

文章编号: 1001-0920(2005)05-0545-04

Lagrange 神经网络的稳定性分析

黄远灿

(北京理工大学 信息科学技术学院 北京 100081)

摘要: 若重新定义与不等式约束相关的乘子为正定函数, 则在构造Lagrange神经网络时, 可直接使用处理等式约束的方法处理不等式约束, 不需再用松弛变量将不等式约束转换为等式约束, 减小了网络实现的复杂程度。利用Liapunov一阶近似原理, 严格分析了这类Lagrange神经网络的局部稳定性; 并采用LaSalle不变集原理, 讨论其大范围稳定性。

关键词: 非线性规划; Lagrange神经网络; 不等式约束; 稳定性; LaSalle不变集原理
中图分类号: TP183 **文献标识码:** A

Stability analysis of Lagrange neural networks

HUANG Yuan-can

(Information Science and Technology School, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China E-mail: yuancanhuang@bit.edu.cn)

Abstract: By redefining multiplier associated with inequality constraint as a positive definite function of the originally-defined multiplier, it is no longer necessary to convert inequality constraints into equality constraints by slack variables in order to reuse the method dedicated to equality constraints for constructing Lagrange neural networks. The local stability of the Lagrange neural networks is proved rigorously with the first Liapunov approximation principle. The stability in the large is discussed based on the LaSalle invariance principle.

Key words: nonlinear programming; Lagrange neural network; inequality constraint; stability; LaSalle invariance principle

1 引言

Hopfield 于 1982 年提出了一种以其名字命名的递推神经网络^[1], 并于 1984 年给出了由神经元构成连续递归神经网络的基本原理^[2]。1985 年, 文献[3]成功地应用Hopfield网络求解了组合优化中著名的NP难题——旅行商问题(TSP)。1986年, 文献[4]构造了一些简单的神经优化网络, 可用于实现A/D转换器、信号决策电路以及求解线性规划问题。上述这些工作开创了应用神经网络求解优化问题的先河。1988年, Kennedy等^[5]应用罚函数原理, 设计了能求解线性和非线性规划的神经网络, 但所提出的神经网络主要用于解决带不等式约束的优化问题, 如将其直接应用于等式约束, 则其实现电路有两个反向耦合的二极管, 不能正常工作。另外, 罚函数法一般通过求解一系列罚参数逐渐增大的无约束

优化问题来逼近约束优化问题的解, 或使用试凑法确定罚参数和初始点, 这在实际中显然不可行, 而且罚函数法还存在病态问题。为了克服这些缺点, Zhang等^[6]于1992年根据Lagrange乘子思想, 构建了Lagrange神经网络。然而, 该神经网络在处理不等式约束时需添加松弛变量将其转换为等式约束, 这意味着神经网络有较高的维数。当然, 如果使用Lagrange乘子法求解带不等式约束的非线性规划问题, 经简单的推导, 可将松弛变量消掉。但此时增广Lagrange函数仅分段二阶连续可微。

本文通过重新定义Lagrange乘子, 获得一种新型的Lagrange神经网络。其优点在于, 能直接对不等式约束进行处理, 不需添加松弛变量将不等式约束转换为等式约束, 且增广Lagrange函数与目标函数和约束具有相同的光滑性^[7,8]。文献[9]应用该方

收稿日期: 2004-09-14; 修回日期: 2004-11-02

作者简介: 黄远灿(1969—), 男, 贵州盘县人, 副教授, 博士, 从事非线性控制、神经网络、最优化理论等研究。

法构造了凸规划神经网络 然而,上述工作对网络的稳定性分析不够严格和深入

本文利用L iapunov 一阶近似原理严格地分析了网络的局部稳定性,并使用L aSalle 不变集原理,揭示了网络的稳定机理,探讨了如何减弱收敛条件和扩大收敛域

