

文章编号: 1001-0920(2005)04-0455-04

## 一类非线性系统的自适应神经网络控制

杜红彬, 邵惠鹤

(上海交通大学 自动化系, 上海 200030)

**摘要:** 针对一类具有非仿射函数和下三角结构的、受干扰未知的非线性系统, 提出一种新的自适应神经网络控制方法。它是严格反馈不确定系统和纯反馈系统的更一般化表达。在 Backstepping 设计思想基础上, 证明了闭环信号的半全局最终一致有界性, 并很好地处理了控制方向和控制奇异问题。通过仿真验证了该方法的有效性。

**关键词:** 非线性; 自适应控制; 神经网络; Nussbaum 增益

**中图分类号:** TP273

**文献标识码:** A

### Adaptive neural network control for a class of nonlinear systems

DU Hong-bin, SHAO Hui-he

(Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China Correspondent: DU Hong-bin, E-mail: ben-du@hotmail.com)

**Abstract:** To a class of unknown perturbed nonlinear systems an adaptive neural network control scheme is presented. The systems with disturbances and non-affine unknown functions have lower triangular structure that generalizes both strict-feedback uncertain systems and pure-feedback ones. Based on the idea of backstepping, the semiglobal uniformly ultimately boundedness of all the signals in the closed-loop is proved. The problems of control directions and control singularity are dealt with well. The effectiveness of proposed scheme is showed by a proper nonlinear system.

**Key words:** nonlinearity; adaptive control; neural networks; Nussbaum gain

### 1 引言

近年来自适应神经网络控制(ANNC)方法成功地应用到了一类未知的可反馈线性化的非线性系统。特别是当系统为严格反馈类型或纯反馈类型时, 文献[1~4]提出的 Backstepping 设计过程可保证相应的 ANNC 控制律, 从而使未知系统稳定。

目前, 一般所指的“下三角结构”的非线性系统仅限于仿射类型或半非仿射类型。这类系统至少存在一个仿射形式的控制变量或虚拟控制变量, 因此称为半非仿射系统。但现存文献尚不能处理更一般形式的下三角结构的非线性系统, 如系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_{i+1}) + d_i(t), & 1 \leq i \leq n-1; \\ \dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n, u) + d_n(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $f_i(\bullet)$  为未知的光滑函数,  $d_i$  为未知的有界干扰,  $\bar{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T \in R$  和  $u \in R$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 分

别为状态变量和系统输入。

本文针对上述未知受干扰的完全非仿射系统, 提出了一种新的 ANNC 控制策略, 并采用了 Nussbaum 增益函数<sup>[5]</sup>, 使控制奇异和控制方向问题得到了很好解决。

### 2 问题的表达

本文采用中值定理处理非仿射问题, 非线性对象由方程(1)描述, 其中  $f_i(\bullet)$  可表达为

$$\begin{cases} f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) = f_i(\bar{x}_i, 0) + \frac{\partial f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \Big|_{x_{i+1} = x_{i+1}^0} x_{i+1}, \\ 1 \leq i \leq n-1; \\ f_n(\bar{x}_n, u) = f_n(\bar{x}_n, 0) + \frac{\partial f_n(\bar{x}_n, u)}{\partial u} \Big|_{u = u^0} u. \end{cases} \quad (2)$$

因此方程(1)可转化为

收稿日期: 2004-05-10; 修回日期: 2004-09-23

作者简介: 杜红彬(1974—), 男, 河北无极人, 博士后, 从事过程及智能自适应控制等研究; 邵惠鹤(1936—), 男, 浙江宁波人, 教授, 博士生导师, 从事过程优化控制等研究。

$$\begin{cases} \dot{x}_i = F_i(\bar{x}_i, 0) + G_i(\bar{x}_i, x_{i+1})x_{i+1} + d_i(t), & 1 \leq i \leq n-1; \\ \dot{x}_n = F_n(\bar{x}_n, 0) + G_n(\bar{x}_n, u)u + d_n(t). \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\begin{cases} F_i(\bar{x}_i, 0) = f_i(\bar{x}_i, 0), & 1 \leq i \leq n-1; \\ F_n(\bar{x}_n, 0) = f_n(\bar{x}_n, 0). \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} G_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) = \frac{\partial f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \Big|_{x_{i+1} = x_{i+1}^0}, & 1 \leq i \leq n-1; \\ G_n(\bar{x}_n, u) = \frac{\partial f_n(\bar{x}_n, u)}{\partial u} \Big|_{u = u^0}. \end{cases} \quad (5)$$

