

文章编号: 1001-0920(2005)04-0403-05

递阶层次结构决策指标体系构建算法及应用

董玉成¹, 陈义华¹, 王 双²

(1. 重庆大学 数理学院, 重庆 400044; 2 上海交通大学 应用数学系, 上海 200240)

摘 要: 对决策问题及其支配关系采用加权有向图表示 首先设计一个指标用于衡量决策因素间的支配程度, 并给出了决策问题可转换为递阶层次结构的两个前提条件; 然后建立了 3 个多项式时间复杂度算法: 第 1 个算法在最大程度保留决策因素支配关系的基础上, 去掉决策因素间的循环支配; 第 2 个算法利用可达矩阵的知识, 将决策问题转化为递阶层次结构; 第 3 个算法给出了各决策指标的权重 应用上述算法开发出智能评估专家系统, 并以区域技术创新能力指标体系的构建为例, 介绍了该软件系统

关键词: 递阶层次结构; 加权有向图; 可达矩阵

中图分类号: C934; O 223

文献标识码: A

Algorithms of forming hierarchy for multi-attribute decision making and their application

DONG Yu-cheng¹, CHEN Yi-hua¹, WANG Shuang²

(1. School of Science, Chongqing University, Chongqing 400044, China; 2 School of Science, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China Correspondent: DONG Yu-cheng, Email: dyc108@sina.com)

Abstract: Weighted direct graph is used to describe multi-attribute decision making and affiliations among attributes Two prerequisites of transforming multi-attribute decision making into hierarchy are given. Then three polynomial-time algorithms are proposed. For the first algorithm, feedback affiliations are eliminated on condition that affiliations among attributes are maximally remained. For the second algorithm, multi-attribute decision making is transformed into hierarchy by using the knowledge of reachable matrix. For the third algorithm, the weight of each attribute is given. Chinese Expert Choice Software System (CEC) adopts the presented algorithms and is introduced by taking the evaluation system on innovative ability as an example.

Key words: hierarchy; weighted direct graph; reachable matrix

1 引 言

利用层次分析法解决问题, 关键是要建立比较合理的递阶层次结构和构造比较准确的判断矩阵. 当决策问题比较简单, 决策因素不是很多时, 层次分析法的递阶层次结构和判断矩阵的建立一般不会有困难; 当决策问题复杂时, 决策因素会有很多, 相互关系会很复杂, 单凭主观判断往往难以得到比较合理的递阶层次结构和准确的判断矩阵.

针对这一问题, 文献[1]对决策问题及其从属关系进行有向图表示, 设计了一种算法, 并探讨了复杂决策问题递阶层次结构的建立, 但该算法只适用于

将内部无循环支配的有向图转化为递阶层次结构, 无法生成判断矩阵, 应用面较窄. Satty 提出了反馈 AHP^[2,3], 并系统地提出了 ANP 的理论和方法^[4], 但 ANP 理论较为复杂, 计算量大, 可操作性差.

本文对决策问题及其从属关系采用加权有向图表示, 设计了多种算法, 用于自动建立层次分析法中递阶层次结构和各准则的判断矩阵, 可简化层次分析法中递阶层次结构的设计. 利用上述算法, 开发了通用智能评估软件系统 (CEC). 该系统已应用于区域技术创新、区域影响能力、概念微型车造型等复杂的评价指标体系的建立, 取得了良好的效果.

收稿日期: 2004-05-10; 修回日期: 2004-07-05

作者简介: 董玉成(1979—), 男, 湖北枝江人, 硕士生, 从事决策科学与工程的研究; 陈义华(1957—), 男, 重庆人, 教授, 从事运筹与控制、经济数学模型等研究.

2 决策问题的有向图建模

定义1 设有一决策问题 $I, V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是决策因素集合, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 是从属关系集合, 其中 $\mathcal{Q}_{e_k} = (v_i, v_j)$ 表示 v_j 从属于 v_i . 则称有向图 $G = (V, E, \mathcal{Q})$ 为问题 I 的决策关系, 记为 $G = (V, E)$.