2 Lagrange 神经网络及其工作机理

考虑如下只有不等式约束的非线性规划问题:

$$\min f(x), \text{ subject to } g_i(x) \leq 0 \quad (1)$$

式中: $f(x): R^n \rightarrow R$ 和 $g_i(x): R^n \rightarrow R^m$ 分别是二阶连续可微的标量和向量函数 令 x^* 满足约束条件, 则 $I(x^*)$ 表示对应 $g_i(x^*) = 0$ 的 i 的指标集, 即

$$I(x^*) = \{i | g_i(x^*) = 0, i = 1, 2, \dots, m\}$$

如果梯度 $\nabla g_i(x^*), i \in I(x^*)$ 线性无关, 则称 x^* 为正则点

若L agrange 函数定义为

$$L(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i^2 g_i(x), \quad (2)$$

则 Karush-Kuhn-Tucker 定理给出了问题最优解存在的必要条件^[10-13]:

定理1(Karush-Kuhn-Tucker 定理) 设 x^* 是问题(1)的局部最优解和正则点, 则存在唯一的向量 u^* , 使得

$$\nabla_x L(x^*, u^*) = 0; \quad (3)$$

$$u_i^* g_i(x^*) = 0, i = 1, 2, \dots, m, g_i(x^*) \leq 0 \quad (4)$$

下面, 介绍一些基本概念:

若 $g_i(x^*) = 0$, 则称 $g_i(x)$ 为起作用的约束; 反之, 称其为不起作用的约束 (x^*, u^*) 称为问题(1)的KKT对

定义增广L agrange 函数为

$$L_c(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i^2 g_i(x) + \frac{c}{2} \sum_{i=1}^m u_i^2 g_i^2(x), \quad (5)$$

其中 c 为正的罚参数

设计L agrange 神经网络的目标是构造一个渐近收敛于问题(1)的KKT对的连续时间动态系统 该系统定义如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\nabla_x L_c(x, u), \\ \dot{u}_i &= 2u_i g_i(x), i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (6)$$

根据式(6), 可获得乘子 u_i 的解析表达式为

$$u_i(t) = u_i(0) e^{\int_0^t 2g_i(x) dt}, i = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

其中初始乘子 $u_i(0) \geq 0$

式(7)表明, 如果 x 位于问题可行域之外, 即至少存在某个 i , 使得 $g_i(x) > 0$, 那么对应的乘子将按指数增加 因此, 在增广L agrange 函数中, 含该乘子的惩罚项将随着增大, 迫使轨迹 $x(t)$ 向使增广L agrange 函数减小的方向移动, 即趋向可行域 如

果 x 在可行域内, 则乘子保持不变或按指数衰减到零 因此, 如果系统渐近稳定, 则轨迹 $x(t)$ 的极限点最终将位于可行域内; 同时对应于不起作用的约束的乘子将趋于零, 对应于起作用的约束的乘子趋于某个常数

由式(6)和上述分析, 显然有下列结论:

命题1 系统(6)的渐近稳定平衡点 (x^*, u^*) 是问题(1)的KKT对

3 Lagrange 神经网络的稳定性分析

假设1 令 x^* 是问题的正则点, 并存在向量 u^* , 满足

$$\nabla_x L(x^*, u^*) = 0, \quad (8)$$

$$u_i^* g_i(x^*) = 0, i = 1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

其中: $g_i(x^*) \leq 0, u_i^* \geq 0$ 且对于任何使得 $\nabla g_i(x^*)^T y = 0, i \in I(x^*)$ 的非零向量, 有

$$y^T \left[\nabla^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^m (u_i^*)^2 \nabla^2 g_i(x^*) \right] y > 0$$

另外, 严格互补假设成立, 即

$$u_i^* > 0, \forall i \in I(x^*). \quad (10)$$

二阶充分条件^[10-14] 如果假设1满足, 则 x^* 是问题(1)的严格局部极小点

为证明稳定性定理, 先介绍一个引理^[10,11]:

引理1 令 P 是 $n \times n$ 对称阵, Q 是 $n \times n$ 半正定对称阵 设对任何满足 $Qx = 0$ 的非零向量 x , 有 $x^T P x > 0$, 那么存在标量 $c > 0$, 使 $P + cQ > 0$

