

文章编号: 1001-0920(2005)05-0505-06

具有持续扰动的时滞系统前馈-反馈最优控制

唐功友, 刘鹏, 谢楠

(中国海洋大学 信息科学与工程学院, 山东 青岛 266071)

摘要: 针对外部持续扰动下的线性时滞系统, 提出一种前馈-反馈最优控制的逐次逼近算法。利用逐次逼近算法, 将既含有时滞项又含有超前项的两点边值问题转化为不含时滞项和超前项的线性两点边值问题族, 并证明了线性两点边值问题族的解序列一致收敛于原系统最优控制律。得到的最优控制律由解析的无时滞前馈-反馈控制部分和伴随向量序列极限形式的时滞补偿控制部分组成。通过截取时滞补偿序列的有限项, 得到系统的前馈-反馈次优控制律。仿真示例表明, 该方法对外部持续扰动具有良好的鲁棒性。

关键词: 时滞系统; 逐次逼近法; 最优控制; 前馈-反馈控制; 持续扰动

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Feedforward and feedback optimal control for time-delay systems with persistent disturbances

TANG Gong-you, LIU Peng, XIE Nan

(College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266071, China
Correspondent: TANG Gong-you, E-mail: gtang@ouc.edu.cn)

Abstract: A successive approximation algorithm of feedforward and feedback optimal control for linear systems with state time-delay affected by persistent disturbances is presented. The linear two-point boundary value (TPBV) problem with both time-delay terms and time-advance terms is transformed into a sequence of nonhomogeneous linear TPBV problems without time-delay terms and time-advance terms. The sequence of the solutions uniformly converges to the optimal control law for the systems. The optimal control law obtained is composed of feedforward and feedback optimal terms without time-delay in analytic forms and a compensation term with time-delay in a sequence limit form of adjoint vectors. By taking the finite-times iteration of the compensation sequence, a suboptimal control law is obtained. Simulations show that the algorithm is robust with respect to external persistent disturbances.

Key words: time-delay systems; successive approximation approach; optimal control; feedforward and feedback control; persistent disturbances

1 引言

外部持续扰动下的时滞系统的最优控制问题是控制理论与控制工程领域的难点和热点研究课题之一。对于二次型性能指标的时滞系统的最优控制问题, 往往需要求解一组既含有超前项又含有时滞项的两点边值问题。对于这类问题, 无论求其精确解还是数值解都是非常困难的^[1, 2]。为了回避时滞系统

最优控制的复杂性, 近年来人们提出了保性能控制^[3]和 H 控制^[4]等研究成果。这些研究方法的优点是可以解决不确定性扰动系统的鲁棒控制问题。虽然这些方法在某种意义上也涉及到最优控制的思想, 但即使是确定性扰动系统, 得到的结果也不可能是最优的。对于不含有外部扰动的时滞系统的最优控制已涌现出许多研究成果, 其中包括灵敏度法^[5]

收稿日期: 2004-07-16; 修回日期: 2004-10-12

基金项目: 国家自然科学基金项目(60074001); 山东省自然科学基金项目(Y2000G02)。

作者简介: 唐功友(1953—), 男, 山东烟台人, 教授, 博士生导师, 从事控制理论与应用、计算机控制等研究; 刘鹏(1977—), 男, 山东威海人, 博士生, 从事控制理论与应用、计算机控制等研究。

和无滞后转换法^[2]等。近年来,对于含有外部扰动的线性系统最优控制问题的研究已引起人们的关注^[6,7],但对于含有外部扰动的时滞系统最优控制的研究尚未见报道。

在自然界中,控制系统几乎总是受到各种外部干扰的影响。许多系统的主要外部扰动是已知或近似已知其动态特性,例如在对海洋平台的实时控制中,扰动来自风力或海浪力,其动态特性可由波浪理论中Morison方程确定^[8];飞机飞行振动控制系统中,衰减机翼所承受的风剪应力的正弦谐振分量可由空气动力学方程确定^[9],磁盘驱动中的周期性扰动可由机械振动方程确定^[10]等。因此,研究在已知动态特性的外部扰动作用下的时滞系统的最优控制问题的近似方法是具有实际意义的研究课题。

本文的目的是研究在含有已知动态特性的外部持续扰动下的线性时滞系统的最优控制问题,提出一种前馈-反馈最优控制器设计的逐次逼近法。首先根据状态变量含有时滞的线性系统模型构造一个含已知时滞激励的线性迭代系统,并证明该迭代系统的解序列一致收敛于原线性时滞系统的解;然后利用常微分方程的逐次逼近法,将原时滞系统的最优控制问题化为求解无时滞系统最优控制序列问题。得到的最优控制律由解析的无时滞前馈-反馈控制部分和序列极限形式的时滞补偿控制部分组成。通过截取时滞补偿序列的有限项,得到了系统的前馈-反馈次优控制律(FFSOC)。仿真结果表明,与经典反馈最优控制相比,本文方法对抑制干扰具有更好的鲁棒性。

