文章编号: 1001-0920(2005)04-0451-04

分段线性系统最优控制设计的一种混合算法

张建雄, 唐万生
(天津大学 系统工程研究所, 天津 300072)

摘　要: 将分段线性系统的最优控制设计问题转化成以反馈增益为寻优参数, 以最优控制性能上界为目标的一组双线性矩阵不等式(BMI)问题. 将遗传算法与内点法相结合设计出一种混合算法, 对BMI问题进行求解. 算例仿真表明该算法是简便而有效的.

关键词: 分段线性系统; 最优控制; 双线性矩阵不等式; 内点法; 遗传算法
中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

A mixed algorithm for optimal control of piecewise linear systems

ZHANG Jian-xiong, TANG Wan-sheng
(Institute of Systems Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China. Correspondent: ZHANG Jian-xiong, E-mail: zhangjianxiong2004@yahoo.com.cn)

Abstract: The optimal control of piecewise linear systems is converted to bilinear matrix inequalities (BMI) in which the feedback gain is a set of parameters to be optimized with the goal of minimizing the upper bounds of cost function. A mixed algorithm that combines genetic algorithm and interior-point method is designed for solving the BMI problem. The results of numerical examples show that the proposed method is simple and effective.

Key words: piecewise linear systems; optimal control; bilinear matrix inequalities; interior-point algorithm; genetic algorithm

1　引　言

对于分段线性系统, 利用传统的全局Lyapunov函数方法难以处理具有仿射形式的系统, 并且难以利用系统的分区信息, 给系统的稳定性分析及其控制综合带来很大的保守性. 文献[1]利用系统的分区信息构造连续的分段二次Lyapunov函数, 有效地减小了系统分析和设计中的保守性. 本文基于文献[1]的方法, 将最优控制设计问题转化成以反馈增益为寻优参数, 以最优性能上界为目标的一组双线性矩阵不等式(BMI)问题.

BMI问题是NP难问题, 文献[2]提出一种简单的迭代方法, 即依次固定双线性项中的一个变量, 形成线性矩阵不等式问题, 根据目标函数对另一变量进行优化设计; 但本文中的目标函数仅显含其中的一个变量, 所以无法采用这种方法. 文献[3]进行局部线性化并忽略高阶项, 以形成LMI问题进行求解, 但由于BMI问题的非凸性质, 可能存在多个局部极小值, 所以该方法难以获得全局最优解. 文献[4]提出的分支定界法对小规模问题较为有效, 但该方法本质上是一种隐枚举法, 计算繁琐且对大规模问题失效.

遗传算法是处理NP难问题的一种有效解法, 能较好地处理大规模的复杂优化问题, 且以概率1收敛于全局最优解. 本文针对BMI问题, 采用遗传算法对双线性项中的一个变量进行寻优; 对随之形成的LMI问题, 利用内点法[5]对半正定规划进行求解. 本文方法简单易行, 算例仿真表明所设计的算法是有效的.

收稿日期: 2004-06-03; **修回日期**: 2004-09-03.
作者简介: 张建雄(1979—), 男, 湖南宁乡人, 博士生, 从事切换系统、控制综合的研究; 唐万生(1962—), 男, 天津人, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统建模与控制、不确定性决策等研究.

2 问题描述

考虑如下具有仿射形式的分段线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + a_i + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t) + c_i + D_i u(t), \end{cases}$$
$$x(t) \in X_i,\ i \in I. \tag{1}$$

其中: $x \in R^n$ 为连续的状态变量; $u \in R^m$ 为输入变量; $y \in R^p$ 为输出变量; $A_i, B_i, C_i, D_i, a_i, c_i$ 为相应维数的常值矩阵.

闭的 n 维凸多面体 $X_i \subseteq R^n$ 称为单元. 假定各单元除公共的边界外没有重叠部分. $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ 称为系统的分区. 单元下标集 $I = I_0 \cup I_1$, 其中 I_0 为包含原点的单元下标集, I_1 为不包含原点的单元下标集. 对于 $i \in I_0$, 假定 $a_i = c_i = 0$.

