文章编号: 1001-0920(2005)06-0686-03

Delta 算子系统的全程滑模变结构控制

徐 勇[1,2], 陈增强[1], 袁著祉[1]
(1. 南开大学 自动化系, 天津 300071; 2. 河北工业大学 理学院, 天津 300130)

摘 要: 将全程滑模变结构控制思想引入Delta 算子系统, 给出了一种设计全程滑模控制方法. 系统轨线一开始就位于切换面上, 消除了非滑动模态运动, 从而增强了系统的鲁棒性. 利用Delta 算子的离散特性求出系统不确定性近似值, 从而在控制器设计过程中消去不确定项. 仿真结果验证了该方法的有效性.

关键词: Delta 算子; 变结构控制; 全程滑动模态; 鲁棒性
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Global sliding - mode variable structure control for Delta operator formulated systems

XU Yong[1,2], *CHEN Zeng-qiang*[1], *YUAN Zhu-zhi*[1]
(1. Department of Automation, Nankai University, Tianjin 300071, China; 2. School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin 300130, China. Correspondent: XU Yong, E-mail: xuyongshd@sina.com)

Abstract: A global sliding control approach is proposed for Delta operator formulated systems by using global sliding mode method. The trajectory of the system arrives at the switching surface at the very beginning. The approach eliminates the reaching intervals, and the robustness of the system is improved. The effect of the disturbance is considered by using its approximate value. So the disturbance is eliminated at the controller design process. The simulation results show the features of the proposed control strategy.

Key words: delta operator; variable structure control; global sliding mode; robustness

1 引 言

Delta 算子系统模型是连续时间系统与离散时间系统的统一描述形式[1,2]. 它是一种离散化方法, 在高速采样时Delta 算子模型趋近于原连续模型, 并能有效克服移位算子方法在高速采样时的系列难题[3]. 如今有关Delta 算子系统的研究已受到人们广泛关注, 在许多方面取得了研究成果[3,4].

滑模变结构控制是处理离散系统与连续系统鲁棒控制的有效方法[5~9]. 提高系统的鲁棒性是滑模变结构控制的研究重点之一. 一般情况下, 如果系统的不确定性及摄动未知, 那么就不可能产生将系统的运动轨线保持在滑模面上的变结构控制[4]. 因此, 在已有的研究中大都假设系统的摄动及外部扰动都满足匹配条件. 利用滑模变结构控制处理Delta 算子系统, 缩短到达滑模时间是提高系统鲁棒性的有效手段. 本文将全程滑模控制思想[6,7]引入Delta 算子系统, 并针对系统的未知摄动, 利用Delta 算子系统的离散特性, 得到系统不确定性近似值, 并能在设计控制器的过程中消去不确定项. 所设计的滑模控制系统在整个跟踪过程中都具有鲁棒性.

2 Delta 算子系统描述

Delta 算子定义为

$$\delta = (q - 1)/T.$$

其中: T 为采样周期; q 为前项插分算子, 即

$$qx(t) = x(t + T).$$

Delta 算子系统的稳定域是在 γ平面上以$(-1/T,$

收稿日期: 2004-06-24; **修回日期**: 2004-08-27.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60374037); 南开大学创新研究基金项目.
作者简介: 徐勇(1971—), 男, 山东蒙阴人, 讲师, 博士生, 从事模糊控制、预测控制的研究; 袁著祉(1937—), 男, 山东青岛人, 教授, 博士生导师, 从事自适应过程控制、预测控制和智能控制的研究.