首先给出如下假定:

假定 1  $\forall z \in \Omega$ , 存在理想的权值向量  $W^*$ , 使得逼近误差满足  $|\epsilon| \leq \epsilon^*$ , 常数  $\epsilon^* > 0$

假定 2 存在未知常数  $d^* > 0$ , 使得  $|d_i(t)| \leq d^*, 1 \leq i \leq n$ .

假定 3 式(6)中  $G_i(\bullet) \in R$ , 存在未知的常数  $G_0, G_m > 0$ , 使得  $G_m \leq |G_i(\bullet)| \leq G_0, 1 \leq i \leq n$ .

引理 1 若给定任意有界函数  $g(\bullet) \in [\epsilon_0, +\infty)$  或  $g(\bullet) \in (-\infty, -\epsilon_m]$ , 其中  $\epsilon_0$  和  $\epsilon_m$  为未知的任意正常数,  $\epsilon_0 < \epsilon_m < +\infty$ , 则  $g(\bullet)N(\xi)$  仍是 Nussbaum 增益函数

证明 1) 假定  $g(\bullet) > 0$  定义  $I(M) = \int_0^M g(\bullet)N(\xi)d\xi$ , 显然  $g(\bullet)N(\xi)$  在区间  $(4n-1, 4n+1)$  为正, 在区间  $(4n+1, 4n+3)$  为负,  $n$  为整数可以看出

$$\begin{aligned} & \int_{4n-1}^{4n+1} g(\bullet)N(\xi)d\xi \\ & \int_{4n-1/2}^{4n+1/2} g(\bullet)\exp(\xi^2)\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)d\xi \\ & \frac{\sqrt{2}}{2}G_0\exp\left(\left(4n-\frac{1}{2}\right)^2\right), \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} & |I(4n-1)| \leq \int_0^{4n-1} g(\bullet)N(\xi)d\xi \\ & (4n-1)g_m\exp\left(\left(4n-1\right)^2\right), \end{aligned}$$

于是可得

$$\begin{aligned} & I(4n+1) \\ & \exp\left(\left(4n-1\right)^2\right)\left[\frac{\sqrt{2}}{2}G_0\exp\left(4n-\frac{3}{4}\right)-\right. \\ & \left. g_m(4n-1)\right], \end{aligned}$$

显然, 可得到

$$\frac{I(4n+1)}{4n+1} > \epsilon^*, n \rightarrow +\infty.$$

同理

$$\int_{4n+1}^{4n+3} g(\bullet)N(\xi)d\xi$$

$$\begin{aligned} & - \int_{4n+3/2}^{4n+5/2} g(\bullet)\exp(\xi^2)\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)d\xi \\ & - \frac{\sqrt{2}}{2}G_0\exp\left(\left(4n+\frac{3}{2}\right)^2\right), \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & I(4n+3) \\ & - \exp\left(\left(4n+1\right)^2\right)\left[\frac{\sqrt{2}}{2}G_0\exp\left(4n+\frac{5}{4}\right)-\right. \\ & \left. g_m(4n+1)\right] \end{aligned}$$

显然, 可得

$$\frac{I(4n+3)}{4n+3} > \epsilon^*, n \rightarrow +\infty.$$

2)  $g(\bullet) < 0$  的情况, 可证得同样的结果  
故引理 1 得证

引理 2 若给定任意有界函数  $C(\bullet)$

$[-G_0, G_0] \subset R$ , 则  $N(\xi) + C$  仍是 Nussbaum 增益函数

根据 Nussbaum 函数的定义即可证得, 此略

文献[4, 6] 仅证明了 Nussbaum 函数乘以一个常数或固定在某一区间的时变系数后仍为 Nussbaum 类型函数, 本文将上述结论推广为 Nussbaum 函数乘以任意有界函数后仍为 Nussbaum 函数