2 问题描述

考虑下列用泛函微分方程描述的受扰线性时滞定常控制系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_1x(t-\tau) + Bu(t) + Dw(t), t > 0; \\ x(t) &= \Phi(t), -\tau \leq t \leq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x \in R^n$ 是状态向量; $u \in R^r$ 是控制向量; $w \in R^m$ 是外部扰动向量; $\tau > 0$ 是时滞项; $\Phi(t)$ 是已知的连续初始函数向量; A, A_1, B, D 是具有适当维数的常量矩阵; w 的动态特性由以下外系统(Exo system)确定:

$$\dot{w}(t) = Gw(t), \quad (2)$$

其中 $G \in R^{m \times m}$ 是常量矩阵。显然,外系统(2)可以描述阶跃扰动、斜坡扰动、正弦扰动以及周期扰动等持续扰动。

对于有限时域二次型性能指标最优控制问题,可选取下列二次型平均性能指标:

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) Q_f x(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \quad (3)$$

其中: t_f 是终态时间; $Q, Q_f \in R^{n \times n}$ 是半正定矩阵; $R \in R^{r \times r}$ 是正定矩阵。

对于无限时域二次型性能指标最优控制问题,如果 G 的特征值都具有负实部,则可选取常规的二次型性能指标:

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \quad (4)$$

而如果 G 的特征值至少有一个具有零实部,则系统的状态向量和控制向量的稳态值至少有一个不趋于零。如果选择如式(4)所示的无限时域二次型性能指标,其性能指标函数是不收敛的。在这种情况下,可选取平均二次型性能指标:

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt, \quad (5)$$

系统的最优控制问题是寻找控制 $u^*(t)$, 使得 J 取得极小值。

对于该类问题的最优控制问题,其最优线性调节器问题的必要条件将导致求解既含有时滞项又含有超前项的非齐次两点边值问题。这类问题无论是求精确解还是求数值解都非常困难,因此寻求该类问题求解的近似方法具有重要的理论和应用价值。本文将提出该问题的一种逐次逼近求解算法。

3 预备引理

考虑时滞系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \bar{A}(t)x(t) + A_1x(t-\tau) + f(t, x, w), 0 < t < t_f; \\ x(t) &= \Phi(t), -\tau \leq t \leq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\bar{A}(t) \in R^{n \times n}$ 是时变矩阵。假设 $f(t, x, w)$ 满足下列条件:

$$\begin{aligned} f(t, z, w) - f(t, x, w) &= F(z - x), \\ F > 0, \forall x, z \in R^n. \end{aligned}$$

定义函数向量序列 $\{x^{(k)}(t)\}$ 为

$$\begin{aligned} x^{(0)}(t) &= \Phi(t, 0) \Phi(0), 0 < t < t_f; \\ x^{(k)}(t) &= \Phi(t, 0) \Phi(0) + \int_0^t \Phi(t, r) [A_1 x^{(k-1)}(r-\tau) + f(r, x^{(k-1)}(r), w(r))] dr, 0 < t < t_f; \\ x^{(k)}(t) &= \Phi(t), -\tau \leq t \leq 0, \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

其中 Φ 是系统(6)对应于矩阵 $\bar{A}(t)$ 的状态转移矩阵。

引理 1 函数向量序列(7)一致收敛于系统(6)的解。

证明 将 $\{x^{(k)}(t)\}$ 视为 $C^N[-\tau, t_f]$ 的一个序列, 则由式(7) 得

$$x^{(1)}(t) - x^{(0)}(t) = \int_0^t \Phi(t, r) [A_1 x^{(0)}(r - \tau) + f(r, x^{(0)}(r), w(r))] dr,$$

令

$$\sup_0^t \sup_{r \in [-\tau, t_f]} \Phi(t, r) = M, \quad \sup_0^t \Phi(t) = L,$$

$$A_1 = N, \quad \sup_0^t f(t, x^{(0)}, w) = H.$$

注意到 $\Phi(0, 0) = I = 1$, 即 $M \geq 1$, 从而有

$$x^{(1)}(t) - x^{(0)}(t) \leq \int_0^t (M^2 LN + MH) dt = M^2(LN + H)t$$

同理

$$x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t) \leq M(N + F) \int_0^t x^{(1)}(r) - x^{(0)}(r) dr$$

$$\leq M(N + F)M^2(LN + H) \int_0^t r dr = M^3(N + F)(LN + H) \frac{t^2}{2}.$$

依此类推得

$$x^{(k+1)}(t) - x^{(k)}(t) \leq M^{k+2}(N + F)^k(LN + H) \frac{t^{k+1}}{(k + 1)!}.$$

