

文章编号: 1001-0920(2005)04-0392-06

基于 LQR 和模糊插值的五级倒立摆控制

罗 成, 胡德文, 祝晓才, 董国华

(国防科技大学 机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 首先给出五级倒立摆的数学模型并验证了它的可控性; 然后在分析与倒立摆系统稳定性有关因素的基础上, 结合 LQR 理论构造出一种非对角型的权重矩阵, 并给出了设定该矩阵中各元素的方法; 最后设计出一个简单的基于二元分片插值函数的模糊控制器, 成功地实现了具有定位功能的五级倒立摆的控制。仿真结果表明该方法是有用的。

关键词: 五级倒立摆; 模糊控制; LQR 理论

中图分类号: TP273.4 **文献标识码:** A

Quintuple inverted pendulum control based on LQR and fuzzy piecewise interpolation

LUO Cheng, HU De-wen, ZHU Xiao-cai, DON G Guo-hua

(College of Mechatronics and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Correspondent: HU De-wen, E-mail: dw hu@nudt.edu.cn)

Abstract: The mathematical model on the quintuple inverted pendulum is presented, and its controllability is verified. Based on the LQR theory and the discussion of multiple factors related to the stability of the inverted pendulum, a non-diagonal weight matrix is constructed and a method to set the value of the matrix elements is proposed. An efficient fuzzy controller based on 2-ary piecewise interpolation function is designed, and the simulation of the quintuple inverted pendulum is described in detail. The results of the simulation show the validation of the proposed method.

Key words: quintuple inverted pendulum; fuzzy control; LQR theory

1 引 言

倒立摆系统是一种用于检验某种控制理论或方法的典型工具, 对它的研究具有重要的理论和实践意义。Furuta 等^[1]首次实现了双电机三级倒立摆实物控制的突破; Zhang 等^[2]发表了三级倒立摆的仿真结果; 张乃尧等^[3]实现了单电机三级倒立摆的实物控制; 肖军等^[4]和李洪兴等^[5]先后发表了四级倒立摆的仿真结果; 李洪兴等还实现了四级倒立摆的实物控制。至于五级倒立摆的控制问题, 至今还未见报道。

多级倒立摆系统变量多, 非线性和耦合性强, 一般都基于某种智能控制方法, 如模糊控制^[2-4]、神经网络控制^[6]、拟人智能控制^[7]等。当采用模糊控制方法时, 面临的一个困难是“规则爆炸”问题。为此, 有人提出了“串行处理”的控制方法^[2,3], 最近又提出一种“并行处理”的控制方法^[4]。然而, 无论是串行还是并行, 所需的规则数仍然较多。克服这一困难简便而有效的方法是利用 LQR 理论, 将众多状态变量综合成两个变量, 即综合误差和综合误差变化率, 并以此为基础设计模糊控制器^[5,8]。这种方法的关键是确保

收稿日期: 2004-06-03; 修回日期: 2004-08-05

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(60234030); 国家杰出青年科学基金项目(60225015); 高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划项目。

作者简介: 罗成(1973—), 男, 江西九江人, 博士生, 从事模糊控制等研究; 胡德文(1963—), 男, 湖南岳阳人, 教授, 博士生导师, 从事系统辨识、神经网络等研究。

所选取的权重矩阵要恰当

本文在分析各种与倒立摆系统稳定性有关因素的基础上, 构造出一种非对角型的矩阵, 并给出了设定该矩阵中各元素的方法 以此为基础, 设计一个简单的基于二元插值函数的模糊控制器, 成功地实现了具有定位功能的五级倒立摆系统的控制

2 五级倒立摆的数学模型

2.1 五级倒立摆的结构和记号

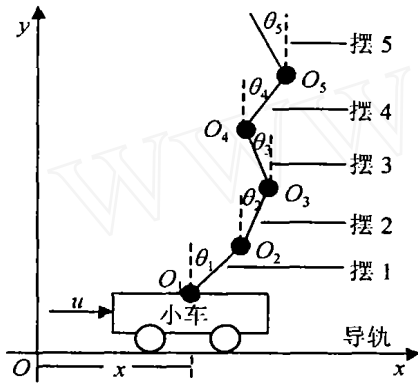


图 1 五级倒立摆结构示意图

五级倒立摆本体由小车、摆杆 1~ 摆杆 5 组成, 如图 1 所示 其中: u 为外界对小车的水平作用力, x 为小车的位移, θ_i 为摆 i 与竖直方向的夹角 设 m_0 为小车的质量, m_i 为摆 i 的质量, J_i 为摆 i 绕 G_i 的转动惯量, l_i 为 O_i 到摆 i 质心 G_i 的距离, L_i 为摆 i 的长度, f_0 为小车和导轨间的滑动摩擦系数, f_i 为摆 i 绕 O_i 转动的摩擦阻力矩系数 ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