### 3 设计过程

本文采用 RBF 网络逼近连续函数  $h(\bullet): R^p \rightarrow R$ , 即

$$\hat{h}(z) = \hat{W}^T S(z), \quad (6)$$

其中:  $z \in \Omega \subset R^p$  为输入向量,  $\hat{W}$  为学习权值. 选取足够多的神经元节点后, 网络可在闭区间  $\Omega \subset R^p$  上逼近任意的光滑函数

$$h(z) = W^{*T}S(z) + \epsilon, \forall z \in \Omega \quad (7)$$

$W^*$  为理想的权值向量, 可定义为

$$W^* \triangleq \arg \min_W \left\{ \sup_{z \in \Omega} |h(z) - W^T S(z)| \right\} \quad (8)$$

通过 RBF 网络表达和方程(7), 式(3) 可写为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = W_i^{*T}S(\bar{x}_i) + \epsilon_i(\bar{x}_i) + G_i(\bar{x}_i, x_{i+1})x_{i+1} + d_i(t), & 1 \leq i \leq n-1; \\ \dot{x}_n = W_n^{*T}S(\bar{x}_n) + \epsilon_n(\bar{x}_n) + G_n(\bar{x}_n, u)u + d_n(t). \end{cases} \quad (9)$$

其中:  $W_i^{*T}S(\bullet)$  用于逼近  $F_i$ ;  $\epsilon_i(1 \leq i \leq n)$  为相应的逼近误差, 满足假定 1. 本文中定义  $\hat{W}_i$  为理想权值向量  $W_i^*$  的估计向量, 有  $\tilde{W}_i = \hat{W}_i - W_i^*$ ; 定义  $\tilde{d}_i = \hat{d}_i - d_i$ ;  $\hat{d}_i$  为  $d_i$  的估计变量, 有  $\tilde{d}_i = \hat{d}_i - d_i$ .

通过 Backstepping 设计思路, 采用坐标变换

$$z_1 = x_1,$$

$$\begin{aligned} z_2 &= x_2 - \alpha_1, \\ &\vdots \\ z_n &= x_n - \alpha_{n-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

其中  $\alpha_i (1 \leq i \leq n-1)$  为调节函数, 将在设计过程中给出

**Step1** 对于方程(9)中  $i=1$  时的子系统, 给出下面的调节公式:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = N(\xi_1) [z_1 + \hat{W}_1^T S(x_1) + \hat{d}_1 \tanh(z_1/\omega)], \\ \dot{\xi}_1 = z_1^2 + z_1 \hat{W}_1^T S(x_1) + z_1 \hat{d}_1 \tanh(z_1/\omega), \\ \dot{\hat{W}}_1 = -\Gamma_1 \lambda \hat{W}_1 + \Gamma_1 z_1 S(x_1) \\ \dot{\hat{d}}_1 = -\lambda_1 \sigma_1 \hat{d}_1 + \sigma_1 z_1 \tanh(z_1/\omega). \end{cases} \tag{11}$$

其中:  $\hat{d}_1 \tanh(z_1/\omega)$  用于镇定未知外部干扰  $d_1(t)$  和建模误差  $\epsilon_1$ ;  $\Gamma_1 = \Gamma_1^T > 0$ ;  $\lambda_1, \sigma_1$  和  $\omega$  为正的控制系统数

定义 Lyapunov 函数

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} \hat{W}_1^T \tilde{W}_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^{-1} \hat{d}_1^2 \tag{12}$$

令  $z_2 = x_2 - \alpha_1$ , 对式(12)取导数, 并按不等式

$$\begin{cases} \hat{W}_1^* \tilde{W}_1 \leq \frac{1}{2} \hat{W}_1^{*2} + \frac{1}{2} \tilde{W}_1^2, \\ \hat{d}_1 \tilde{d}_1 \leq \frac{1}{2} \hat{d}_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{d}_1^2, \end{cases} \tag{13}$$

