第20卷 第5期 控 制 与 决 策 2005年5月
Vol 20 No. 5 Control and Decision May 2005

文章编号: 1001-0920(2005)05-0541-04

线性切换系统经周期切换渐近稳定性研究

高立群[1], 景 丽[1,2]
(1. 东北大学 教育部暨辽宁省流程综合自动化实验室, 辽宁 沈阳 110004;
2. 沈阳师范大学 数学与系统科学学院, 辽宁 沈阳 110034)

摘 要: 研究一类含有两个子系统的线性切换系统经周期切换渐近稳定问题. 首先给出了特殊周期切换, 即等时切换下线性切换系统渐近稳定的充要条件; 然后将所得结论进行了推广, 使之适合于一般的周期切换情形, 并结合自适应思想提出了实现系统周期切换的方法, 使之能应用于工程实际. 特别指出, 一个系统可经切换达到二次稳定的充要条件是该系统可经周期切换渐近稳定. 对于一类线性切换系统, 采用周期切换可使切换信号的设计变得相对简单. 仿真结果表明了所提出的方法简洁而有效.

关键词: 线性切换系统; 周期切换; 等时切换; 渐近稳定
中图分类号: TP202 **文献标识码**: A

Asymptotical stabilization of switched linear systems via periodic switching sequences

GAO Li-qun[1], *JING Li*[1,2]
(1. Key Laboratory of Process Industry Automation, Ministry of Education China, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. School of Mathematics and System Science, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China. Correspondent: GAO Li-qun, E-mail: pdp@china.com.cn)

Abstract: The asymptotical stabilization of switched linear systems with two subsystems via periodic switching sequences is discussed. A necessary and sufficient condition is derived for switched linear systems to be asymptotically stable. Moreover, a concrete method is proposed to design a periodic switching sequence. Especially it is pointed out that a system is quadratically stable under a switching sequence if and only if the system is asymptotically stable under a periodic switching sequence. The proposed theorems are convenient for judging whether a switched system is stable or not under a periodic switching sequence. Simulations show that the presented method is simple and effective.

Key words: switched linear systems; periodic switching sequences; equal-time-interval switching sequences; asymptotical stabilization

1 引 言

混杂系统是一类复杂系统, 广泛存在于交通运输、航空调度、工程技术等领域. 混杂系统既包含连续动态又包含离散动态, 难以用传统的连续系统理论或离散系统理论处理, 从而受到了国内外许多学者的关注. 切换系统作为一类重要的混杂系统受到了人们的高度重视, 对其进行了广泛的研究, 获得了许多结果. 从切换策略角度看, 人们较早地研究了任意切换, 给出了任意切换下线性切换系统渐近稳定的充分条件[1], 即要求存在共同的正定矩阵 P, 使 $A_i^{\mathrm{T}}P + PA_i < 0$, $i = 1, 2, \cdots, N$. 然而实际中很少有符合这种条件的系统存在. 文献[2]研究了周期性切换, 给出了切换系统在周期性切换下渐近稳定的充要条件. 依据该充要条件, 渐近稳定性判定需计算诸子系统过渡矩阵, 这是一件十分繁重的工作. 线性切换系统切换策略的构造还有许多方法, 较有代表

收稿日期: 2004-05-09; **修回日期**: 2004-09-09.
作者简介: 高立群(1949—), 男, 辽宁沈阳人, 教授, 博士生导师, 从事模式识别与智能系统的研究; 景丽(1967—), 女, 辽宁沈阳人, 副教授, 博士生, 从事智能控制的研究.

