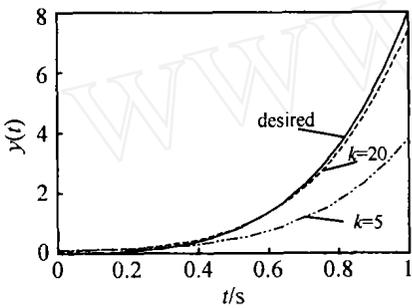


图 3 系统输出曲线(有初始误差和扰动)

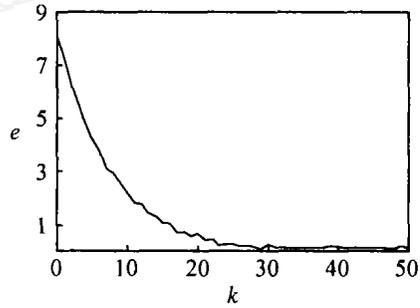


图 4 最大跟踪误差曲线(有初始误差和扰动)

其中: $w_1(t) = w_2(t) = 0.08\sin t$, $v(t) = 0.08\cos t$
期望输出轨迹为 $y_d(t) = 2t^5 + 3t^4 + 2t^3 + t^2$, $t \in [0, 1]$

仿真计算中取 $m = 5$, 则 $y_d(t)$ 的泰勒级数展式误差为零

不存在初始误差 ($x_k(0) = 0$) 和干扰时的仿真结果如图 1 和图 2 所示。从图中曲线可以看出, 随着迭代次数增加, 跟踪误差减小, 当 $k = 50$ 时, 跟踪误差为 0.007。存在干扰和初始误差 ($x_k(0) = 0.02(\text{rand} - 0.5)$) 时的仿真结果如图 3 和图 4 所示。可以看出, 系统在第 25 次运行时已基本达到收敛, 此时系统输出轨迹收敛于期望轨迹的某邻域内, 域的半径与初始误差和不确定干扰有关。仿真结果验证了本文设计的学习律是有效的。

6 结 论

本文考虑一类受扰的线性时变系统的轨迹跟踪问题, 研究了基于泰勒级数的迭代学习控制方法。采用泰勒级数展开技术及其微分性质, 导出了系统输入量和输出量之间的代数方程约束关系。在此基础上, 利用迭代学习方法修正控制量的泰勒级数系数, 并通过不确定离散系统的 H 设计方法求出学习增益矩阵。最后结合实例说明了所提出方法的有效性。

参考文献(References)

[1] Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of robotics by learning [J]. *J of Robotic Systems*, 1984, 1(2): 123-140

[2] Dok Y, Liew K, Xu J. Fuzzy PD iterative learning control algorithm for improving tracking accuracy [A]. *Proc of IEEE Int Conf on Systems, Man and Cybernetics* [C]. San Diego, 1998: 1603-1608

[3] Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Learning control theory for dynamical systems [A]. *Proc of the 24th IEEE Conf on Decision and Control* [C]. Fort Lauderdale, 1985: 1375-1382

[4] Sugie T, Ono T. An iterative learning control law for dynamical systems [J]. *Automatica*, 1991, 27(4): 729-732

[5] Furuta K, Yamakita M. The design of a learning control system for multivariable systems [A]. *Proc of IEEE Int Symp on Intelligent Control* [C]. Philadelphia, 1987: 371-376

[6] Moon J, Doh T, Chung M. A robust approach to iterative learning control design for uncertain systems [J]. *Automatica*, 1998, 34(8): 1001-1004

[7] Hamamoto K, Sugie T. An iterative learning control algorithm within prescribed input-output subspace [J]. *Automatica*, 2001, 37(11): 1803-1809

[8] Lee T, Tsay S. Analysis of linear time-varying systems and bilinear systems via Taylor series [J]. *Int J of Systems Science*, 1987, 18(8): 1569-1578

[9] 孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1999: 273-274