及正切函数的特点

$$0 \leq |z_1| - z_1 \tanh(z_1/\omega) \leq 0.2785\omega \tag{14}$$

式(12)可表达为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\frac{3}{4} z_1^2 + [G_1(\bar{x}_2)N(\xi_1) + 1] \dot{\xi}_1 + \\ &G_1^2(\bar{x}_2) z_2^2 - \frac{\lambda_1}{2} \hat{W}_1^{*2} - \frac{\lambda_1}{2} \hat{d}_1^2 + \\ &\frac{\lambda_1}{2} \tilde{W}_1^2 + \frac{\lambda_1}{2} \tilde{d}_1^2 + 0.2785\omega \bar{1} \\ &- \gamma_1 V_1 + \pi_1(t) + \rho_1. \end{aligned} \tag{15}$$

其中  $\gamma_1, \rho_1$  和  $\pi_1(t)$  定义为

$$\begin{aligned} \gamma_1 &:= \min\left\{\frac{3}{2}, \frac{\lambda_1}{\lambda_{\max}(\Gamma_1^{-1})}, \sigma_1 \lambda_1\right\}, \\ \rho_1 &:= \frac{\lambda_1}{2} \hat{W}_1^{*2} + \frac{\lambda_1}{2} \hat{d}_1^2 + 0.2785\omega \bar{1}, \\ \pi_1(t) &:= [G_1(\bar{x}_2)N(\xi_1) + 1] \dot{\xi}_1 + G_1^2(\bar{x}_2) z_2^2 \end{aligned} \tag{16}$$

对于式(16), 首先假定

$$V_1(t) = k_1 + k_2 l(t) e^{-\gamma_1 t}, \tag{17}$$

其中  $k_1, k_2$  和  $l(t)$  为待定变量 对式(17)两边求导可得

$$\dot{V}_1(t) = -\gamma_1 V_1(t) + \gamma_1 k_1 + k_2 \dot{l}(t) e^{-\gamma_1 t} \tag{18}$$

比较式(15)和(18), 可得到

$$0 = \dot{V}_1(t) - \gamma_1 V_1(t) = \frac{\rho_1}{\gamma_1} + e^{-\gamma_1 t} \pi_1(t) e^{\gamma_1 t} \tag{19}$$

其中

$$k_1 = \frac{\rho_1}{\gamma_1}, k_2 = \frac{V_1(0) - k_1}{\pi(0)}, \dot{l}(t) = \frac{\pi(t) e^{\gamma_1 t}}{k_2}.$$

如果  $z_2 = 0$  且  $\pi_1(t) e^{\gamma_1 t} = 0$ , 那么  $V_1(t) < 0$ , 闭环系统是稳定的, 因为所推导出的结论与事实  $V_1(t) = 0$  相矛盾 这是容易证明的

首先给出

$$\begin{aligned} \pi_1(t) e^{\gamma_1 t} &= \{ [G_1(\bar{x}_2)N(\xi_1) + 1] \dot{\xi}_1 + \\ &G_1^2(\bar{x}_2) z_2^2 \} e^{\gamma_1 t} \end{aligned} \tag{20}$$

根据引理1,  $G_1(\bar{x}_2)N(\xi_1) + 1$  可看作一个新的 Nussbaum 函数, 记作  $N(\xi_1)$ . 因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi_1} \int_0^{\xi_1} \pi_1(t) e^{\gamma_1 t} d\tau &= \\ \frac{1}{\xi_1} \int_0^{\xi_1} N(s) ds + \frac{1}{\xi_1} \int_0^{\xi_1} G_1^2(\bar{x}_2) z_2^2 e^{\gamma_1 t} d\tau \end{aligned} \tag{21}$$