定义2 设 $G = (V, E)$ 为决策问题 I 的决策关系, $\forall e_i \in E$, 对 e_i 赋予 $1 \sim 9$ 的权值(本文采用 $1 \sim 9$ 标度, 其中权值越大表示从属关系越强). 则称加权有向图 G 为问题 I 的加权决策关系

定义3 设 $G = (V, E)$ 为决策问题 I 的加权决策关系, $v_i, v_j \in V$ 之间有 K 条路径可以到达, 记为 $W_{ij}^k (k = 1, 2, \dots, K)$, 其中 $W_{ij}^k = (e_{k1}, e_{k2}, \dots, e_{ki}, \dots, e_{kn})$. 令 B_{ij}^k 为 W_{ij}^k 的边数, $d_{ij}^k = e_{ki} W_{ij}^k$, $p_{ij} = \prod_{k=1}^K \frac{d_{ij}^k}{B_{ij}^k - 1}, i, j = 1, 2, \dots, n$. 则称 $P = (p_{ij})$ 为 G 的可达矩阵

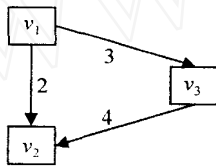


图1 定义3的图示

以图1为例, $W_{12}^1 = ((v_1, v_2)), W_{12}^2 = ((v_1, v_3), (v_3, v_2))$, 故 $d_{12}^1 = 2, d_{12}^2 = 3 \times 4 = 12, p_{12} = 2 + 12/9 = 3.33$. 依次求解 p_{ij} 可得

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 3.33 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

这样定义的 p_{ij} 能很好地表达 v_i 对 v_j 的支配关系及支配程度

本文定义的可达矩阵与图论教材^[5,6]中定义的可达矩阵是有区别的, 图论中的可达矩阵只要是通路就可以, 而定义3需要的是路径. 求可达矩阵算法的时间复杂度为 $O(n^4)$.

定义4 设 $G = (V, E)$ 为决策问题 I 的加权决策关系, $P = (p_{ij})$ 为 G 的可达矩阵. 称 $R(v_i) = \{v_j | v_j \in V, p_{ij} > 0\}$ 为 v_i 的后项集, $A(v_i) = \{v_j | v_j \in V, p_{ji} > 1\}$ 为 v_i 的前项集

定义5 问题 I 为一决策问题, 将其转化为加权决策关系 $G(V, E)$, 当满足如下可行性条件时, 则称转化是合理的:

- 1) $v_1 \in V$ 是问题 I 的决策目标, 有 $R(v_1) = V \setminus \{v_1\}$;
- 2) $v_i, v_j \in V$, 当 $i = j$ 时, $p_{ij} = 0$; 当 $i \neq j$ 时,

$p_{ij} \times p_{ji} = 0$, 且 $p_{ij} + p_{ji} > 0 (i, j = 1, 2, \dots, n)$.

条件1) 表明决策问题是一个互相关联的统一体; 条件2) 表明决策因素不存在循环支配关系

如果不满足条件1), 则决策问题需要分成若干子系统进行讨论; 如果不满足条件2), 则可按如下算法进行处理:

算法1

- 1) 根据有向图 $G(V, E)$ 作出其邻接矩阵 $A = (a_{ij})$.
- 2) 设 $v_1 \in V$ 是问题 I 的决策目标, 若 A 的第1列全为0, 则转到3); 否则, 对 $\forall j$ 令 $a_{j1} = 0$, 再转到3).
- 3) 置 $k = 1, A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) = A$.
- 4) 根据邻接矩阵 $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$, 采用Dijkstra算法求从 v_i 到 v_j 的最短路径. 若 $\exists i$ 有最短路径, 则得到一个圈(或有向环), 记为 $Q^k = \{e_{k1}, e_{k2}, \dots, e_{kn}\}$, 转到5); 否则, 转化成功并退出
- 5) 在 $Q^k = \{e_{k1}, e_{k2}, \dots, e_{kn}\}$ 中寻找权值最小的边, 记为 $e_{km \min}$, 不妨记 $\mathcal{Q}_{e_{km \min}} = (v_m, v_n)$. 令 $a_{mn}^k = 0$, 若 v_1 可达 v_n , 则 $A^{(k+1)} = A^{(k)}, k = k + 1$, 转到4); 否则, 转到6).
- 6) $Q^k = Q^k \setminus \{e_{ik}\}$, 若 $Q^k = \Phi$, 则初始 $G(V, E)$ 需要修改并退出; 否则, 转到5).