由三角不等式知, 对任意的 j 和 k 有

$$x^{(k+j)}(t) - x^{(k)}(t) \leq x^{(k+j)}(t) - x^{(k+j-1)}(t) + x^{(k+j-1)}(t) - x^{(k+j-2)}(t) + \dots + x^{(k+1)}(t) - x^{(k)}(t)$$

$$\leq (LN + N) \sum_{i=k}^{k+j-1} \frac{M^{i+2}(N + F)^i t^{i+1}}{(i + 1)!}$$

$$\leq \frac{(LN + H)M^{k+2}(N + F)^k t^{k+1}}{(k + 1)!} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{M^i(N + F)^i t^i}{i!},$$

$$\leq \frac{(LN + H)M^{k+2}(N + F)^k t^{k+1}}{(k + 1)!} \exp[M(N + F)t],$$

即对任意的 j 有 $\lim_k x^{(k+j)} - x^{(k)} = 0$ 所以 $\{x^{(k)}(t)\}$ 是 $C^N[-\tau, t_f]$ 的 Cauchy 序列, 即这个序列是一致收敛的. 因为 j 是任意的, 所以这个序列的极限是系统(6) 的解

引理 2^[11] 设 $A \in R^{n \times n}, B \in R^{m \times m}, C \in R^{n \times m}, X \in R^{n \times m}$, 则矩阵方程 $AX + XB = -C$ 的解 X 存在且唯一的充分必要条件是 $s_i(A) + s_j(B) \neq 0, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$. 其中 $s_i(\bullet)$ 为矩阵的特征值

4 有限时域前馈 - 反馈最优控制设计

由最优控制的必要条件知, 系统(1) 关于二次型性能指标(3) 的最优控制律可表示为下列形式:

$$u(t) = -R^{-1}B^T \lambda(t).$$

其中 $\lambda(t)$ 是下面两点边值问题的解:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t - \tau) - S\lambda(t) + Dw(t), 0 < t < t_f; \\ -\dot{\lambda}(t) = \begin{cases} Qx(t) + A^T\lambda(t) + A_1^T\lambda(t + \tau), & 0 < t < t_f - \tau; \\ 0, & t < t_f - \tau; \\ Qx(t) + A^T\lambda(t), & t_f - \tau < t < t_f; \end{cases} \\ x(t) = \Phi(t), -\tau \leq t \leq 0; \\ \lambda(t_f) = Q_f x(t_f). \end{cases} \quad (8)$$

其中 $S = BR^{-1}R^T$.

注意到式(8) 为既含时滞项 $x(t - \tau)$ 和超前项 $\lambda(t + \tau)$, 又含有扰动项 $w(t)$ 的两点边值问题, 对于这一问题无论是求精确解还是求数值解都是非常困难的

为求解两点边值问题(8), 现构造如下两点边值问题族:

$$\begin{cases} \dot{x}^{(k)}(t) = Ax^{(k)}(t) + A_1x^{(k-1)}(t - \tau) - S\lambda^{(k)}(t) + Dw(t), 0 < t < t_f; \\ -\dot{\lambda}^{(k)}(t) = \begin{cases} Qx^{(k)}(t) + A^T\lambda^{(k)}(t) + A_1^T\lambda^{(k-1)}(t + \tau), & 0 < t < t_f - \tau; \\ 0, & t < t_f - \tau; \\ Qx^{(k)}(t) + A^T\lambda^{(k)}(t), & t_f - \tau < t < t_f; \end{cases} \\ x^{(k)}(t) = \Phi(t), -\tau \leq t \leq 0; \\ \lambda^{(k)}(t_f) = Q_f x(t_f), k = I_+. \end{cases} \quad (9)$$

并构造相应的控制序列

$$u^{(k)}(t) = -R^{-1}B^T \lambda^{(k)}(t), t > 0, k = I_+. \quad (10)$$

设对第 k 次优化问题, 最优状态轨线为 $x^{(k)}(t)$, 最优控制为 $u^{(k)}(t)$.