2.2 五级倒立摆的状态方程

五级倒立摆的状态方程既可通过对各构件的受力分析, 基于动力方程和力矩方程得到, 也可通过 Lagrange 函数得到 具体推导参见文献[9], 这里直接给出其结果, 即

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (1)$$

其中

$$x = (z, \dot{z})^T, z = (x, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} O_6 & I_6 \\ M^{-1}G & M^{-1}H_2^{(0)} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} O_{6 \times 1} \\ M^{-1}h_0 \end{bmatrix};$$

其余, $O_{6 \times 1}$ 为 6 维零列向量, O_6 和 I_6 分别为 6 阶零矩阵和单位矩阵, $h_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$, 而

$$M = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1 & b_1 & a_2L_1 & a_3L_1 & a_4L_1 & a_5L_1 \\ a_2 & a_2L_1 & b_2 & a_3L_2 & a_4L_2 & a_5L_2 \\ a_3 & a_3L_1 & a_3L_2 & b_3 & a_4L_3 & a_5L_3 \\ a_4 & a_4L_1 & a_4L_2 & a_4L_3 & b_4 & a_5L_4 \\ a_5 & a_5L_1 & a_5L_2 & a_5L_3 & a_5L_4 & b_5 \end{bmatrix} H_2^{(0)} =$$

$$\begin{bmatrix} -f_0 & & & & & \\ & -f_1 - f_2 & f_2 & & & \\ & f_2 & -f_2 - f_3 & f_3 & & \\ & & f_3 & -f_3 - f_4 & f_4 & \\ & & & f_4 & -f_4 - f_5 & f_5 \\ & & & & f_5 & -f_5 \end{bmatrix} G =$$

$$\text{diag}(0, a_{1g}, a_{2g}, \dots, a_{5g}).$$

式中各系数为

$$a_0 = \sum_{j=0}^5 m_j, a_i = m_i l_i + \sum_{j=i+1}^5 m_j L_j, b_i = J_i + m_i l_i^2 + \sum_{j=i+1}^5 m_j L_j^2, 1 \leq i \leq 5$$

2.3 模型参数及其可控性分析

五级倒立摆的各参数分别取值如下^[9]:

$$m_0 = 1.3282 \text{ kg},$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 0.220 \text{ kg},$$

$$m_5 = 0.187 \text{ kg},$$

$$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 0.304 \text{ m},$$

$$l_5 = 0.226 \text{ m},$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0.49 \text{ m},$$

$$J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = 0.004963 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$J_5 = 0.004824 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$f_0 = 22.9147,$$

$$f_1 = 0.007056,$$

$$f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = 0.002646 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m},$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2.$$

将上述各参数代入式(1), 可得 A 和 b 的具体数值如下:

$$b = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.7277, -1.7908, 0.3685, -0.0758, 0.0153, -0.0034)^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} O_6 & I_6 \\ -A_1 & A_2 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -8.4573 & 1.3511 & -0.1978 & 0.0237 & -0.0014 \\ 0 & 150.8061 & -125.0049 & 18.2971 & -2.1954 & 0.1318 \\ 0 & -161.0251 & 248.2996 & -108.1187 & 12.9726 & -0.7787 \\ 0 & 33.1101 & -151.8843 & 180.2498 & -63.5093 & 3.8124 \\ 0 & -6.6745 & 30.6174 & -106.7009 & 100.9301 & -18.5306 \\ 0 & 1.5027 & -6.8934 & 24.0234 & -69.5019 & 50.9499 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -16.6754 & 0.0183 & -0.0069 & 0.0014 & -0.0003 & 0.0000 \\ 41.0350 & -0.4000 & 0.2835 & -0.1311 & 0.0269 & -0.0046 \\ -8.4447 & 0.5100 & -0.5582 & 0.4205 & -0.1588 & 0.0271 \\ 1.7364 & -0.1776 & 0.4205 & -0.5833 & 0.4235 & -0.1325 \\ -0.3500 & 0.0358 & -0.1561 & 0.4104 & -0.5704 & 0.2903 \\ 0.0788 & -0.0081 & 0.0351 & -0.1721 & 0.5866 & -0.4439 \end{bmatrix}.$$