性的方法是LMI方法 文献[3～5]使用LMI方法给出了渐近稳定切换信号设计, 但其中多数结果要求满足完备性条件 若不满足完备性条件, 则切换信号设计相对复杂[6]. 文献[7]基于向量范数理论给出了线性开关系统渐近稳定的充分条件, 但其定理中的 T 和 r 不易找到 文献[8]研究了准周期切换系统, 给出了系统稳定和鲁棒稳定的充分条件

本文着重考虑线性切换系统研究中的一个关键问题, 即切换信号设计问题 该问题至今尚未得到很好解决, 没有发现行之有效的统一处理方法 为此, 本文研究了线性切换系统的等时切换及周期切换问题 首先给出线性切换系统经等时切换渐近稳定的充要条件; 然后推广了该结论, 使之适合于一般的周期切换情形; 接着提出了实现周期切换的具体方法, 使周期切换能真正适用于实际工程; 最后特别指出, 一个系统可经切换二次稳定的充要条件是该系统可经周期切换渐近稳定 文中所研究的对象为一般线性切换系统, 所给定理条件容易判定, 与文献[2]中的充要条件相比计算量小 本文中的定理和方法适于工程应用

2 问题描述

研究如下系统经等时切换和周期切换的渐近稳定问题:

$$\dot{x} = A_i x,\quad i = 1, 2 \tag{1}$$

所使用的序列为

$$S = \{(\tau, A_1), (\tau, A_2), (\tau, A_1), (\tau, A_2), \cdots\}, \tag{2}$$

$$S_N = \{(\delta t_1, A_1), (\delta t_2, A_2), (\delta t_1, A_1), (\delta t_2, A_2), \cdots\}. \tag{3}$$

其中: τ, $\delta t_i\ (i = 1, 2)$ 为时间间隔; 切换周期 $T = \sum_{i=1}^{2} \delta t_i$; $\{A_{i1}, A_{i2}\}$ 遍取集合 $\{A_1, A_2\}$; $\{\delta t_j, A_{ij}\}$ 表示在 δt_j 时间内, 系统(1) 沿 $\dot{x} = A_{ij}x$ 子系统运行, 切换序列与系统(1) 共同决定系统的运行状态

3 主要结果

3.1 渐近稳定性定理

引理 1[9] 设 $A \in C^{n\times n}$, 对任意 $\epsilon > 0$ 存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & \lambda_2 & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

且 $\sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}| < \epsilon$

引理 2[10] (凸组合命题) 存在切换序列使系统(1) 为二次稳定的充要条件是存在 $\alpha_i \in (0, 1)\ (i = 1, 2)$, 且满足 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, 使得 $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ 是稳定矩阵

定理 1 线性切换系统(1) 经序列(2) 等时切换后渐近稳定于原点的充要条件是系统 $\dot{x} = (A_1 + A_2)x$ 渐近稳定于原点

证明 设在整个证明过程中 $\|\cdot\|$ 表示范数 $\|\cdot\|_\infty$, 另设系统(1) 和系统 $\dot{x} = (A_1 + A_2)x$ 有相同的初始值 x_0, 则当系统(1) 按等时切换序列(2) 运行时, 其状态为 $x(t) = \cdots e^{A_2\tau}e^{A_1\tau}e^{A_2\tau}e^{A_1\tau}x_0$.

1) 充分性: 要证明系统(1) 经序列(2) 等时切换后渐近稳定, 只需证明

$$\|(e^{A_2\tau}e^{A_1\tau})^n x_0\| \to 0,\quad n \to \infty. \tag{4}$$

因为

$$e^{(A_1+A_2)\tau} = I + (A_1 + A_2)\tau + \frac{1}{2}(A_1 + A_2)^2\tau^2 + (\bullet)\tau^3, \tag{5}$$

$$e^{A_2\tau}e^{A_1\tau} = I + (A_1 + A_2)\tau + \frac{1}{2}[A_1^2 + 2A_2A_1 + A_2^2]\tau^2 + (\bullet)\tau^3. \tag{6}$$

所以 $e^{A_2\tau}e^{A_1\tau} = e^{(A_1+A_2)\tau} + \frac{1}{2}[A_2A_1 - A_1A_2]\tau^2 + (\bullet)\tau^3$. 令

$$e^{(A_1+A_2)\tau} = A,$$

$$\frac{1}{2}[A_2A_1 - A_1A_2] + (\bullet)\tau = B(\tau),$$

则 $e^{A_2\tau}e^{A_1\tau} = A + B(\tau)\tau^2$, 从而可知

$$\begin{aligned} &\|(e^{A_2\tau}e^{A_1\tau})^n\| = \\ &\|(e^{(A_1+A_2)\tau} + B(\tau)\tau^2)^n\| \le \\ &(\|e^{(A_1+A_2)\tau} + B(\tau)\tau^2\|)^n \le \\ &(\|e^{(A_1+A_2)\tau}\| + \|B(\tau)\tau^2\|)^n. \end{aligned}$$