定理 1 系统(1) 关于性能指标(3) 的最优控制确定如下:

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T [P(t)x(t) + \bar{P}(t)w(t) + \lim_k g^{(k)}(t)] \quad (11)$$

其中 P 是下列 Riccati 矩阵微分方程的唯一半正定解:

$$\begin{cases} -\dot{P}(t) = A^T P(t) + P(t)A - P(t)S P(t) + Q, \\ P(t_f) = Q_f; \end{cases} \quad (12)$$

\bar{P} 是下列矩阵微分方程的唯一解:

$$\begin{cases} -\dot{\bar{P}}(t) = [A^T - P(t)S] \bar{P}(t) + \bar{P}(t)G + P(t)D, \\ \bar{P}(t_f) = 0; \end{cases} \quad (13)$$

$g^{(k)}$ 是下列伴随方程的解:

$$\begin{cases} \dot{g}^{(0)}(t) = 0, 0 < t < t_f; \\ \dot{g}^{(k)}(t) = \end{cases}$$

$$\begin{cases} - (A^T - P(t)S)g^{(k)}(t) - P(t)A_1x^{(k-1)}(t - \tau) \\ \tau - A_1^T\lambda^{(k-1)}(t + \tau), 0 \leq t \leq t_f - \tau \\ - A^T - P(t)S)g^{(k)}(t) - P(t)A_1x^{(k-1)}(t - \tau), \\ t_f - \tau < t \leq t_f; \\ g^{(k)}(t_f) = 0, k = 1, \dots, N; \end{cases} \quad (14)$$

$x^{(k)}$ 由下列微分方程确定:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(k)}(t) &= [A - SP(t)]x^{(k)}(t) + A_1x^{(k-1)}(t - \tau) + \\ & [D - S\bar{P}(t)]w(t) - Sg^{(k)}(t), \\ x^{(k)}(t) &= \phi(t), -\tau \leq t \leq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

证明 令

$$\lambda^{(k)}(t) = P(t)x^{(k)}(t) + g^{(k)}(t) + \bar{P}(t)w(t), t \in [0, t_f]. \quad (16)$$

对式(16)两边求导,得

$$\dot{\lambda}^{(k)}(t) = \dot{P}(t)x^{(k)}(t) + P(t)\dot{x}^{(k)}(t) + \dot{g}^{(k)}(t) + [\dot{\bar{P}}(t) + \bar{P}(t)G]w(t). \quad (17)$$

将式(9)的第1式代入(17),可得

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^{(k)}(t) &= [\dot{P}(t) + P(t)A - P(t)SP(t)]x^{(k)}(t) + \\ & P(t)A_1x^{(k-1)}(t - \tau) - P(t)Sg^{(k)}(t) + \\ & \dot{g}^{(k)}(t) + [P(t)D + \dot{\bar{P}}(t) + \bar{P}(t)G - P(t)S\bar{P}(t)]w(t). \end{aligned} \quad (18)$$

将式(18)与(9)的第2式比较系数,可得到 Riccati 矩阵微分方程(12)和(13)以及伴随方程(14).

注意到 Riccati 矩阵微分方程(12)有唯一半正定解 $P(t)$, 矩阵微分方程(13)有唯一解 $\bar{P}(t)$. 在伴随方程(14)中 $x^{(k-1)}(t - \tau)$ 和 $\lambda^{(k-1)}(t + \tau)$ 是已知函数,所以伴随方程(14)是一个已知终值条件的非齐次线性向量微分方程.通过反向积分可解出 $g^{(k)}(t)$. 将式(16)代入(9)的第1式,可得到第 k 次逼近的最优状态轨线(15).

将式(16)代入(10),可得到第 k 次逼近的最优控制

$$u^{(k)}(t) = -R^{-1}B^T[P(t)x^{(k)}(t) + \bar{P}(t)w(t) + g^{(k)}(t)] \quad (19)$$

由引理1可知,式(14)和(15)的解序列 $\{g^{(k)}(t)\}$, $\{x^{(k)}(t)\}$ 是一致收敛的,而式(19)的解序列 $\{u^{(k)}(t)\}$ 是与 $\{g^{(k)}(t)\}$, $\{x^{(k)}(t)\}$ 相关的,所以也是一致收敛的.记 $u^*(t)$ 为序列 $\{u^{(k)}(t)\}$ 的极限,则序列 $\{x^{(k)}(t)\}$ 的极限 $x(t)$ 是系统(1)关于式(3)的最优状态轨线.由此得到最优控制律(11).