容易验证此时式(1)所对应的状态方程是完全可控的

3 权重矩阵构造与设定

3.1 与倒立摆系统稳定性有关的几个因素

1) 各摆杆的偏角越大,倒立摆系统的稳定性越差;小车的位移偏差也是如此

2) 小车运动速度和摆杆角速度越大,倒立摆系统的稳定性越差

3) 当小车位移与其速度、摆杆偏角与其角速度相反时,倒立摆稳定性好,反之则差

上述三点比较直观,这里重点讨论下面一点:

4) 摆杆偏离方向对倒立摆系统稳定性的影响:对于一个 n 级倒立摆系统,摆杆的偏离方向有 2^n 种情况,其中两种极端的情形是(还有两种与此是对称的,故不予讨论):

$$\theta_1 = 0, \theta_2 = 0, \theta_3 = 0, \dots;$$

$$\theta_1 > 0, \theta_2 < 0, \theta_3 > 0, \theta_4 < 0, \dots$$

基于文献[9]的倒立摆模型和文献[5]的控制方法,作者对2~4级倒立摆的上述两种情形进行仿真,结果表明:情形1即各摆杆的偏离方向一致时,系统较易控制;情形2即各摆杆偏向左右相间时,系统较难控制.因此推断五级倒立摆也有此规律(仿真结果证实了这一点).

3.2 综合误差和综合误差变化率

对于式(1)表示的五级倒立摆系统,状态变量有12个之多.为克服采用模糊控制器时面临的规则爆炸问题,需对状态变量进行降维处理.记综合误差 E 和综合误差变化率 EC 为

$$\begin{cases} E \triangleq k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_6x_6, \\ EC \triangleq k_7x_7 + k_8x_8 + \dots + k_{12}x_{12} \end{cases} \quad (2)$$

其中 k_1, k_2, \dots, k_{12} 为综合系数,可通过LQR理论得

到.具体如下:给定最优控制泛函指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)RU(t))dt, \quad (3)$$

求解如下 Riccati 方程:

$$-PA - A^T P + P b R^{-1} b^T P - Q = 0, \quad (4)$$

可得状态反馈矩阵

$$K^T = R^{-1} b^T P. \quad (5)$$

对 K^T 除以某一合适的常数 k , 便得到综合系数

$$(k_1, k_2, \dots, k_{12}) = K^T / k. \quad (6)$$

3.3 权重矩阵的构造

由3.2节可以看出,要得到合理的综合误差系数,关键是要选择合适的权重矩阵 Q 和 R . 式(3)的最优控制泛函指标实际上反映了系统状态向量对于目标值偏离以及控制代价.一个合理的指标应具备如下性质:

性质1 系统越趋于控制目标,指标中的被积分项的值越小

因此,合适的 Q 和 R 应全面体现影响系统稳定性的各个因素.传统的权重矩阵 Q 为半正定的对角阵^[5,8],即

$$Q = \text{diag}(q_0, q_1, \dots, q_n, \overbrace{0, \dots, 0}^{n+1}), \quad (7)$$

其中 n 为倒立摆系统的级数

对于式(1)表示的五级倒立摆系统,采用式(7)的 Q 值,则最优控制泛函指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (q_0 x^2 + q_1 \theta + \dots + q_5 \theta^2 + R u^2(t))dt \quad (8)$$

从式(8)可以看出,这里仅仅考虑了位移和各个偏角的大小,而没有考虑摆杆偏离方向等其他因素的影响.如将3.1节所分析的与倒立摆系统稳定

合误差 E 和综合误差变化率 EC 以及输出变量 y 的论域, A_i 和 B_j ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) 分别是 E 和 EC 在论域 X_1 和 X_2 上的模糊划分, C_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) 为 y 在论域 Y 上的模糊划分, y_{ij} 为 C_{ij} 的峰点. 对于规则库 R , 有

$$\text{If } E \text{ is } A_i \text{ and } EC \text{ is } B_j \text{ Then } y \text{ is } C_{ij},$$

$$1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

基于文献[10]的结论, 该模糊逻辑系统可表示为一个二元分片插值函数

$$y(E, EC) \triangleq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m A_i(E)B_j(EC)y_{ij}. \quad (14)$$

取论域 $X_1 = X_2 = [-1, 1], Y = [-1, 1]$, 论域 X_1 和 X_2 上采用 7 个等距划分的三角型隶属度函数的模糊集 ($m = n = 7$), 依次表示“负大(NB), 负中(NM), 负小(NS), 零(ZERO), 正小(PS), 正中(PM), 正大(PB)”等语言值. 输出变量 y 的模糊集 C_{ij} 的峰点 y_{ij} 为: $0, \pm 1/6, \pm 2/6, \pm 3/6, \pm 4/6, \pm 5/6$. 如此形成的模糊控制器规则如表 1 所示^[5].