因为 $B(\tau)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 所以 $B(\tau)$ 中各元素有界, 进而存在 $b_0 > 0$ 使得 $\|b_0 I\| > \|B(\tau)\|$ 成立 令 $\sigma = -\max\{\mathrm{Re}(\lambda_i(A_1 + A_2))\}$, 则根据充分性条件知 $\sigma > 0$, 再依据 $\|\cdot\|_\infty$ 的定义和引理 1 可知, 存在可逆矩阵 P 使

$$\begin{aligned} &\|e^{(A_1+A_2)\tau}\| = \|Pe^{J\tau}P^{-1}\| \le \\ &\|Pe^{-\frac{1}{2}\sigma\tau}P^{-1}\| = \|e^{-\frac{1}{2}\sigma\tau}PP^{-1}\| = \|e^{-\frac{1}{2}\sigma\tau}\| \end{aligned}$$

成立, 其中

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & \lambda_2 & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

且 $\sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}| < \epsilon$ 于是可知

$$\begin{aligned} &\|(e^{A_2\tau}e^{A_1\tau})^n\| < \\ &(\|e^{-\frac{1}{2}\sigma\tau}\| + \|b_0 I\tau^2\|)^n = \\ &((e^{-\frac{1}{2}\sigma\tau} + b_0\tau^2)^k)^{n/k} \approx \end{aligned}$$

$$(e^{-\frac{1}{2}k\sigma\tau} + b_0 k\tau^2 e^{-\frac{1}{2}(k-1)\sigma\tau})^{n/k}.$$

又注意到以下两个结果成立:

当 $k > \ln 4/\sigma\tau$ 时, 有

$$e^{-\frac{1}{2}k\sigma\tau} < 1/2; \tag{7}$$

对 $\forall k$, 当 τ 满足 $\ln\frac{\sigma}{4b_0\tau} - \frac{1}{2}\sigma\tau > 0$ 时, 有

$$b_0 k\tau^2 e^{-\frac{1}{2}(k-1)\sigma\tau} < 1/2 \tag{8}$$

所以存在充分小的正数 ϵ_1, 当 τ 满足 $\ln\frac{\sigma}{4b_0\tau} - \sigma\tau > 0$, 而 $k > \ln(4/\sigma\tau)$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty} \| (e^{A_2\tau}e^{A_1\tau})^n \| \le \lim_{n\to\infty}(1-\epsilon_1)^{n/k} = 0,$$

即式(4) 成立

2) 必要性: 设 $x(0) = (d, d, \cdots, d)^T, d > 0$, 则 $\| x(0) \|_\infty = d$, 对于给定的切换周期 $T = 2\tau$, 应有 $\lim_{n\to\infty} x(nT) = 0$, 于是可知

$$\lim_{n\to\infty} \| e^{\frac{1}{2}A_2T}e^{\frac{1}{2}A_1T}\cdots e^{\frac{1}{2}A_2T}e^{\frac{1}{2}A_1T}x(0) \|_\infty =$$

$$\lim_{n\to\infty} \| e^{\frac{1}{2}A_2T}e^{\frac{1}{2}A_1T}\cdots e^{\frac{1}{2}A_2T}e^{\frac{1}{2}A_1T} \|_\infty d = 0,$$

从而 $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{2}A_2T}e^{\frac{1}{2}A_1T}\cdots e^{\frac{1}{2}A_2T}e^{\frac{1}{2}A_1T} = 0$. 记 $\bar{\bar{A}} = e^{\frac{1}{2}A_2T}e^{\frac{1}{2}A_1T}$, 则存在酉矩阵 G 使得

$$G^H\bar{\bar{A}}G = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ * & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

$$|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \cdots \ge |\lambda_n|.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{2}A_2T}e^{\frac{1}{2}A_1T}\cdots e^{\frac{1}{2}A_2T}e^{\frac{1}{2}A_1T} =$$

$$\lim_{n\to\infty} G\begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda_2^n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & \lambda_n^n \end{bmatrix}G^H = 0,$$