通过直接计算, 增广L agrange 函数对 x 的梯度和Hess阵分别为

$$\begin{aligned} \nabla_x L_c(x, u) &= \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m u_i^2 \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^m u_i^2 g_i(x) \nabla g_i(x) \\ \nabla_x L(x, u) + c \sum_{i=1}^m u_i^2 g_i(x) \nabla g_i(x), \\ \nabla_{xx}^2 L_c(x, u) &= \nabla_{xx}^2 L(x, u) + c \sum_{i=1}^m u_i^2 g_i(x) \nabla^2 g_i(x) + \sum_{i=1}^m u_i^2 \nabla g_i(x) \nabla g_i(x)^T. \end{aligned}$$

若假设1成立, 则对任意 c , 有

$$\nabla_x L_c(x^*, u^*) = 0 \quad (11)$$

根据引理1, 存在 $\bar{c} > 0$, 使得

$$\begin{aligned} \nabla_{xx}^2 L_{\bar{c}}(x^*, u^*) &= \nabla_{xx}^2 L(x^*, u^*) + \bar{c} \sum_{i=1}^m (u_i^*)^2 \nabla g_i(x^*) \nabla g_i(x^*)^T > 0 \end{aligned} \quad (12)$$

式(11)和(12)说明,对所有 $c \in \bar{c}, x^*$ 是 $L_c(\bullet, u^*)$ 的严格局部极小点

命题 2 如果假设 1 满足,且 $c \in \bar{c}$,则系统(6)是局部渐近指数稳定的

证明 首先将系统在平衡点 (x^*, u^*) 处线性化.根据一阶近似原理,系统在平衡点附近的性质完全由线性化系统决定.为研究方便,设前 s 个不等式约束是起作用的,相应的乘子向量表示为 u_s ;后 $m - s$ 个约束不起作用,相应的乘子向量用 u_t 表示.考虑到 KKT 条件,推出线性化系统为

$$\begin{bmatrix} x \\ u_s \\ u_t \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x - x^* \\ u_s - u_s^* \\ u_t - u_t^* \end{bmatrix}, \quad (13)$$

其中

$$H = \begin{bmatrix} -\nabla_{xx}^2 L_c(x^*, u^*) & -\nabla g_s(x^*) \Gamma(2u_s^*) & 0 \\ \Gamma(2u_s^*) \nabla g_s(x^*)^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma(2g_t(x^*)) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

这里 $\Gamma(\bullet)$ 表示由向量形成的对角化矩阵

下面将表明矩阵 H 的所有特征值的实部为负. v^H 表示复向量的共轭转置, $\mathbf{R}(\alpha)$ 表示复数的实部.令 β 是 H 的特征值, $P = (z^T, w^T, y^T)$ 是非零特征向量,则

$$\mathbf{R}(P^H H P) = \mathbf{R}(\beta) (|z|^2 + |w|^2 + |y|^2). \quad (15)$$

将上式左边展开,有

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(P^H H P) = & \mathbf{R}\{-z^H \nabla_{xx}^2 L_c(x^*, u^*) z + \\ & y^H \Gamma(2g_t(x^*)) y - z^H \nabla g_s(x^*) \Gamma(2u_s^*) w + \\ & w^H \Gamma(2u_s^*) \nabla g_s(x^*)^T z\}. \end{aligned} \quad (16)$$

由于

$$\begin{aligned} \mathbf{R}[z^H \nabla g_s(x^*) \Gamma(2u_s^*) w] = \\ \mathbf{R}[w^H \Gamma(2u_s^*) \nabla g_s(x^*)^T z], \end{aligned}$$

根据式(15)和(16),有

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\beta) (|z|^2 + |w|^2 + |y|^2) = \\ \mathbf{R}\{-z^H \nabla_{xx}^2 L_c(x^*, u^*) z + \\ y^H \Gamma(2g_t(x^*)) y\} \leq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

因此可以推出,或 $\mathbf{R}(\beta) < 0$, 或 $z = 0, y = 0$. 然而,如果 $z = 0, y = 0$, 那么,由方程

$$H \begin{bmatrix} z \\ w \\ y \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} z \\ w \\ y \end{bmatrix} \quad (18)$$

得出

$$-\nabla g_s \Gamma(2u_s^*) w = 0 \quad (19)$$

由于 $\nabla g_s(x^*)$ 是列满秩的,且 $u_s^* \neq 0$, 根据上式可得 $w = 0$, 与 P 为非零向量的假设矛盾,所以 $\mathbf{R}(\beta) < 0$. 这意味着,系统(6)是局部渐近指数稳定的.