为处理形如式(1) 的仿射系统, 引入下列矩阵描述:

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & a_i \\ 0_{1\times n} & 0 \end{bmatrix},$$
$$\bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0_{1\times m} \end{bmatrix}, \bar{C}_i = [C_i \quad c_i].$$

则系统(1) 可表示为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_i \bar{x}(t) + \bar{B}_i u(t), \\ y(t) = \bar{C}_i \bar{x}(t) + D_i u(t), \end{cases}$$
$$x(t) \in X_i,\ i \in I. \tag{2}$$

为分析系统(2) 的稳定性, 引入连续矩阵及多面体单元界的定义[1]:

定义 1(连续矩阵) 对于单元 X_i, 如果满足

$$\bar{F}_i \bar{x}(t) = \bar{F}_j \bar{x}(t),\ \forall x(t) \in X_i \cap X_j, \tag{3}$$

则称矩阵 $\bar{F}_i = [F_i \quad f_i]$ 为连续矩阵; 对于 $i \in I_0$, 若有 $f_i = 0$, 则称 $\{\bar{F}_i\}$ 具有零插值特性.

定义 2(多面体单元界) 对于单元 X_i, 如果满足

$$\bar{E}_i \bar{x}(t) \geq 0,\ \forall x(t) \in X_i, \tag{4}$$

则称矩阵 $\bar{E}_i = [E_i \quad e_i]$ 为多面体单元界; 对于 $i \in I_0$, 若有 $e_i = 0$, 则称 $\{\bar{E}_i\}$ 具有零插值特性.

以上定义中, 零插值特性是对包含原点区域稳定性分析的必要条件. 引入连续矩阵, 对于任意的对称矩阵 T, 可构造如下形式的连续分段二次型标量函数:

$$V(x) = \bar{x}^{\mathrm{T}} \bar{F}_i^{\mathrm{T}} T \bar{F}_i \bar{x} \triangleq \bar{x}^{\mathrm{T}} \bar{P}_i \bar{x},$$
$$x(t) \in X_i,\ i \in I. \tag{5}$$

引入多面体单元界, 可结合 S-procedure[5] 来判定所构造的标量函数(5) 的正定性, 进而得到分段线性系统的稳定性定理(参见文献[1] 定理 4. 1).

3 基于 BMI 的控制律设计

考虑分段线性系统(2) 的二次最优控制问题, 其性能指标为

$$J(x_0, u) = \int (\bar{x}(t)^{\mathrm{T}} \bar{Q}_{i(t)} \bar{x}(t) +$$
$$u(t)^{\mathrm{T}} R_{i(t)} u(t))\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

对于 $i \in I_0$, 设

$$\bar{Q}_i = \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

且 $\bar{Q}_i$ 半正定, R_i 正定, $i(t)$ 为使 $x(t) \in X_{i(t)}$ 的下标. 考虑如下分段线性反馈控制律:

$$u = -K_i x - k_i = -\bar{K}_i \bar{x},$$
$$x \in X_i,\ i \in I. \tag{8}$$

在式(8) 中, 对于 $i \in I_0$, 设 $k_i = 0$. 将控制律设计成分段线性形式, 能给闭环系统的稳定性及其控制性能分析带来更大的灵活性, 但若设计的控制律在单元的边界处不连续, 则有可能导致闭环系统产生滑动模[1]. 为此, 应将控制律设计成连续的, 其增益阵采用如下形式:

$$\bar{K}_i = K^{\mathrm{T}} \bar{F}_i,\ i \in I. \tag{9}$$

其中: K 为参数向量, $\bar{F}_i$ 为式(3) 定义的具有零插值特性的连续矩阵.