表 1 基于 E 和 EC 的模糊控制规则

	NB	NM	NS	ZERO	PS	PM	PB
NB	-5/6	-5/6	-4/6	-3/6	-2/6	-1/6	0
NM	-5/6	-4/6	-3/6	-2/6	-1/6	0	1/6
NS	-4/6	-3/6	-2/6	-1/6	0	1/6	2/6
ZERO	-3/6	-2/6	-1/6	0	1/6	2/6	3/6
PS	-2/6	-1/6	0	1/6	2/6	3/6	4/6
PM	-1/6	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6
PB	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	5/6

将上述模糊控制器的输出 $y(E, EC) \triangleq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m A_i(E)B_j(EC)y_{ij}$ 乘以一个设计常数 U ($U = 5000$), 便得到实现控制五级倒立摆系统的控制量

$$u = Uy(E, EC) \triangleq U \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m A_i(E)B_j(EC)y_{ij}. \quad (15)$$

从式(15)可以看出, 该模糊逻辑系统的推理后件是一个峰点. 与传统的模糊控制器^[4]相比, 省略了去模糊过程, 减少了计算量, 并且更易于实现; 与变论域模糊控制器^[5]相比, 省去了多个伸缩因子, 简化了控制器的设计.

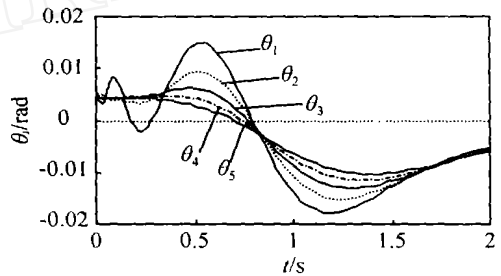
5 五级倒立摆系统仿真

对于五级倒立摆系统, 各摆杆偏角 $\theta_1 \sim \theta_5$ 的偏离方向有 32 种情形. 参照 3.1 节的分析与推断, 取下述两种情形进行仿真:

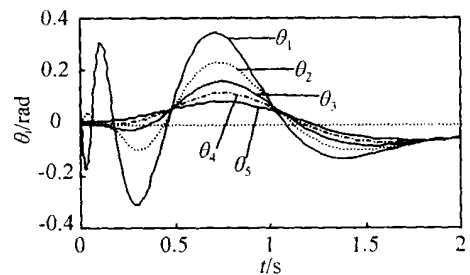
- 1) $\theta_1(0) = \pi/540, \theta_2(0) = \theta_3(0) = \theta_4(0) = \theta_5(0) = \pi/720;$
- 2) $\theta_1(0) = \pi/540, \theta_2(0) = \theta_3(0) = -\pi/720, \theta_4(0) = \theta_5(0) = \pi/720;$

初始位移偏差 $x(0) = 0.2$, 要求小车运动到指定位置 $x_d = 0$. 仿真结果如图 2 所示.

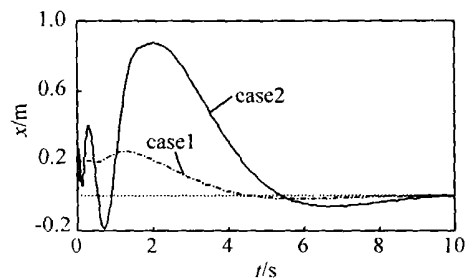
从图 2 可以看出: 情形 1) 和情形 2) 各摆杆偏角的收敛时间基本相同, 而前者振荡幅度明显小于后者. 这说明初始偏离方向一致时, 稳定性好; 初始偏离方向左右相间时, 稳定性差. 无论情形 1) 还是情形 2), 各摆杆偏角在一定时刻后偏向基本一致. 这说明在倒立摆系统趋于稳定的过程中, 摆杆的偏离方向一致时系统的稳定性更好. 由此可见 3.1 节的推断是正确的.



(a) 情形 1 的偏角曲线



(b) 情形 2 的偏角曲线



(c) 位移曲线

图 2 偏角和位移的仿真结果

6 结论

本文分析了与五级倒立摆系统稳定性有关的因素, 并结合 LQR 理论构造出一种非对角型矩阵, 给出了设定该矩阵中各元素的方法. 在此基础上, 设计了一个基于二元分片插值函数的模糊控制器, 该模糊控制器规则数量少, 结构简单, 计算量小, 易于设计和实现. 仿真结果表明该方法是有效的.