上述稳定性结论是局部的.从实现的角度看,希望所构造的 Lagrange 神经网络全局稳定或大范围稳定.下面根据 LaSalle 不变集原理^[15-17],进一步讨论 Lagrange 神经网络的稳定性.

考虑如下自治系统:

$$\dot{x} = f(x), f \in D \subset R^n. \quad (20)$$

式中: D 是 R^n 中相连的开子集, f 局部 Lipschitz 连续.

定义 1 集合 M 称为不变集,如果

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \forall t \in R^+. \quad (21)$$

换言之, M 是由这样的点组成的集合,若系统(20)的初始点 $x(0)$ 属于 M , 则其解 $x(t)$ 在将来的任何时刻都在 M 内.

LaSalle 不变集原理 令 $V \in D \subset R$ 是连续可微函数,设: 1) $M \subset R$ 是不变紧集; 2) 在 M 中, $\dot{V} \leq 0$;

3) $E = \{x \in M \mid \dot{V} = 0\}$; 4) N 是 E 中的最大不变子集. 那么,当 $t \rightarrow \infty$ 时,任何始于 M 中的解都趋于 N .

将增广 Lagrange 函数选为 LaSalle 不变集原理中的 V 函数,为保证系统稳定,应满足下列两个条件:

条件 1 系统(20)的解包含在一个有界集 M 内;

条件 2 在 M 内, $L_c \leq 0$.

条件 1 比较容易满足,可将系统(20)的解限制在一个有界集内.这个限制并不严,因为一般情况下,仅对问题的有界解感兴趣;其次,在很多场合,这个条件自然满足,即系统(20)的解轨迹位于某个有界集内.

下面讨论条件 2. 将增广 Lagrange 函数对时间求导,得

$$\begin{aligned} \dot{L}_c = & (\partial L_c / \partial x)^T \dot{x} + (\partial L_c / \partial u)^T \dot{u} = \\ & - \left\| \frac{\partial L_c}{\partial u} \right\|^2 + 2 \sum_{i=1}^m u_i^2 g_i^2(x) [2 + c g_i(x)] \end{aligned} \quad (22)$$

式中: 第 1 项总为负,是系统的稳定因素;第 2 项和其中各项的作用分为 3 种情况:

1) 若 $g_i(x) > 0$, 则和式中相应的项为正,是系统的不稳定因素.它的作用是使惩罚作用增大,迫使 x 向可行域移动.

2) 如果 $g_i(x) = 0$, 则和式中相应的项为零,不影响稳定性.

3) 如果 $g_i(x) < 0$, 这时又可分为两种情形: $g_i(x)$ 为较大的负数, 则选择合适的参数 c 使相应的项为负, 为系统的稳定因素; $g_i(x)$ 为非常小的负数, 则相应的项变为正, 为系统的不稳定因素, 然而, 此时该项的值非常小, 对稳定性的影响不大

必须注意, 将系统(20)的解限制在有界集内, 在边界上可能有 $\dot{x} = -\nabla \mathcal{L}_c(x, u)$, 导致式(22)中第1项不为负, 影响系统的稳定性

综上所述, 系统的稳定是多种因素综合作用的结果. 如果将系统(20)的解限制在某一有界集内, 且保证在该有界集内增广Lagrange函数对时间的导数小于或等于零, 或在某时刻后这个条件成立, 则系统收敛. 一般而言, 当 x 在问题的可行域内时, 较大的 c 有助于增加系统的稳定性, 但较大的 c 同时也增强了系统的不稳定因素, 可能导致系统不稳定. 所以, 必须适当地选择罚参数 c . 另外, 在使用LaSalle不变集原理论证稳定性时, 不要求系统满足二阶充分性条件和严格互补性. 因此, 文中结论可推广到退化情形以及正则性和/或严格互补性条件不满足的情形.

命题3 若LaSalle定理中的条件满足, 且 $\dot{x}(t)$ 总等于增广Lagrange函数的负梯度方向, 即 $\dot{x} = -\nabla \mathcal{L}_c(x, u)$, 则系统的解收敛于问题(1)的KKT对.