注1 事实上无法求得 k 时该问题的解,实际应用中可取 $k = N$,即将第 N 次的结果近似为该问题的解.从而得到系统(1)的 N 阶近似前馈-反

馈次优控制律(FFSOC)

$$u_N(t) = -R^{-1}B^T[P(t)x(t) + \bar{P}(t)w(t) + g^{(N)}(t)] \quad (20)$$

注意到式(20)中的 $x(t)$ 是 k 时的精确解,只有其中的 $g^{(N)}(t)$ 用第 N 次逼近的结果代替 $g^{(k)}(t)$. 因此,由式(20)描述的 N 阶次优控制律 u_N 比由式(19)描述的第 N 次迭代的最优控制律 $u^{(N)}$ 更接近于原系统的最优控制律

对于具体的系统控制精度要求, N 的选取可根据一定的误差标准确定.下面给出一种求解前馈-反馈最优控制律的实用近似算法

算法1(次优控制律(20)的计算过程) 算法步骤如下:

Step1: 分别由式(12), (13) 求出 P 和 \bar{P} , 并给定 $\sigma > 0, J_{N-1} = +\infty, k = 0$;

Step2: 由式(14) 计算 $g^{(k)}$;

Step3: 令 $N = k$, 由式(20) 计算 u_N , 并计算

$$J_N = \frac{1}{2}x^T(t_f)Q_f x(t_f) + \int_0^{t_f} [x^T(t)Qx(t) + u_N^T(t)Ru_N(t)]dt;$$

Step4: 若 $|J_N - J_{N-1}|/J_N < \sigma$, 则输出 u_N , 结束;

Step5: 否则, 由式(15) 计算 $x^{(k)}(t)$, 令 $k = k + 1$, 转 Step2

5 无限时域前馈-反馈最优控制设计

考虑受扰时滞系统(1)关于无限时域二次型性能指标(4)或(5)的最优控制问题

假设1 (A, B) 可控, $(A, Q^{1/2})$ 可观测

假设2 外系统(2)是稳定的,但可以不是渐近稳定的,即假设 G 的特征值 $s_i(G)$ 满足

$$\text{Re}(s_i(G)) < 0, i = 1, 2, \dots, m, \quad (21)$$

且 G 的最小多项式在零实部的根为单根

注2 假设2是必要的,否则将至少有一个扰动分量趋于无穷大,从而导致无限时域二次型性能指标(4)或(5)不收敛

无限时域二次型性能指标(4)或(5)的最优控制问题,其最优控制律的推导过程与最优控制律的形式是相同的.由最优控制的必要条件知,系统(1)关于无限时域二次型性能指标(4)或(5)的最优控制律可表示为 $u(t) = -R^{-1}B^T\lambda(t)$, 其中 $\lambda(t)$ 为下面两点边值问题的解:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(k)}(t) &= Ax(t) + A_1x(t - \tau) - \\ & S\lambda(t) + Dw(t), \\ -\dot{\lambda}(t) &= Qx(t) + A^T\lambda(t) + A_1^T\lambda(t + \tau), \\ x(t) &= \phi(t), -\tau \leq t \leq 0, \end{aligned}$$

$$\lambda(\tau) = 0 \quad (22)$$

为求解两点边值问题(22), 现构造如下两点边值问题族:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(k)}(t) &= Ax^{(k)}(t) + A_1x^{(k-1)}(t-\tau) - \\ & S\lambda^{(k)}(t) + Dw(t), \\ -\dot{\lambda}^{(k)}(t) &= Qx^{(k)}(t) + A^T\lambda^{(k)}(t) + \\ & A_1^T\lambda^{(k-1)}(t+\tau), \\ x^{(k)}(t) &= \Phi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0; \\ \lambda^{(k)}(\tau) &= 0, \quad k \in I_+. \end{aligned} \quad (23)$$

类似于有限时域最优控制的推导过程, 容易证明两点边值问题族(23)的解序列一致收敛于两点边值问题(22)的解, 从而, 可得到下列结果:

定理 2 受扰时滞系统(1)关于性能指标(4)或(5)的前馈-反馈最优控制律为

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T[Px(t) + \bar{P}w(t) + \int_k g^{(k)}(t)] \quad (24)$$

其中 P 是下列 Riccati 矩阵方程的唯一正定解:

$$A^TP + PA - PSP + Q = 0, \quad (25)$$

\bar{P} 是下列矩阵方程的唯一解:

$$(A - SP)^T\bar{P} + \bar{P}G = -PD, \quad (26)$$

$g^{(k)}$ 由下列伴随方程族的解序列决定:

$$\begin{aligned} g^{(0)}(t) &= 0, \\ \dot{g}^{(k)}(t) &= \\ & -(\bar{A} - PS)g^{(k)}(t) - PA_1x^{(k-1)}(t-\tau) - \\ & A_1^T\lambda^{(k-1)}(t+\tau), \\ g^{(k)}(\tau) &= 0, \quad k \in I_+; \end{aligned} \quad (27)$$

$x^{(k)}$ 由下列微分方程确定:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(k)}(t) &= \\ & (A - SP)x^{(k)}(t) + A_1x^{(k-1)}(t-\tau) + \\ & (D - S\bar{P})w(t) - Sg^{(k)}(t); \\ x^{(k)}(t) &= \Phi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0 \end{aligned} \quad (28)$$

证明 证明过程与定理 1 类似, 这里只需证明 Riccati 矩阵方程(25)和矩阵方程(26)解的存在唯一性. 由假设 1 知, Riccati 矩阵方程(25)存在唯一的正定矩阵解 P .