0) 为圆心, $1/T$ 为半径的圆盘区域 $D(-1/T, 1/T)$. 其中: $\gamma = (z-1)/T$ 为 Delta 算子的变换域变量, z 为 q 算子变换域变量 Delta 算子的变换稳定域与 q 算子变换的稳定域有以下关系[2]:

$$|z| < 1 \Leftrightarrow \gamma \in D(-1/T, 1/T).$$

本文考虑如下连续系统[5,8,9]:

$$\dot{x} = A_c x + B_c(u + \rho(x, u, t)),$$
$$y = x_1. \tag{1}$$

其中: x 为 $n \times 1$ 阶状态向量; y 为输出; u 为控制输入; 未知项 $\rho(x, u, t)$ 为系统内部摄动和外部扰动, 简记为 $\rho(t)$; 矩阵 A_c, B_c 具有以下形式:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$B_c = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1]^{\mathrm{T}}. \tag{3}$$

假设 1 　系统的不确定项有界, 即存在正数 $M > 0$, 使得 $|\rho(t)| < M$, 且 $\rho(t)$ 关于 t 连续

利用零阶保持器并取采样周期 T, 系统(1) 的 Delta 算子形式为[1]

$$\delta x(kT) = A x(kT) + B(u(kT) + \rho(kT)). \tag{4}$$

其中 A 和 B 由下式给出:

$$A = \left[I + \frac{A_c T}{2!} + \frac{A_c^2 T^2}{3!} + \cdots\right] A_c, \tag{5}$$

$$B = \left[I + \frac{A_c T}{2!} + \frac{A_c^2 T^2}{3!} + \cdots\right] B_c. \tag{6}$$

显然, 当 T 趋于零时, A, B 分别趋向于 A_c, B_c, 因此连续系统与所对应的 Delta 模型有紧密的联系

假设 2 　对于所有 k 满足

$$|\rho(kT) - \rho(kT - T)| < \epsilon,$$

其中 $\epsilon > 0$ 为常数

对于 Delta 算子系统(4), 目标是设计 Delta 算子形式的控制器, 使系统状态跟踪参考输入 $x_r = [r \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^{\mathrm{T}}$ 的误差收敛到零, r 为有界常数

3　切换函数的选取

系统状态与参考输入的跟踪误差为

$$e(kT) = x(kT) - x_r(kT), \tag{7}$$

选择切换函数为

$$s(kT) = G^{\mathrm{T}} e(kT) - G^{\mathrm{T}} E(kT) e(0). \tag{8}$$

其中: $E(kT) = \mathrm{diag}(\exp(-\beta_1 kT), \exp(-\beta_2 kT), \cdots, \exp(-\beta_n kT))$; $\beta_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为设定的正常数; $G^{\mathrm{T}} = [g_0 \quad g_1 \quad \cdots \quad g_{n-2} \quad 1]$ 的选取必须保证误差系统稳定 显然, $s(0) = 0$ 保证系统一开始就处于滑动模态上, 从而可以设计控制器使系统的运动为全程滑模运动

4　控制器设计

由于系统(4) 含有未知不确定项, 控制器的设计必须考虑不确定项的影响 首先由 Delta 算子定义得

$$\delta s(kT) = G^{\mathrm{T}} A e(kT) + G^{\mathrm{T}} B u(kT) + G^{\mathrm{T}} B \rho(kT) + G^{\mathrm{T}} A x_r(kT) - T^{-1} G^{\mathrm{T}} [E(kT + T) - E(kT)] e(0). \tag{9}$$

为简便起见, 令

$$M(kT) = T^{-1} G^{\mathrm{T}} [E(kT + T) - E(kT)] e(0). \tag{10}$$

在滑模面上有 $s(kT + T) = 0$ 在式(9) 中令 $s(kT + T) = 0$, 得等效控制

$$u_{\mathrm{eq}}(kT) = (G^{\mathrm{T}} B)^{-1} [-G^{\mathrm{T}} (A + T^{-1} I) e(kT) - G^{\mathrm{T}} B \rho(kT) - G^{\mathrm{T}} A x_r(kT) + M(kT) + T^{-1} G^{\mathrm{T}} E(kT) e(0)]. \tag{11}$$

等效控制含有不确定项 下面根据系统的离散特性消去式(11) 中的不确定项, 从而得到可直接利用的控制器

由(9) 式得

$$G^{\mathrm{T}} B \rho(kT) = T^{-1} s(kT + T) - [G^{\mathrm{T}} (A + T^{-1} I) e(kT) + G^{\mathrm{T}} B u(kT) + G^{\mathrm{T}} A x_r(kT)] + M(kT) + T^{-1} G^{\mathrm{T}} E(kT) e(0). \tag{12}$$