状态变量假定存在于闭区域内, 因有  $G_1(\bar{x}_2) = G_m$ , 方程(21)两边同乘以  $1/G_1^2(\bar{x}_2)$ , 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_1^2 \xi_1} \int_0^{\xi_1} \pi_1(t) e^{\gamma_1 t} d\tau &= \\ \frac{1}{\xi_1} \int_0^{\xi_1} \frac{1}{G_1^2} N(s) ds + \frac{1}{G_1^2 \xi_1} \int_0^{\xi_1} G_1^2(x_1, x_2) z_2^2 e^{\gamma_1 t} d\tau \end{aligned} \tag{22}$$

根据引理1, 如果  $z_2$  收敛为零, 方程(22)的左端趋于正无穷和负无穷 由此可推出只要  $z_2$  有界, 那么  $z_1$  也是有界的

**Step i** ( $2 \leq i \leq n$ ) 与 Step1 类似, 为表达方便, 记  $x_{n+1} = u$ , 相应的坐标变换为  $z_{n+1} = x_{n+1} - \alpha_n = 0$  给出如下调节函数:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = N(\xi_i) [z_i + \hat{W}_i^T S(x_i) + \hat{d}_i \tanh(z_i/\omega)], \\ \dot{\xi}_i = z_i^2 + z_i \hat{W}_i^T S(x_i) + z_i \hat{d}_i \tanh(z_i/\omega), \\ \dot{\hat{W}}_i = -\Gamma_i \lambda \hat{W}_i + \Gamma_i z_i S(x_i), \\ \dot{\hat{d}}_i = -\lambda_i \sigma_i \hat{d}_i + \sigma_i z_i \tanh(z_i/\omega). \end{cases} \tag{23}$$

对方程(11)中的  $z_i$  求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \dot{x}_i - \dot{\alpha}_{i-1} = \\ &F(x_i, 0) + G(x_{i+1}) x_{i+1} + d_i(t) - \dot{\alpha}_{i-1}. \end{aligned} \tag{24}$$

从式(23)可以看到

$$\dot{\alpha}_i = \alpha(\bar{x}_{i-1}, \bar{W}_{i-1}, \bar{D}_{i-1}).$$

导数  $\dot{\alpha}_{i-1}$  为向量变量  $(\bar{x}_{i-1}, \bar{W}_{i-1}, \bar{D}_{i-1})$  的函数 其中

$$\bar{W}_{i-1} = [\hat{W}_1^T, \hat{W}_2^T, \dots, \hat{W}_{i-1}^T]^T,$$

$$\bar{D}_{i-1} = [\hat{d}_1, \hat{d}_2, \dots, \hat{d}_{i-1}]^T$$

文献[1]推导出了 $\hat{\alpha}_{i-1}$ 的所有项,但本文简单地将 $\hat{\alpha}_{i-1}$ 看作状态向量 $\bar{x}_i$ 的函数,这样大大地减少了神经元节点的数量及计算的复杂性,而且避免了分析难度,其效果在仿真中得到了证实.因此方程(24)可重新表达为

$$\dot{z}_i = F(\bar{x}_i) + G(\bar{x}_{i+1})x_{i+1} + d_i(t), \quad (25)$$

其中 $F(\bar{x}_i) = F(\bar{x}_i, 0) - \hat{\alpha}_{i-1}$ 为一个未知函数,由RBF网络逼近,网络的输入向量为 $\bar{x}_i$ .

考虑如下的Lyapunov函数:

$$V_i = \frac{1}{2}z_i^2 + \frac{1}{2}W_i^2 \tilde{\Gamma}_i^{-1} + \frac{1}{2}\sigma_i^{-1}\tilde{d}_i^2 \quad (26)$$