所以 $\|\bar{\bar{A}}\|_F < 1$, 进而知 $\sum_{i=1}^{N}|\lambda_i|^2 < 1$, 于是可得 $|\lambda_i|^2 < 1,\ i = 1, \cdots, n$. 进一步注意到

$$\bar{\bar{A}} = e^{\frac{1}{2}A_2T}e^{\frac{1}{2}A_1T} =$$

$$I + \frac{1}{2}(A_2 + A_1)T + o(T^2),$$

当 T 充分小时, 略去 $o(T^2)$ 项, 则

$$\det(\lambda I - \bar{\bar{A}}) =$$

$$\det\left((\lambda - 1)I - \frac{T}{2}(A_2 + A_1)\right),$$

$$\lambda_i\left(\frac{T}{2}(A_2 + A_1)\right) = \lambda_i(\bar{\bar{A}}) - 1,$$

所以

$$\mathrm{Re}\left(\lambda_i\left(\frac{T}{2}(A_1 + A_2)\right)\right) < 0,\quad i = 1, \cdots, n,$$

矩阵 $A_1 + A_2$ 渐近稳定 □

注 1　若系统(1) 中, A_1 和 A_2 满足可交换条件, 则定理 1 结论对任意 $\tau(\tau > 0)$ 都成立

定理 2　系统(1) 经周期切换(3) 切换后渐近稳定的充要条件是系统 $\dot{x} = (\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2)x$ 渐近稳定, 其中 α_i 是正整数且满足 $\delta t_i = \alpha_i\tau,\ i = 1, 2$, δt_i 为时间间隔

应用定理 1 可直接证明定理 2 成立

定理 3　系统(1) 可经切换二次稳定的充要条件是其可经周期切换序列(3) 切换后渐近稳定

应用定理 2 和引理 2 可直接证明定理 3 成立

3.2　周期切换的实现

使用上述定理, 可判定一个切换系统能否经周期切换渐近稳定 下面给出实现周期切换的具体方法 给定切换系统(1) 后, 首先确定它稳定的凸组合条件中的系数 $\alpha_i,\ i = 1, 2$; 然后对系统 $\dot{x} = \alpha_iA_ix\ (i = 1, 2)$ 采用自适应的方法进行等时切换, 其实现方法如图 1 所示 图中: x_0 的初值为所给系统的初始点; l, k 为自然数, 可适当选取

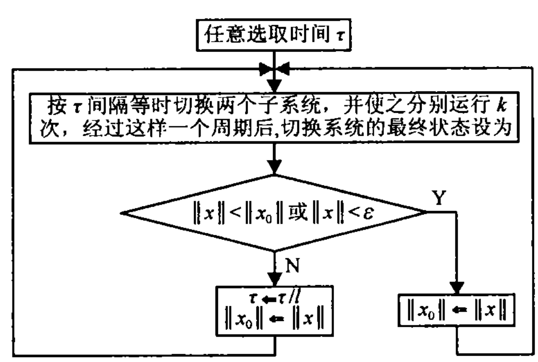

图 1　等时切换线性切换系统的方法

4　仿真例子

已知切换系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1x, \\ \dot{x} = A_2x. \end{cases}$$

其中: $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} -3/4 & -0.5 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$. 显