将式(12) 每一项延迟一个采样周期得

$$G^{\mathrm{T}} B \rho(kT - T) = T^{-1} s(kT) - [G^{\mathrm{T}} (A + T^{-1} I) e(kT - T) + G^{\mathrm{T}} B u(kT - T) + G^{\mathrm{T}} A x_r(kT - T)] + M(kT - T) + T^{-1} G^{\mathrm{T}} E(kT - T) e(0). \tag{13}$$

式(11) 中 $\rho(kT)$ 为不确定项 由假设 2, 可利用 $G^{\mathrm{T}} B \rho(kT - T)$ 代替 $G^{\mathrm{T}} B \rho(kT)$, 代入式(11), 得控制律

$$u(kT) = (G^{\mathrm{T}} B)^{-1} [-G^{\mathrm{T}} (A + T^{-1} I) e(kT) - G^{\mathrm{T}} B \rho(kT - T) - G^{\mathrm{T}} A x_r(kT)] + (G^{\mathrm{T}} B)^{-1} [M(kT) + T^{-1} G^{\mathrm{T}} E(kT) e(0)]. \tag{14}$$

将式(13) 代入(14), 整理得

$$u(kT) = u(kT - T) + (G^{\mathrm{T}} B)^{-1} [-G^{\mathrm{T}} (A + T^{-1} I) (e(kT) - e(kT - T)) - T^{-1} s(kT)] - (T G^{\mathrm{T}} B)^{-1} G^{\mathrm{T}} [E(kT - T) - E(kT)] e(0) + (G^{\mathrm{T}} B)^{-1} [M(kT) - M(kT - T)]. \tag{15}$$

在 kT 时刻, $s(kT)$, $e(kT)$, $e(kT - T)$ 和 $E(kT)$ 都可以得到, 从而式(15) 中 $u(kT)$ 可以获得

定理 1 对于含有扰动项的 Delta 算子系统(4), 如果满足假设 1 和假设 2, 则在 kT 时刻利用 $\rho(kT - T)$ 近似计算 $\rho(kT)$, 所得控制律(15) 能保证误差系统渐近稳定且切换函数有界.

证明 令 $A_{eq} = [A - B(G^TB)^{-1}G^T(A + T^{-1}I)]$. 将式(14) 代入(4) 得

$$\begin{aligned}&\delta e(kT) = \\ &A_{eq}e(kT) + [I + B(G^TB)^{-1}G^T]Ax_r(kT) + \\ &B[\rho(kT) - \rho(kT - T)] + \\ &B(G^TB)^{-1}T^{-1}G^TE(kT + T)e(0).\end{aligned} \tag{16}$$

用极点配置或其他方法可以选择 $G^T = [g_0 \quad g_1 \quad \cdots \quad g_{n-2} \quad 1]$ 使得 A_{eq} 为稳定阵, 即使得 A_{eq} 的特征根位于 $D(-1/T, 1/T)$ 内部, 则系统(16) 稳定.

将式(16) 两边同时左乘以 G^T 得

$$\begin{aligned}&\delta G^Te(kT) = \\ &-G^TT^{-1}e(kT) + G^TB(\rho(kT) - \\ &\rho(kT - T)) + T^{-1}G^TE(kT + T)e(0).\end{aligned} \tag{17}$$

化简得

$$\begin{aligned}&\delta s(kT) = \\ &-T^{-1}s(kT) + G^TB[\rho(kT) - \rho(kT - T)].\end{aligned} \tag{18}$$

根据 Delta 算子的定义, 由式(18) 得

$$\begin{aligned}&s(kT + T) = \\ &TG^TB[\rho(kT) - \rho(kT - T)].\end{aligned} \tag{19}$$