证明 首先说明 $x(t)$ 的极限点 x^* 在可行域内. 如果 x^* 不在可行域内, 则至少存在某个 i , 使得 $g_i(x^*) > 0$. 那么, 由 $g_i(x)$ 的连续性, 相应的乘子将趋于无穷大, 与乘子有界假设矛盾. 其次, 由于式(22)中两个组成项均为非正, 若增广Lagrange函数对时间导数为零, 则可推出 $\partial_c \mathcal{L}_c(x^*, u^*) / \partial \alpha = 0$ 和 $u_i g_i(x^*) = 0$. 这说明, (x^*, u^*) 是问题(1)的KKT对.

4 结论

通过重新定义Lagrange乘子, 可获得一种新型的非线性规划神经网络. 其优点在于可直接处理不等式约束. 所构造的增广Lagrange函数具有与目标函数和约束相同的光滑性, 且可用于求解退化以及正则性和/或严格互补性条件不满足的非线性规划问题. 本文首先利用Ljapunov一阶近似原理说明了只要非线性规划问题满足二阶充分条件, Lagrange神经网络就是局部渐近指数稳定性的; 然后使用LaSalle不变集原理, 分析了Lagrange神经网络的工作机理. 从分析中可以看出, Lagrange神经网络通过稳定因素与不稳定因素的共同作用, 获得问题(1)的最优解, 两种因素对于求取最优解都是不可或

缺的; 然而, 为使系统收敛, 必须保证稳定因素最终占优. 在设计Lagrange神经网络时, 应考虑如何满足这个要求, 如使用其他类型的罚函数构造新的增广Lagrange函数, 或当轨迹 $x(t)$ 位于不同区域时采用不同的罚参数等.

参考文献(References)

- [1] Hopfield J J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities [J]. *Proc of the National Academy of Sciences*, 1982, 79(4): 2554-2558
- [2] Hopfield J J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons [J]. *Proc of the National Academy of Sciences*, 1984, 81(5): 3088-3092
- [3] Hopfield J J, Tank D W. Neural computation of decision in optimization problems [J]. *Biology Cybernetics*, 1985, 52(1): 141-152
- [4] Tank D W, Hopfield J J. Simple 'neural' optimization network: An A/D converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems*, 1986, CAS-33(5): 533-541
- [5] Kennedy M P, Chuo L O. Neural networks for nonlinear programming [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems*, 1988, CAS-35(5): 554-562
- [6] Zhang S, Constantinides A G. Lagrange programming neural networks [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems*, 1988, CAS-35(7): 554-562
- [7] 黄远灿, 孙圣和, 韩京清. 基于Lagrange乘子法的非线性规划神经网络[J]. *电子学报*, 1998, 26(1): 24-28 (Huang Y C, Sun S H, Han J Q. Neural networks based on Lagrange multiplier method for nonlinear programming problems [J]. *Acta Electronica Sinica*, 1998, 26(1): 24-28)
- [8] 黄远灿. 一种新型的Lagrangian神经网络[J]. *电子学报*, 2002, 30(1): 25-29 (Huang Y C. A new type of Lagrange nonlinear programming neural network [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2002, 30(1): 25-29)
- [9] Huang Y C. A novel method to handel inequality constraints for convex programming neural network [J]. *Neural Processing Letters*, 2002, 16(1): 17-27
- [10] Bertsekas D P. *Constrained Optimization and Lagrange Methods* [M]. New York: Academic Press, 1982
- [11] Nocedal J, Wright S J. *Numerical Optimization* [M]. New York: Springer-Verlag, 1999
- [12] Avriel M. *Nonlinear programming analysis and methods* [M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1976

(下转第552页)

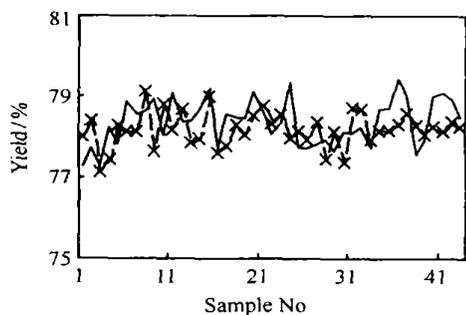


图3 BPNN-PLS软测量模型预测值与分析值曲线
常规神经网络方法,建立了BPNN软测量模型,该模型为3层,隐含层节点数为16。表1为采用SVM-PLS、BPNN-PLS和BPNN方法建立的软测量模型的训练与测试结果。采用预测均方根误差作为比较标准(RMSE),RMSE的定义为