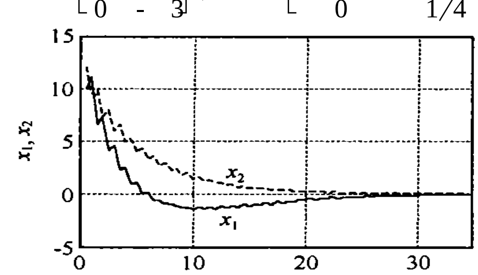

图 2　系统的状态响应曲线

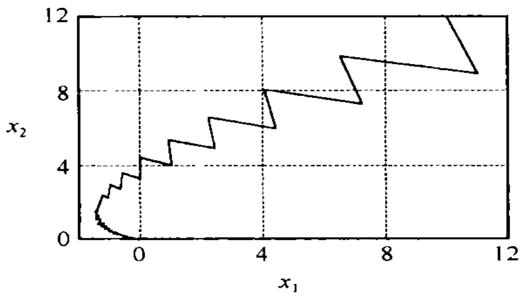

图 3 系统的状态轨迹

然两个子系统均不稳定, 但系统 $\dot{x} = (A_1 + 4A_2)x$ 渐近稳定 依据上述定理, 存在周期切换序列使切换系统渐近稳定 采取本文提出的自适应方法反馈镇定, 取等时切换的时间间隔 $\tau = 0.1$, $l = 2$, $k = 1$, 初始状态(10, 12). 仿真结果如图 2 和图 3 所示, 从图 2 和图 3 可看出, 切换系统渐近稳定, 而且两个子系统作周期切换

5 结 语

本文研究了线性切换系统经周期切换渐近稳定问题, 给出了线性切换系统经周期切换渐近稳定的充要条件, 以及周期切换的具体实现方法, 并指出一个系统可经切换二次稳定的充要条件是该系统可经周期切换渐近稳定 采用本文方法设计的切换信号简单, 可用于实际工程, 所得结论还可直接用于各类控制器的设计, 具有理论与应用价值

参考文献(References)

[1] Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems[J]. *IEEE Control System Magazine*, 1999, 19(5): 59-70.

[2] Ezzine J, Haddad A H. Controllability and observability of hybrid systems [J]. *Int J Control*, 1989, 49(6): 2045-2055.

[3] Pettersson S, lennartson B. LMI for stability and robustness of hybrid systems[A]. *Proc American Control Conf* [C]. Albuquerque, 1997: 1714-1718.

[4] Pettersson S, Lennartson B. Exponential stability analysis of nonlinear systems using LMIs[A]. *Proc 36th IEEE Conf Decision and Control* [C]. San Diego, 1997: 199-204.

[5] Pettersson S, Lennartson B. Exponential stability of hybrid systems using piecewise quadratic Lyapunov functions resulting in an LMI problem[A]. *Proc 14th IFAC World Congress*[C]. Beijing, 1999: 103-108.

[6] 刘玉忠, 张霄力, 赵军. 一类线性开关系统的渐近稳定性[J]. *控制与决策*, 2002, 17(1): 111-113.
(Liu Y Z, Zhang X L, Zhao J. Asymptotic stability of a class of linear switched systems[J]. *Control and Decision*, 2002, 17(1): 111-113.)

[7] 谢广明, 郑大钟. 线性切换系统基于范数的系统镇定条件及算法[J]. *自动化学报*, 2001, 27(1): 115-119.
(Xie G M, Zheng D Z. System stabilizationable condition and stabilization algorithm of linear switching systems based on vector norm theory[J]. *Acta Automat Sinica*, 2001, 27(1): 115-119.)

[8] Li Z G, Soh Y C, Wen C Y. Stability of uncertain quasi-periodic hybrid dynamic systems[J]. *Int J Control*, 2000, 73(1): 63-73.

[9] 罗家洪. *矩阵分析引论*[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 2002: 130-131.

[10] Decarlo R A, Branicky M S, Pettersson S, et al. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems[J]. *Porc of the IEEE*, 2000, 88(7): 1069-1082.

(上接第 528 页)

[6] Beldiman O V. Networked control systems[D]. Ann Arbor: Duke University, 2001.

[7] Lian F L. Analysis, design, modeling, and control of networked control systems[D]. Ann Arbor: Michigan University, 2001.

[8] Kim D-S, Lee Y S, Kwon W H, et al. Maximum allowable delay bounds of networked control systems [J]. *Control Engineering Practice*, 2003, 11: 1301-1313.

[9] 张桂香, 金耀, 叶振凯. 具有有界控制输入的状态反馈控制系统闭环稳定性[J]. *计算技术与自动化*, 2002, 21(2): 16-19.
(Zhang G X, Jin Y, Ye Z K. Closed-loop stability of state feedback control systems with bounded control input[J]. *Computing Technology and Automation*, 2002, 21(2): 16-19.)

[10] 俞立. *鲁棒控制 — 线性矩阵不等式处理方法*[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 8-164.