下面证明矩阵方程(26)解的存在唯一性. 因为由式(25)可唯一解出正定矩阵 P , 所以可以认为式(26)等号右端的 PD 是已知的. 由最优控制理论知, 矩阵方程(26)左端的矩阵 $(A - SP)$ 的所有特征值 $s_i(A - SP)$ 都具有负实部. 又由假设条件 2 知, 不等式(21)成立, 所以有

$$s_i(A - SP) + s_j(G) < 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

由引理 2 可知, 矩阵方程(26)的解是唯一存在的.

注 3 事实上, 在最优控制律(24)中, 无法求得

$g^{(k)}(t)$. 实际应用中可取第 N 次的结果近似为该问题的解. 从而得到系统(1)的第 N 阶 FFSOC

$$u_N(t) = -R^{-1}B^T[Px(t) + \bar{P}w(t) + g^{(N)}(t)] \quad (29)$$

注 4 在最优控制器的实际设计中, 次优控制律(28)的计算过程和其中 N 的确定方法与求有限时域次优控制律(20)的计算过程类似, 只需将求解矩阵 P, \bar{P} 及 $g^{(k)}$ 的方程(25)~(28)分别取代方程(12)~(15)即可.

6 仿真示例

考虑受扰线性时滞系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \end{bmatrix} x(t-2) + \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + w(t), \end{aligned}$$

$$x(t) = [0 \ 0]^T, \quad t \in [-2, 0]$$

其中外部扰动 w 的动态特性由外系统(2)确定. 下面分别研究外系统(2)为渐近稳定的情形和稳定但非渐近稳定的情形.

1) 外系统(2)为渐近稳定的情形

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

其特征值为 $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$; 初始扰动 $w(0) = [1 \ 0]^T$. 性能指标函数取为

$$J = \int_0^\infty [x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)] dt$$

为了说明 FFSOC 的有效性, 分别比较了传统反馈次优控制(FSOC)^[11]和 FFSOC 的控制效果.

系统状态分量 x_1, x_2 和控制律 u 的仿真曲线如图 1 所示, 其中实线表示 4 阶 FFSOC 的控制结果, 虚线表示 0 阶 FFSOC 的控制结果, 点线表示 4 阶 FSOC 的控制结果. 经计算, 4 阶 FSOC 的性能指标为 7.433 1, 而 4 阶 FFSOC 的性能指标为 5.531 2. 采用本文方法得到的 FFSOC 在不同迭代次数下的性能指标见表 1.

表 1 迭代次数不同时性能指标的数值比较

N	0	1	2	3	4
J_N	6.688 9	5.633 0	5.569 9	5.532 0	5.531 2

若给定 $\sigma = 0.005$, 则有 $|(J_4 - J_3)/J_4| < \sigma$, 所以 $u_4(t)$ 可以近似该系统的前馈-反馈次优控制律.

由图 1 和表 1 可以看出, 外系统(2)为渐近稳定的情形下, FFSOC 对外界持续干扰的鲁棒性和最优性能指标明显优于 FSOC. 同时, 随着次优控制阶数的增加, 控制的效果越来越好.

表2 迭代次数不同时性能指标的数值比较

N	0	1	2	3	4	5	6
J_N	3 841 5	3 720 6	3 623 4	3 455 5	3 345 1	3 310 4	3 310 1

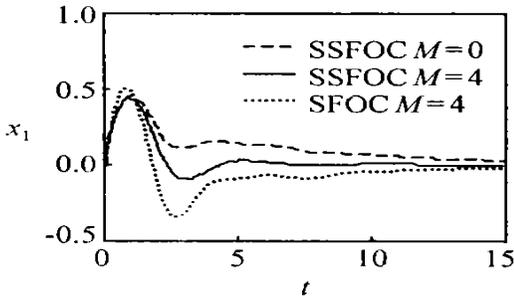
2) 外系统(2) 为稳定但非渐近稳定的情形

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix},$$

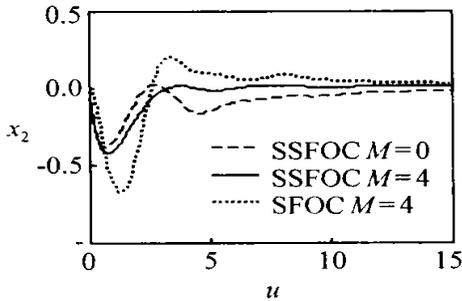
其特征值为 $\lambda = \pm 2i$ 初始扰动 $w(0) = [1 \ 0]^T$. 性能指标函数取为

$$j = \lim_T \int_0^T [x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)] dt$$