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (\hat{y}_i - y_i)^2} \quad (7)$$

其中: \hat{y}_i 为软测量模型预测输出值, y_i 为丙烯腈收率人工分析值, l 为数据长度

表1 不同软测量模型的RMSE

	SVM-PLS	BPNN-PLS	BPNN
Train	4.16e-3	4.74e-3	6.23e-3
Test	5.12e-3	6.17e-3	7.72e-3

为了对采用3种方法所建立的软测量模型的精度进行定量比较,引入一新的指标(打靶率),定义为

$$HR = \frac{r}{l} \times 100\% \quad (8)$$

其中: r 为丙烯腈收率软测量模型预测输出值误差小于某一数值(本文为0.7%)的数据个数, l 为数据长度。表2所示为不同软测量模型的打靶率

表2 不同软测量模型的打靶率

	SVM-PLS	BPNN-PLS	BPNN
Train	89	80	75
Test	84	74	69

从表1和表2可以看出,虽然3种模型基本上都能满足工业应用要求,但SVM-PLS模型在推广能力及模型精度上最好,BPNN-PLS次之,BPNN模型

性能最差。这可解释为两类非线性PLS方法集成了PLS方法及SVR或BPNN的非线性处理强的特点,而SVR能有效地克服神经网络方法中出现的过拟合现象和局部最小点。因此,混合SVM-PLS方法在复杂工业过程建模中能得到很好的性能

4 结论

本文提出了SVR-PLS软测量建模方法,该方法兼具了SVR和PLS的优点。SVR在处理复杂非线性数据关系上比神经网络等具有更多的优良性能,因此SVR-PLS模型的性能较BPNN-PLS的性能好。针对工业丙烯腈装置丙烯腈收率软测量建模的对比研究也证明了这一点。作为新的机器学习方法,SVR在理论和应用上都体现出优良的性能,将它与其他方法(如模糊技术、粗糙集技术和各种化学计量法等)结合进行复杂工业过程的建模研究是值得重视的研究方向

参考文献(References)

- [1] Willis M J, Montague G A, Massimo D C, et al. Artificial neural networks in process estimation and control[J]. *Automatica*, 1992, 28(6): 1181-1187.
- [2] Vapnik V N. *The nature of statistical learning theory* [M]. New York: Springer-Verlag, 1999.
- [3] David V, Sánchez A. Advanced support vector machines and kernel methods [J]. *Neurocomputing*, 2003, 55(1-2): 5-20.
- [4] Müller K-R, Mika S, Ratsch G, et al. An introduction to kernel-based learning algorithms[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2001, 12(2): 181-202.
- [5] Qin S J, McAvoy T J. Nonlinear PLS modeling using neural networks [J]. *Computers and Chemical Engineering*, 1992, 16(4): 379-391.
- [6] Suykens J K A, Gestel T V, Brabanter J D, et al. *Least squares support vector machines* [M]. Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2002: 98-99.
- [7] Galadi P, Kowalski B R. Partial least-squares regression: A tutorial [J]. *Analytica Chimica Acta*, 1986, 185(1): 1-17.

(上接第548页)

- [13] Rockafellar R T. Lagrange multiplier and optimality [J]. *SIAM Review*, 1993, 35: 183-238.
- [14] Bertsekas D P. *Nonlinear programming* [M]. 2nd ed. Belmont: Athena Scientific, 1999.
- [15] Lakshmikantham V, Matrosov V M, Sivasundaram S. *Vector Lyapunov functions and stability analysis of*

nonlinear systems [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1991.

- [16] LaSalle J P. *The stability of dynamical systems* [M]. New York: Springer, 1976.
- [17] Marquez H J. *Nonlinear control system analysis and design* [M]. New Jersey: John Wiley & Sons, 2003.