类似于Step 1,可得

$$\dot{V}_i(t) = -\frac{\rho_i}{\gamma_i} + e^{-\gamma_i t} \pi_i(t) e^{\gamma_i \tau} d\tau \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \min\left\{\frac{3}{2}, \frac{\lambda}{\lambda_{\max}(\Gamma_i^{-1})}, \sigma_i \lambda\right\}, \\ \rho_i &= \frac{\lambda}{2} W_i^*{}^2 + \frac{\lambda}{2} \tilde{d}_i^2 + 0.2785\omega \tilde{d}_i \\ \pi_i(t) &= [G_i(\bar{x}_{i+1})N(\xi_i) + 1] \dot{\xi}_i + \\ &\quad G_i^2(\bar{x}_{i+1})z_{i+1}^2 \end{aligned} \quad (28)$$

利用引理1可得,  $\xi_i(t), V_i(t)$  及  $z_i(t), W_i(t)$  和  $\tilde{d}_i(t)$  是最终有界的. 由  $z_{n+1} = u - \alpha_n = 0$  和  $\int_0^t G_n^2(\bar{x}_{n+1})z_{n+1}^2 e^{-\gamma_n \tau} d\tau = 0$  可得如下闭环系统的稳定性定理

**定理 1** 对于非线性系统(1),如果满足假定1~假定3,那么由式(11)和(23)给出的调节律所产生的闭环系统,其所有信号是半全局一致有界的.

由上述Step 1~Step  $i$  可证得定理 1.

#### 4 实例仿真

采用如下的非线性对象进行仿真测试:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1 - e^{-x_1}}{1 + e^{-x_1}} + x_2^3 + x_2 e^{-1-x_1^2} + 0.5 \sin t, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + 0.15u^3 + 0.1(1+x_2^2)u + \sin(0.1u) + 0.2 \sin t \end{cases} \quad (29)$$

现采用10个RBF神经元节点逼近每个非线性函数,即 $W_1^T S(x_1)$ 包含有10个节点,其中心分布于 $[-5, 5]$ 上,宽度为1; $W_2^T S(x_1, x_2)$ 也包含有10个节点,中心位于 $[-5, 5] \times [-5, 5]$ 上,宽度等于1.状态变量的初值为 $x(0) = [2, 1]$ ,控制参数 $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .仿真结果如

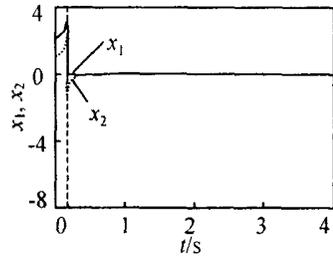


图1  $x_1$  和  $x_2$  的仿真曲线

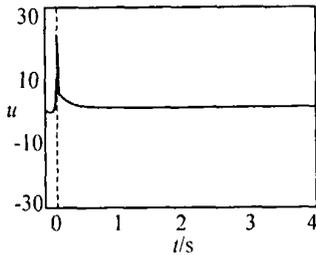


图2  $u$  的控制曲线

图1和图2所示

#### 5 结论

针对一类具有下三角结构的受扰非线性系统,提出一种基于RBF网络的控制方案.与以往文献相比,本文采用更简单的方法推导出控制律并证明了闭环信号是半全局最终一致有界的.由于采用了Nussbaum增益函数,控制奇异和控制方向问题得到了解决,并通过仿真方法验证了其有效性.但采用Nussbaum函数会损害系统的暂态性能,这将是进一步要做的工作.

#### 参考文献(References)

- [1] Ge S S, Wang C. Adaptive NN control of uncertain nonlinear pure-feedback systems[J]. *Automatica*, 2002, 38(4): 1365-1372.
- [2] Wang D, Huang J. Adaptive neural network control for a class of uncertain nonlinear systems in pure-feedback[J]. *Automatica*, 2002, 38(8): 1365-1372.
- [3] Polycarpou M M. Stable adaptive neural control scheme for nonlinear systems[J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 1996, 41: 447-451.
- [4] Ye X, Jiang J. Adaptive nonlinear design without a priori knowledge of control directions[J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 1998, 43: 1617-1621.
- [5] Nussbaum R D. Some remarks on the conjecture in parameter adaptive control[J]. *System Control Letter*, 1993, 3: 243-246.
- [6] Ryan E P. Nonlinear universal servomechanism[J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 1994, 39(4): 753-761.