文献[1] 讨论了闭环系统稳定时性能指标上界的相关结论. 本文进一步考虑闭环系统的稳定性条件, 得出如下最优性能指标上界的结论:

定理 1 如果存在对称矩阵 T, U_i 和 W_i, 其中 U_i 和 W_i 的元素均为非负, 且记 $P_i = F_i^{\mathrm{T}} T F_i$, $\bar{P}_i = \bar{F}_i^{\mathrm{T}} T \bar{F}_i$, $\bar{K}_i = K^{\mathrm{T}} \bar{F}_i$, 满足

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} (A_i - B_i K_i)^{\mathrm{T}} P_i + P_i (A_i - B_i K_i) + Q_i + E_i^{\mathrm{T}} U_i E_i & K_i^{\mathrm{T}} \\ K_i & -R_i^{-1} \end{bmatrix} < 0, \\ P_i - E_i^{\mathrm{T}} W_i E_i > 0,\ i \in I_0; \end{cases} \tag{10a}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} (\bar{A}_i - \bar{B}_i \bar{K}_i)^{\mathrm{T}} \bar{P}_i + \bar{P}_i (\bar{A}_i - \bar{B}_i \bar{K}_i) + \bar{Q}_i + \bar{E}_i^{\mathrm{T}} U_i \bar{E}_i & \bar{K}_i^{\mathrm{T}} \\ \bar{K}_i & -\bar{R}_i^{-1} \end{bmatrix} < 0, \\ \bar{P}_i - \bar{E}_i^{\mathrm{T}} W_i \bar{E}_i > 0,\ i \in I_1. \end{cases} \tag{10b}$$

其中: $\{\bar{F}_i\}$ 和 $\{\bar{E}_i\}$ 分别表示连续矩阵和多面体单元界且具有零插值特性, $\bar{K}_i$ 为控制增益. 则系统(2) 在控制律(8) 的作用下, 对于初始点 $x(0) = x_0 \in X_{i0}$ 的任意轨道 $x(t) \in X$, 有 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, 且性能指标(6) 的上界为

$$J(x_0, u) \leq \inf_{T, U_i, W_i} \bar{x}_0^{\mathrm{T}} \bar{P}_{i0} \bar{x}_0. \tag{11}$$

由文献[1]的稳定性定理及 Schur 补公式[5] 易证所得结论. 在此证略.

若将定理 1 中的 K 当作优化变量, 并考虑有控制约束的一般情况, 便可得到如下最优性能上界的优化问题:

$$\min_{K,T,U_i,W_i} \bar{x}_0^{\mathrm{T}} \bar{P}_{i0} \bar{x}_0,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \bar{K}_i \in K_{约束} \subset R^c,\ i \in I, \\ 式(10). \end{cases} \tag{12}$$

其中 $\bar{K}_i = K^{\mathrm{T}} \bar{F}_i$ 所受的约束由实际问题确定. 由于 K 为优化变量, 式(10) 为一组 BMI, 即在矩阵不等式中包含变量 $\bar{P}_i$ 和 $\bar{K}_i$ 的双线性项 $\bar{P}_i \bar{B}_i \bar{K}_i$, 给问题的求解带来较大的困难. 为此, 本文将在下节设计相应的求解算法.

对于最优性能下界, 文献[1] 给出了相关结论(定理 6.3). 若由文献[1] 方法求得的最优性能下界与由问题(12) 得到的最优性能上界相差不大, 则认为获得了最优控制的近似解.

4　算法设计

优化问题(12) 的约束条件(10) 为一组 BMI, 当 K 固定时, 约束条件(10) 可转化成一组 LMI. 此时, 优化问题(12) 便转化为半正定规划问题, 可应用基于内点法的标准半正定规划程序求解. 本文将 K 设计成随机搜索变量, 用遗传算法进行寻优; 对于随之形成的半正定规划问题(12), 利用 Matlab 的 LMI 工具箱进行数值求解, 得到半正定规划的目标值, 由此可设计染色体的适应值. 具体方法如下:

记目标函数的适应值为 Fitness, 设计第 l 个染色体的目标函数适应值

$$\text{Fitness}_l = F_{\max} - F_{kl},\ l = 1, 2, \cdots, N. \tag{13}$$

其中: N 为种群规模; F_{kl} 为第 k 代中第 l 个染色体的目标函数值; $F_{\max}$ 为第 k 代所有染色体的最大目标函数值, 即 $F_{\max} = \max_l (F_{kl})$. F_{kl} 由下式计算:

$$F_{kl} = \begin{cases} \bar{x}_0^{\mathrm{T}} (\bar{P}_{i0})^*_{kl} \bar{x}_0, & 问题(12) 有解; \\ \theta, & 否则. \end{cases} \tag{14}$$

其中: $\bar{x}_0^{\mathrm{T}} (\bar{P}_{i0})^*_{kl} \bar{x}_0$ 为参数向量 K 给定后得到的半正定规划问题(12) 的最优解, θ 为给定的某个较大的正数. 由于 K 为随机赋值, 形成的半正定规划问题(12) 不一定有可行解, 若没有可行解, 则目标函数值取为 θ. 只要 θ 取得足够大, 对于不可行的参数向量 K 所对应的染色体, 由式(13) 计算出的适应值为零, 从而阻止其进入以后的遗传进化, 有利于提高算法的搜索效率.

遗传算法的编码设计中采用实数编码. 选择操作采取比例选择法并保存最优个体的策略, 交叉操作采用凸组合方式, 变异操作采用改进的高斯变异法. 关于遗传算法的上述详细操作可参见文献[6].

混合算法流程如图 1 所示.

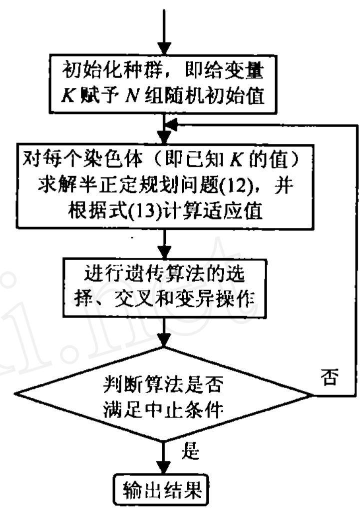

图 1　混合算法流程

5　算例仿真

考虑如下单输入分段线性系统:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + a_i + B_i u(t),\ i = 1, 2, \cdots, 5. \tag{15}$$

其中

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.75 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = -a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$a_3 = -a_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.5 \end{bmatrix}, B_1 = \cdots = B_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

分区信息为

$$L^{\mathrm{T}} x \in [-1, 1],\ i = 1;$$
$$L^{\mathrm{T}} x \in [1, 2],\ i = 2;$$
$$L^{\mathrm{T}} x \in [2, 4],\ i = 3;$$
$$L^{\mathrm{T}} x \in [-2, -1],\ i = 4;$$
$$L^{\mathrm{T}} x \in [-4, -2],\ i = 5.$$

其中 $L = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. 控制约束为 $\| \bar{K}_i \|_\infty \leq 6.5,\ i = 1, 2, \cdots, 5$. 范数 $\| \cdot \|_\infty$ 表示向量元素中的最大绝对值, $\bar{K}_i$ 为控制增益向量. 控制目标是设计一个连续的分段线性反馈控制律 $u = -\bar{K}_i \bar{x}$, 使闭环系统从稳定平衡点 $(10/3, 0)$ 镇定到不稳定平衡点 $(0, 0)$, 且使性能指标

$$J(x, u) = \int_0^\infty 4x_1^2(t) + 4x_2^2(t) + u^2(t)\,\mathrm{d}t$$

达到最小.