由假设 2 得

$$|s(kT + T)| < T|G^TB|\epsilon, \tag{20}$$

从而 $|s(kT + T)|$ 有界. □

5 仿 真

考虑系统

$$\overset{\circ}{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rho(t),$$

设计全程滑模控制使系统的状态轨线跟踪目标 $x_r = [r \quad 0 \quad 0]^T$. 选取系统的初始状态为

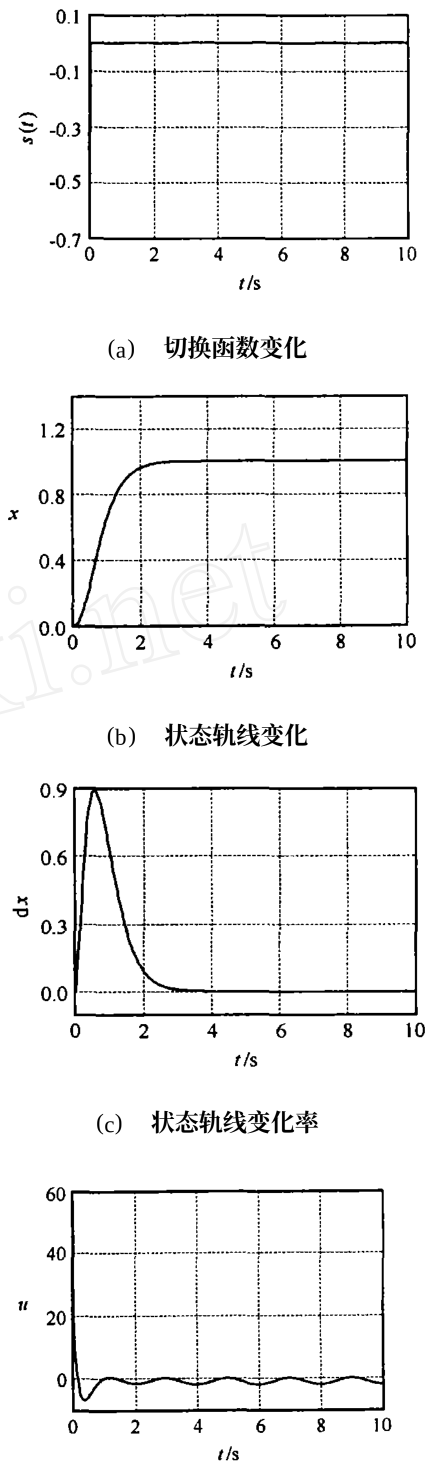
$$x(0) = [0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

切换参数为

$$G = [9 \quad 6 \quad 1]^T,$$

跟踪轨迹取为 $r = 1$, 采样周期取 $T = 0.02$ s, $\beta_i = 4$, $u(0) = 0$, $M = 3$, 不确定项 $\rho(t) = 2 + \cos(\pi t)$, 仿真结果如图 1 所示.

仿真结果表明, 系统状态变化率小, 到达滑模时间短, 跟踪性能好.



(a) 切换函数变化

(b) 状态轨线变化

(c) 状态轨线变化率

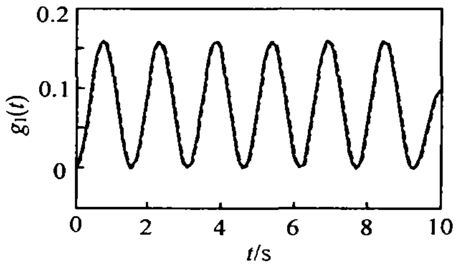
(d) 系统输入变化

图 1 仿真结果

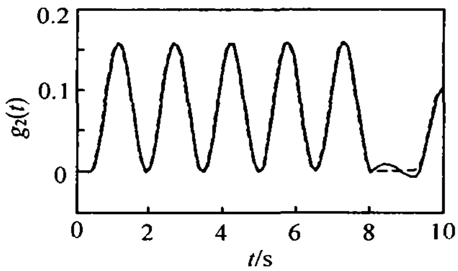
6 结 语

本文将全程滑模控制思想引入 Delta 算子系统, 使系统基本在滑动模态上运动. 给出了控制器的设计方法, 该方法利用 Delta 算子离散特性, 在迭代过程中利用系统不确定性的近似来设计控制器. 仿真结果表明了该方法的有效性.