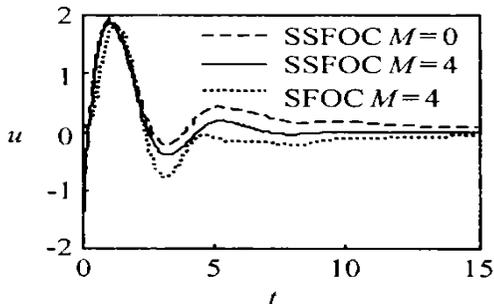
系统状态分量 x_1, x_2 和控制律 u 的仿真曲线如图2所示, 其中实线表示6阶FFSOC的控制结果, 虚线表示0阶FFSOC的控制结果, 点线表示6阶FSOC的控制结果. 经计算, 6阶FSOC的性能指标为5 550 4, 而6阶FFSOC的性能指标为3 310 1. 采用本文方法得到的FFSOC在不同迭代次数下的性能指标见表2



(a) 系统状态分量 x_1

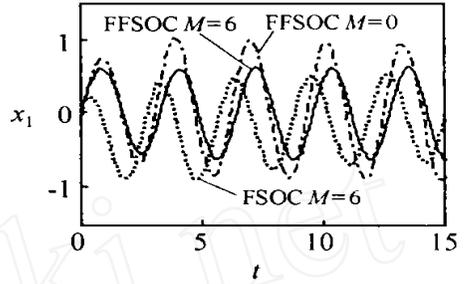


(b) 系统状态分量 x_2

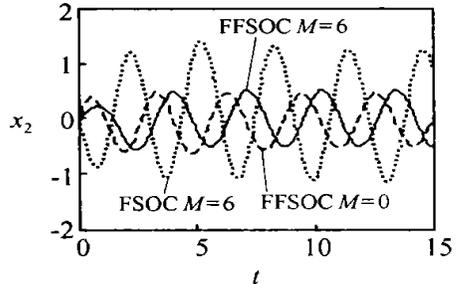


(c) 控制率 u

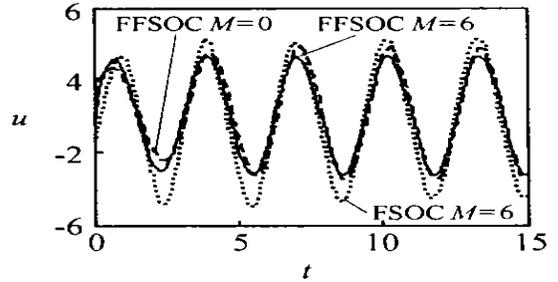
图1 外系统(2) 为渐近稳定时的最优控制系统仿真曲线



(a) 系统状态分量 x_1



(b) 系统状态分量 x_2



(c) 控制率 u

图2 外系统(2) 为稳定但非渐近稳定时的最优控制系统仿真曲线

若给定 $\sigma = 0.005$, 则有 $|(J_6 - J_5)/J_6| < \sigma$ 所以 $u_6(t)$ 可以近似该系统的前馈-反馈最优控制律

由图2和表2可以看出, 外系统(2) 为稳定但非渐近稳定的情形下, FFSOC 对外界持续干扰的鲁棒性和最优性能指标明显优于 FFSOC. 同时, 随着次优控制阶数的增加, 控制的效果越来越好.

7 结 论

本文针对含有已知动态特性的外部持续扰动下的线性时滞系统, 提出了前馈-反馈最优控制的逐次逼近法, 给出了求前馈-反馈最优控制律的实用近似算法. 仿真结果表明, 本文提出的最优控制迭代算法收敛较快, 而且容易实现. 与经典的反馈最优控制相比, 本文结果对外部动态扰动的抑制效果更好, 具有更好的鲁棒性.