参考文献 (References)

[1] Furuta K, Ochiai T, Ono N. Attitude control of a

- triple inverted pendulum [J]. *Int J of Control*, 1984, 39 (6): 1351-1365
- [2] Zhang H X, Ma X W, Xu W. Design fuzzy controllers complex systems with an application to 3-stage inverted pendulum s [J]. *Information Sciences*, 1993, 72: 271-284
- [3] 张乃尧, Ebert C, Belschner R, 等. 倒立摆的双闭环模糊控制[J]. *控制与决策*, 1996, 11(1): 85-88
(Zhang N Y, Ebert C, Belschner R, et al Fuzzy cascade control of an inverted pendulum [J]. *Control and Decision*, 1996, 11(1): 85-88)
- [4] 肖军, 张石, 徐心和. 四级倒立摆系统的模糊控制方法研究[J]. *系统仿真学报*, 2001, 13(6): 752-755
(Xiao J, Zhang S, Xu X H. Fuzzy control of the four level inverted pendulum [J]. *System Simulation*, 2001, 13(6): 752-755)
- [5] 李洪兴, 苗志宏, 王加银. 四级倒立摆的变论域自适应模糊控制[J]. *中国科学(E 辑)*, 2002, 32(1): 65-75
(Li H X, Miao Z H, Wang J Y. Variable universe adaptive fuzzy control on the quadruple inverted pendulum [J]. *Science in China (Ser E)*, 2002, 32(1): 65-75)
- [6] Anderson C W. Learning to control an inverted pendulum with neural networks [J]. *IEEE Control System Magazine*, 1989, 9(3): 31-36
- [7] 张明廉, 郝健康, 何卫东, 等. 拟人智能控制与三级倒立摆[J]. *航空学报*, 1995, 16(6): 654-661
(Zhang M L, Hao J K, He W D, et al Human-imitating intelligent control and triple inverted pendulum [J]. *Acta Aeronautica and Astronautica Sinica*, 1995, 16(6): 654-661)
- [8] Cheng F Y, Zhong G M, Li Y S. Fuzzy control of a double-inverted pendulum [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, 79: 315-321.
- [9] 王加银. 基于变论域自适应模糊控制的倒立摆仿真与实物实现[D]. 北京: 北京师范大学, 2002
- [10] 李洪兴. 模糊控制的插值机理[J]. *中国科学(E 辑)*, 1998, 28(3): 259-267.
(Li H X. Interpolation mechanism of fuzzy control [J]. *Science in China (Ser E)*, 1998, 28(3): 259-267.)

(上接第 391 页)

参考文献(References)

- [1] 李少远, 席裕庚. 模糊动态环境下复杂系统的满意优化控制[J]. *自动化学报*, 2002, 28(3): 408-412
(Li S Y, Xi Y G. Satisfactory optimization control in fuzzy dynamic environment for complex systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28(3): 408-412)
- [2] 席裕庚, 谷寒雨. 有约束多目标多自由度优化控制的可行性分析及软约束调整[J]. *自动化学报*, 1998, 24(6): 726-731.
(Xi Y G, Gu H Y. Feasibility analysis and soft constraints adjustment of CMMO [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1998, 24(6): 726-731.)
- [3] 席裕庚, 谷寒雨. CMMO 中基于灵敏度分析的目标协调[J]. *中国科学(E 辑)*, 1998, 28(5): 417-424
(Xi Y G, Gu H Y. Sensitivity analysis based objective coordination of constrained multi objective multi degree of freedom optimization [J]. *Science in China*, 1998, 28(5): 417-424)
- [4] Bemporad A, Morari M. Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints [J]. *Automatica*, 1999, 35(3): 407-427.
- [5] Tyler M L, Morari M. Propositional logic in control and monitoring problems [J]. *Automatica*, 1999, 35(4): 565-582
- [6] Kerrigan E C, Maciejowski J M. Soft constraints and exact penalty functions in model predictive control[A]. *Proc UKACC Int Conf [C]*. Cambridge, 2000
- [7] Raman R, Grossmann I E. Relation between MLP modeling and logical inference for chemical process synthesis [J]. *Computers and Chemical Engineering*, 1991, 15(2): 73-84
- [8] Prett D M, Morari M, Manfredi M. *The shell process control workshop* [M]. Boston: Butterworths, 1987: 20-31.