由系统的分区信息易设计出相应的多面体单元界和连续矩阵(此略). 遗传算法中取交叉概率 $p_c = 0.6$, 变异概率 $p_m = 0.25$, $\theta = 1\,000$, 种群规模 $N = 30$, 总迭代次数 $k = 80$. 对于半正定规划问题(12), 采用Matlab 的LMI工具箱中的mincx 函数来求解. 所设计算法在Matlab 6.5 环境下编程实现, 算法求得的全局最优解 K^* 及性能上界 $\bar{J}(x_0, u)$ 最优值近似为

$$K^* = [-0.691\,3 \quad -2.655\,1 \quad 3.844\,0 \quad 4.106\,1]^{\mathrm{T}},$$

$$\bar{J}(x_0, u^*) = 67.19.$$

由式(9) 可得到连续的分段线性反馈控制律 $u^* = -\bar{K}_i x$, 其中

$$\bar{K}_1 = [3.844\,0 \quad 4.106\,1 \quad 0],$$

$$\bar{K}_2 = [3.152\,7 \quad 4.106\,1 \quad 0.691\,3],$$

$$\bar{K}_3 = [1.188\,9 \quad 4.106\,1 \quad 4.618\,9],$$

$$\bar{K}_4 = [6.499\,0 \quad 4.106\,1 \quad 2.655\,1],$$

$$\bar{K}_5 = [4.525\,3 \quad 4.106\,1 \quad -1.272\,6];$$

$$\max_{i \in I} \| \bar{K}_i \|_\infty = 6.499\,0 \leq 6.5$$

满足控制约束. 对所设计的控制律进行数值仿真, 求得最优性能指标 $J^* = 64.40$; 而根据文献[1] 的定理6.3 求得最优性能下界 $\underline{J}(x_0, u) = 61.90$. 由此可见, 本文算法求得的控制律可作为最优控制的近似解.

6 结 论

本文讨论具有仿射形式的分段线性系统的二次最优控制问题, 基于遗传算法和内点法设计出一种混合算法. 该算法简单实用, 仿真结果表明所提出算法是有效的.

参考文献(References)

[1] Johansson M. *Piecewise linear control systems* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2003: 99-103.

[2] Goh K C, Turan L, Safonov M G, et al. Bi-affine matrix inequality properties and computational methods [A]. *Proc of the American Control Conf* [C]. Baltimore, 1994: 850-855.

[3] Hassibi A, How J, Boyd S. A path-following method for solving BMI problems in control[A]. *Proc of the American Control Conf* [C]. San Diego, 1999: 1385-1389.

[4] Fukuda M, Kojima M. Branch-and-cute algorithms for the bilinear matrix inequality eigenvalue problem [J]. *Computational Optimization and Applications*, 2001, 19 (1): 79-105.

[5] Boyd S, El Ghaoui L, Feron E, et al. *Linear matrix inequalities in system and control theory* [M]. Philadelphia: SIAM, 1994: 7-24.

[6] 张彤, 张华, 王子才. 浮点数编码的遗传算法及其应用[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2000, 32(4): 59-61.
(Zhang T, Zhang H, Wang Z C. Float encoding genetic algorithm and its application [J]. *J of Harbin Institute of Technology*, 2000, 32(4): 59-61.)

(上接第 450 页)

5 结 论

非线性 PID 调节器中的增益参数能够随误差而变化, 因此该控制方法具有一定的抗干扰能力. 遗传算法使非线性函数得到优化, 使该非线性 PID 控制器不但比传统的固定参数 PID 调节(Z-N) 能更好地保证控制系统快速性和平稳性, 而且比简单非线性 PID 调节在提高系统的性能上更胜一筹.

参考文献(References)

[1] 王伟, 张晶涛, 柴天佑. PID 参数先进整定方法综述[J]. *自动化学报*, 2000, 26(3): 347-355.
(Wang W, Zhang J T, Chai T Y. A survey of advanced PID parameter tuning methods [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2000, 26(3): 347-355.)

[2] Hu B G, George K IM, Raymond G G. A systematic study of fuzzy PID controllers—— function-based evalution approach[J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2001, 9(5): 699-708.

[3] 刘金琨. *先进 PID 控制及其MATLAB 仿真*[M]. 北京: 电子工业出版社, 2003: 189-190.

[4] 苏玉鑫, 段宝岩. 一种新型非线性 PID 控制器[J]. *控制与决策*, 2003, 18(1): 126-128.
(Su Y X, Duan B Y. A new class of nonlinear PID controller [J]. *Cotnrol and Decision*, 2003, 18 (1): 126-128.)