算法1的基本思路是每次在有向图中找到一个有向圈(或有向环), 采用贪婪的思想, 每次去掉圈中权值最小的边, 直到有向图中没有有向圈和有向环

经过算法1的处理, 决策问题 I 便转化成合理的加权决策关系 $G(V, E)$, 或需要重新调整初始 $G(V, E)$. 在调整过程中, 决策者需要检查初始 $G(V, E)$ 的支配关系和权重是否合理. 如果都很合理, 则说明决策问题各因素存在严重的依赖关系, 无法转换成递阶层次结构, 必须采用网络层次结构^[4]来处理

Dijkstra算法的时间复杂度为 $O(n^2)$, 所以找到一个圈的时间复杂度为 $O(n^3)$; 在圈中找到最小且可去掉的边的时间复杂度为 $O(n^2)$, 所以去掉一条边的时间复杂度为 $O(n^3) \times O(n^2) = O(n^5)$; 去掉边的次数最多可能重复 $|E|$ 次 ($|E|$ 为 $G(V, E)$ 的边数), 故算法1的时间复杂度为 $O(n^6)$.

3 递阶层次决策指标体系构建算法

$G(V, E)$ 是决策问题 I 的一个合理的加权决策关系. 将 G 转化为递阶层次结构的算法如下:

算法2^[1,7]

- 1) 设 $G(V, E)$ 为合理的加权决策关系, A 为其邻接矩阵, 求出可达矩阵 $P = (p_{ij})$.
- 2) 置 $k = 1, P^{(k)} = P$.

检验

5 通用智能评估系统介绍

通用智能评估软件系统(CEC), 是作者近期开发并测试完成的一个基于群组AHP的决策支持系统 前端开发语言为 C++ builder 5.0, 后台为 Access 2000 数据库 CEC 主要由两个模块组成:

1) 递阶层次结构决策指标体系构建算法: 这方面内容参见文献[1], 作者所作的改进参见文献[7], 其主体是本文的算法 1~ 算法 3

2) 群组决策排序、一致性和相容性检验: 该模块包含常见的AHP单排序和群组决策排序, 并支持残缺判断矩阵, 具体参见文献[1] 其中包括作者最近研究的相容性最小排序、相容性修正算法及一致性相容性和检验方法, 具体参见文献[8, 9]

实际应用 CEC 的步骤如下:

- 1) 给出决策问题 I 的加权决策关系 $G(V, E)$;
- 2) 用算法 1 得到合理的加权决策关系 $G(V, E)$;
- 3) 用算法 2 生成递阶层次结构;

4) 用算法 3 生成初始判断矩阵;

5) 用文献[11]的方法群决策调整指标权重;

6) 用文献[8]的方法检验专家判断矩阵一致性和群组决策相容性

下面以区域技术创新能力评价为例加以说明 区域技术创新指标体系建立的背景是: 2000 年全国进行了 R & D 资源普查, 收集了大量数据, 重庆市需要即时评价本市区域技术创新能力的现状, 并与兄弟省市进行比较 课题背景及内容详见文献[10, 11]

该系统是由作者及课题组成员采用 CEC 共同建立的 经过对区域技术创新能力加权决策有向图的多次调整, 用 CEC 生成的结构与图 4 大致一样 (细微之处作了微调). 限于篇幅, 专家判断矩阵没有给出, 直接给出各指标的权重值, 如图 4 所示