(下转第515页)

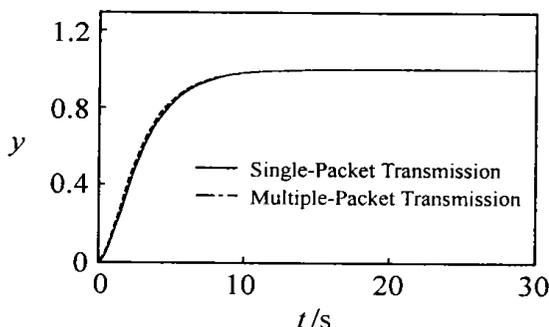


图 4 多包传输网络控制系统阶跃响应

7 结 语

本文分析了双边网络控制系统数据包丢失模型, 依据异步动态系统理论提出了在保持系统指数稳定下网络信号传输成功率的范围, 给出了数据包丢失的最大限度。利用异步动态理论对具有多包传输的双边网络控制系统进行建模, 提出了判定系统指数稳定的充分条件, 并进行了理论证明。仿真示例验证了数据包丢失及多包传输网络控制系统稳定性判定条件的有效性。

参考文献(References)

- [1] Sadjadi B A. Stability of networked control systems in the presence of packet losses [A]. *Proc of the 42nd IEEE Conf on Decision and Control* [C]. Maui, Hawaii, 2003: 676-681.
- [2] Tjupswan Y, Chow M-Y. Control methodologies in

networked control systems [J]. *Control Engineering Practice*, 2003, 11(10): 1099-1111.

- [3] 杨丽曼, 李运华, 袁海斌. 网络控制系统的时延分析及数据传输技术研究[J]. *控制与决策*, 2004, 19(4): 361-366.
- (Yang L M, Li Y H, Yuan H B. Analysis of time delay in networked control systems and study of data transmission technology [J]. *Control and Decision*, 2004, 19(4): 361-366.)
- [4] Zhang W, Branicky M S, Phillips S M. Stability of networked control systems [J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2001, 21(2): 84-99.
- [5] Hassibi A, Boyd S P, How J P. Control of asynchronous dynamical systems with rate constraints on events [A]. *Proc of the 38th IEEE Conf on Decision and Control* [C]. Phoenix, 1999: 1345-1351.
- [6] Rabello A, Bhaya A. Stability of asynchronous dynamical systems with rate constraints and applications [J]. *IEEE Proc Control Theory and Applications*, 2003, 150(5): 546-550.
- [7] Branicky M S, Phillips S M, Zhang W. Scheduling and feedback co-design for networked control systems [A]. *Proc of the 41st IEEE Conf on Decision and Control* [C]. Nevada: Las Vegas, 2002: 1211-1217.
- [8] Ling Q, Lemmon M D. Robust performance of soft real-time networked control systems with data dropouts [A]. *Proc of the 41st IEEE Conf on Decision and Control* [C]. Nevada: Las Vegas, 2002: 1225-1230.

(上接第 510 页)

参考文献(References)

- [1] Tang G Y, Luo Z W. Suboptimal control of linear systems with state-delay [A]. *Proc of IEEE Conf on SMC* [C]. Tokyo, 1999, 5: 104-109.
- [2] 唐功友, 王芳. 具有小时滞的线性大系统的次优控制 [J]. *控制理论与应用*, 2003, 20(1): 121-124.
- (Tang G Y, Wang F. Suboptimal control for linear large-scale systems with small time-delay [J]. *Control Theory and Applications*, 2003, 20(1): 121-124.)
- [3] Yu L, Chu J. An LM I approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems [J]. *Automatica*, 1999, 35(6): 1155-1159.
- [4] Mahmoud M S. Robust H_∞ control of discrete systems with uncertain parameters and unknown delays [J]. *Automatica*, 2000, 36(4): 627-635.
- [5] Zhao X H, Tang G Y. Suboptimal control of linear discrete large-scale systems with state time-delay [A]. *Proc of the 4th Int Conf on Control and Automation* [C]. Montreal, 2003: 404-408.
- [6] Lindquist A, Yakubovich V A. Optimal damping of

forced oscillations in discrete-time systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(6): 786-802.

- [7] Tang G Y. Feedforward and feedback optimal control for linear system with sinusoidal disturbances [J]. *High Technology Letters*, 2001, 7(4): 16-20.
- [8] Wang W, Tang G Y. Feedback and feedforward optimal control for offshore jacket platforms [J]. *China Ocean Engineering*, 2004, 18(4): 515-526.
- [9] Mulgund S S, Stengel R F. Optimal nonlinear estimation for aircraft flight control in wind shear [J]. *Automatica*, 1996, 32(1): 3-13.
- [10] White M T, Tomizuka M. Increased disturbance rejection in magnetic disk drives by acceleration feedforward control and parameter adaptation [J]. *Control Engineering Practice*, 1997, 5(6): 741-751.
- [11] Lancaster P, Lerer L, Timenetsky M. Factored forms for solutions of $AX - XB = C$ and $X - AXB = C$ in companion matrices [J]. *Linear Algebra and its Applications*, 1984, 62: 19-49.