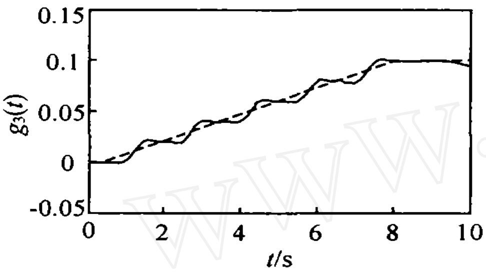
(下转第 693 页)



(a)　g_1 的轨迹



(b)　g_2 的轨迹



(c)　g_3 的轨迹

图 4　参数变化轨迹

6　结　　语

本文针对空间运动体的李群系统, 通过采用李群平均算法对其运动方程求解的Wei-Norman 参数进行了有效的近似, 从而获得了小幅周期变化控制信号, 实现了状态驱动的目标. 本文所用控制策略的另一个重要意义在于: 这种小幅周期变化控制信号, 正是微观领域中具有相同李群数学结构的一类量子力学系统——自旋1/2 粒子系统所需要的作为微扰的控制信号.

参考文献(References)

[1] Brockett R W. System theory on group manifolds and coset spaces[J]. *SIAM J of Control*, 1972, 10(2): 265-284.

[2] Jurdjevic V, Sussman H J, Control systems on Lie groups[J]. *J of Differential Equations*, 1972, (12): 313-329.

[3] Leonard N E, Krishnaprasad P S. Averaging for attitude control and motion planning[A]. *Proc 32nd IEEE Conf Decision Control*[C]. San Antonio, 1993: 1919-1924.

[4] Leonard N E. Motion control of drift-free, left-invariant systems on Lie groups[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(9): 1539-1554.

[5] Sachkov Y L. Controllability of invariant systems on Lie groups and Homegeneous spaces[J]. *J Math Science*, 2000, 100(4): 2355-2421.

[6] *Wei J, Norman E. On global representations of the solutions of linear differential equations as a product of exponentials*[J]. Proc of the Amer Math Soc, 1964, (15): 327-334.

(上接第688 页)

参考文献(References)

[1] Middleton R H, Goodwin G C. *Digital Control and Estimation: A Unified Approach*[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1990.

[2] 金井喜美雄, 堀宪之. *计算机控制入门: δ算子的应用*[M]. 张平, 译. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1996.

[3] 张端金, 王忠勇, 吴捷. 系统控制和信号处理中的Delta 算子方法[J]. *控制与决策*, 2003, 18(4): 385-391.
(Zhang D J, Wang Z Y, Wu J. Survey on system control and signal processing using the delta operator[J]. *Control and Decision*, 2003, 18(4): 385-391.)

[4] Chan C Y. Discrete adaptive sliding mode control of a state-space system with a bounded disturbance[J]. *Automatica*, 1998, 34(12): 1631-1635.

[5] 高为炳. *变结构控制的理论及设计方法*[M]. 北京: 科学出版社, 1996.

[6] 张科, 周凤歧. 不确定多变量系统的全程滑态变结构控制方案设计[J]. *控制理论与应用*, 1999, 16(2): 221-224.
(Zhang K, Zhou F Q. Design of global sliding model variable structure control for uncertain multivariable linear systems[J]. *Control Theory and Applications*, 1999, 16(2): 221-224.)

[7] 米阳, 李文林, 井元伟, 等. 线性多变量离散系统全程滑模变结构控制[J]. *控制与决策*, 2003, 18(4): 460-463.
(Mi Y, Li W L, Jing Y W, et al. Global sliding mode control for uncertain discrete time systems[J]. *Control and Decision*, 2003, 18(4): 460-463.)

[8] Choi H H. A new method for variable structure control system design: A linear matrix inequality approach[J]. *Automatica*, 1997, 33(11): 2089-2092.

[9] Choi H H. On the uncertain variable structure systems with bounded controllers[J]. *J of the Franklin Institute*, 2003, 340: 135-146.