6 结 语

本文利用算法 1~ 算法 3, 将复杂的决策问题通过有向图表示, 转化为层次分析法标准的递阶层次结构, 并对每个决策因素给出一个推荐的判断矩阵

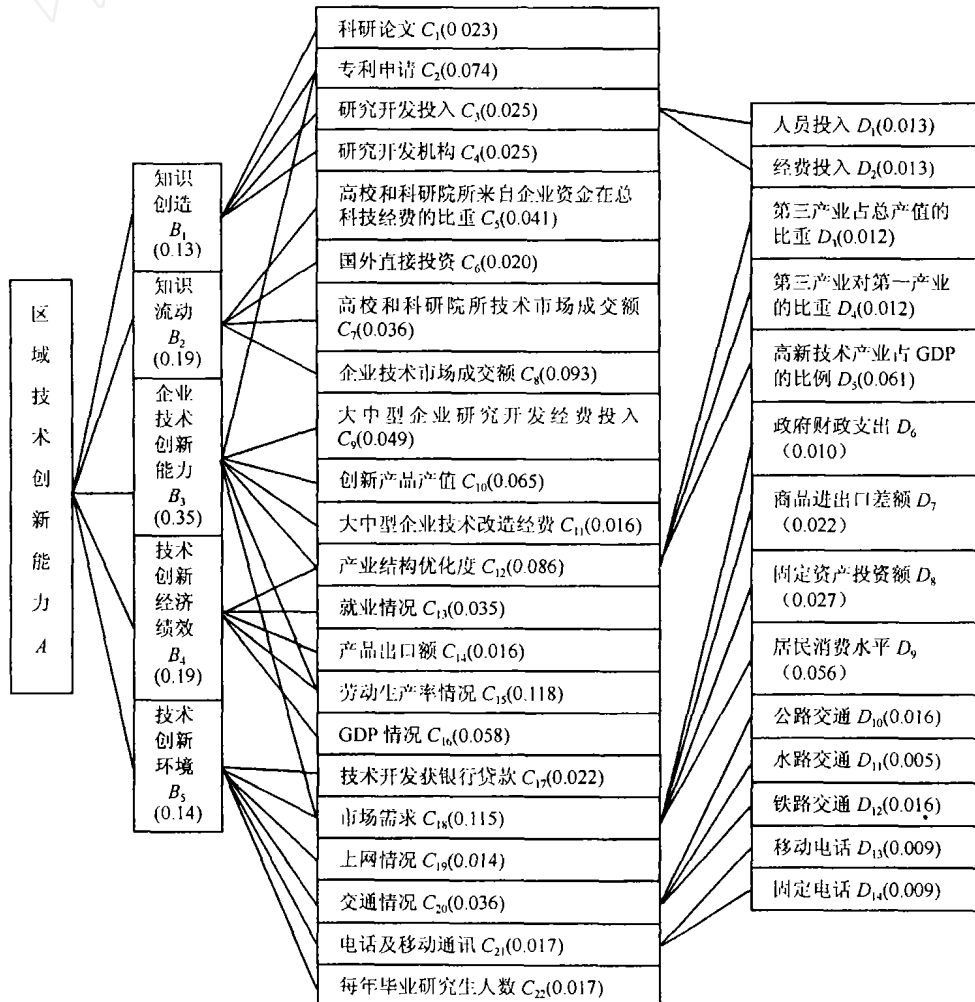


图 4 区域技术创新能力评价指标体系

在此基础上开发了通用智能评估软件系统(CEC), 该系统已应用于区域技术创新、区域影响能力、概念微型车造型等复杂的评价指标体系的建立。上述工作只是递阶层次结构决策指标体系构建的初步尝试, 更多的工作还有待于展开, 特别是以下工作需要研究:

1) 决策问题的决策因素多到什么程度使用本文方法较为经济、合理, 这与决策者的知识背景、民族文化等具体因素有关, 不同的决策者会有不同的看法, 可采用心理学实验的方法进一步研究

2) 算法1的时间复杂度为 $O(n^6)$, 有待进一步改进, 以设计出更好的算法

参考文献(References)

- [1] 王莲芬, 许树柏. 层次分析法引论[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1990
- [2] Saaty T L. *Multicriteria decision making* [M]. Pittsburgh: RW S Publications, 1990
- [3] Saaty T L. Inner and outer dependence in the analytic hierarchy process: The super matrix and super hierarchy [A]. *Proc of the 2nd ISAHP* [C]. Pittsburgh, 1991: 308-317.
- [4] Saaty T L. *Decision making with dependence and feedback* [M]. Pittsburgh: RW S Publication, 1996
- [5] 王秋苹, 梁戈. 求可达矩阵的Warshall算法[J]. *西安理工大学学报*, 1996, 12(1): 80-82
(Wang Q P, Liang G. The Warshall algorithm for computing reachability matrix [J]. *J of Xi'an University of Technology*, 1996, 12(1): 80-82)
- [6] 陈光, 刘筠, 韩玉真. 算法与数据结构[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002
- [7] 董玉成, 陈义华. AHP层次分析法的自动生成算法[J]. *重庆大学学报*, 2003, 26(9): 145-147.
(Dong Y C, Chen Y H. To form AHP automatically with a new arithmetic [J]. *J of Chongqing University*, 2003, 26(9): 145-147.)
- [8] 董玉成, 陈义华. 群组决策可接受性理论[J]. *重庆大学学报*, 2004, 27(6): 104-106
(Dong Y C, Chen Y H. Acceptance theory in group decision making [J]. *J of Chongqing University*, 2004, 27(6): 104-106)
- [9] 董玉成, 陈义华. 层次分析法(AHP)中的检验[J]. *系统工程理论与实践*, 2004, 24(7): 105-111.
(Dong Y C, Chen Y H. Test in AHP [J]. *Systems Engineering—Theory and Practice*, 2004, 24(7): 105-111.)
- [10] Chen Y H, Dong Y C. Application of AHP method in evaluation of creativity [A]. *CSIAM '2002* [C]. London, 2000: 183-188
- [11] 陈义华, 董玉成. 东西部科技投入与经济增长关联关系比较[J]. *重庆大学学报*, 2003, 26(12): 84-87.
(Chen Y H, Dong Y C. Comparison research on the dedicative rate of science and technology's devotion to economic increase between east China and west China [J]. *J of Chongqing University*, 2003, 26(12): 84-87.)

(上接第402页)

参考文献(References)

- [1] 严纯华, 贾江涛, 廖春生, 等. 稀土串级萃取分离过程的自动控制系统[J]. *稀土*, 1997, 18(2): 37-43
(Yan C H, Jia J T, Liao C S, et al. Automation system in rare earth separation by countercurrent extraction process [J]. *Chinese Rare Earths*, 1997, 18(2): 37-43)
- [2] Kolodner J L. *Case-based reasoning* [M]. Morgan Kaufmann, 1993
- [3] Amodeo A, Plaza E. Case-based reasoning: Foundational issues, methodological variations and system approaches [J]. *AI Communications*, 1994, 7(1): 39-59
- [4] 徐光宪. *稀土* [M]. 第2版. 北京: 冶金工业出版社, 1995
- [5] Tham M T, Morris A J, Montague G A. Soft-sensors for process estimation and inferential control [J]. *J Process Control*, 1991, 1: 3-14
- [6] Yang H, Tan M H, Chai T Y. Neural networks based component content soft-sensor in countercurrent rare-earth extraction [J]. *J of Rare Earth*, 2003, 21(6): 691-696
- [7] 杨辉, 柴天佑. 串级萃取分离组份含量软测量及应用 [J]. *有色冶金设计与研究*, 2003, 24(S): 129-134
(Yang H, Chai T Y. Concatenation extraction separation constituent content soft measurement and application [J]. *Nonferrous Metals Engineering and Research*, 2003, 24(S): 129-134)
- [8] Chai T Y, Guan S P. Object-oriented integrated control technology of complex industrial processes [A]. *The Plenary Lecture of Proc of IFAC 5th Symposium on Low Cost Automation* [C]. Shenyang, 1998