

文章编号: 1001-0920(2005)06-0689-05

## 李群平均方法在单轮姿态和运动控制中的应用

丛爽, 钱辉环

(中国科学技术大学 自动化系, 安徽 合肥 230027)

**摘要:** 针对一个单轮系统, 采用欧拉群描述其位形空间, 对于Weierstrass方程中不能精确求解的参数, 采用平均方法对其进行近似计算, 从而使被控系统在满足李代数可控性秩条件下, 在李群上的平均轨迹能以一定的精度逼近真实轨迹. 通过对单轮系统的仿真实验与结果分析, 证明了所用方法的有效性, 并指出该方法更适合驱动一类量子力学系统的状态.

**关键词:** 运动控制; 李群; 平均方法; Weierstrass方程

**中图分类号:** TP13 **文献标识码:** A

## Application of Lie group method in unicycle attitude and motion control

CONG Shuang, QIAN Hui-huan

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China Correspondent: CONG Shuang, Email: scong@ustc.edu.cn)

**Abstract:** The configuration space of an unicycle system is described by Euler group. To the parameters in the Weierstrass equation not being calculated precisely, the averaging method is used to make approximate calculation on the basis that the system satisfies Lie algebra controllability rank condition, the average track on Lie group can approximate the real track within some precision. The simulation experiment and analysis on the unicycle system are given. The simulation results show that the validity of the method.

**Key words:** motion control; Lie group; averaging method; Weierstrass equation

### 1 引言

20世纪70年代初, Brockett<sup>[1]</sup>将李群和李代数理论引入非线性控制理论, 对李群上右不变系统的非线性可控性、可观性及实现进行了研究. 之后, Jurdjvic 和 Sussmann<sup>[2]</sup>进一步研究了这些系统在抽象李群上的可控性. 上述3人的研究结果给出了一种判断一个给定李群上的左(或右)不变系统是否存在一个控制规则将系统从李群中的任意起始点驱动到任意期望终点的方法, 这种方法被称为李代数秩条件. 然而他们并没有给出如何构造这样的控制规则及其系统的运动轨迹. 90年代, Leonard<sup>[3,4]</sup>对如何构造控制规则进行了研究, 使用平均理论作为

分析工具, 引入了小幅周期时变控制, 推导出能够提供控制规则的构造性可控性条件.

Weierstrass方程给出了一种求李群上微分方程解的方法, 该方法将求解的问题转变为求李群上的另一个系统的解. 实际上Weierstrass方程中参数的精确求解是相当困难的. 本文通过针对一个单轮系统控制问题的描述, 采用欧拉群描述其运动位形, 对于Weierstrass方程中不能精确求解的参数, 通过构造性可控算法, 采用平均方法对其进行近似, 使被控系统在满足李代数可控性秩条件下, 在李群上的平均轨迹以一定的精度逼近真实轨迹. 文中通过具体的系统仿真实验, 详细对比和分析了采用平

收稿日期: 2004-07-05; 修回日期: 2004-12-13

基金项目: 安徽省教育厅自然科学基金项目(2003kj048zd).

作者简介: 丛爽(1961—), 女, 山东文登人, 教授, 博士生导师, 从事人工神经网络、运动控制等研究; 钱辉环(1982—), 男, 浙江长兴人, 学士, 从事人工神经网络、运动控制等研究.

均算法所获得的结果与精确结果之间的关系 本文结果不仅在宏观领域的运动控制中具有应用价值,在微观领域的量子力学系统中也具有潜在的应用价值

## 2 单轮系统控制问题的描述

所研究的被控对象是一个单轮车,图1是其俯视图,其中:  $(r_1, r_2)$  为一般的惯性系,  $(b_1, b_2)$  为固定在轮上的坐标系,  $(x, y)$  为单轮质心在惯性系  $(r_1, r_2)$  中的投影坐标,  $\theta$  为轮子正向  $b_1$  与  $r_1$  的夹角 在位形空间中它的位置和姿态向量可描述为  $(x, y, \theta)$

$R^2 \times [0, 2\pi)$ . 该系统的位形空间的运动学约束可由不可积分的微分方程所表示,即

$$\begin{cases} \dot{x} = v_1 \cos \theta \\ \dot{y} = v_1 \sin \theta \\ \dot{\theta} = v_2 \end{cases} \quad (1)$$

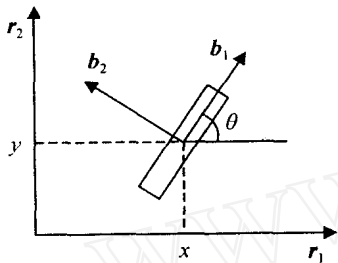


图1 单轮系统坐标图

其中:  $v_1$  和  $v_2$  分别为平动速度和转动速度 如果使用李群中的特殊欧拉群 SE(2) 来表示运动,则可写成

$$\dot{X} = X (A_1 v_1 + A_2 v_2), \quad (2)$$

其中

$$X = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{SE}(2),$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

它们是 SE(2) 群对应的李代数 se(2) 的基

在这种类型的控制策略中一般需要采用小幅的控制信号,所以需要使用小量  $\epsilon$  对控制量的数量级进行限制,  $v_1 = \epsilon u_1, v_2 = \epsilon u_2$ ; 于是式(2)就转化为

$$\dot{X} = \epsilon X (A_1 u_1 + A_2 u_2). \quad (3)$$

在式(3)所表示的3维李群元素中只有2个控制量,所以是一种欠驱动的形式 式(3)同时还是一

种无漂左不变系统 更一般的欠驱动无漂左不变系统的方程可表示为

$$\dot{X} = \epsilon X U, U(t) = \sum_{i=1}^m A_i u_i(t). \quad (4)$$

其中:  $X(t)$  是  $n$  维李群  $G$  中的曲线,  $U(t)$  是  $G$  对应的李代数  $\mathbf{G}$  上的曲线,  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  是李代数  $\mathbf{G}$  的基;  $\epsilon$  是一个小量,  $u_i(t)$  是逐段周期性的控制信号,从而  $\epsilon u_i(t)$  就是小幅周期控制输入

对于这样的欠驱动系统,所要研究的控制问题可表述为:

**问题 P** 给定初态  $X_i \in G$ , 终态  $X_f \in G$  和时间  $t_f > 0$ , 如何构造一个系统的输入控制量  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ ,  $t \in [0, t_f]$ , 使得  $X(0) = X_i$ ,  $X(t_f) = X_f$ .

## 3 李代数可控性秩条件

首先对系统(4)要研究的是: 问题 P 的控制律是否存在, 进而才能对其进行求解 Brockett 等人的研究表明, 只要欠驱动的李群系统满足李代数可控性秩条件, 就存在这样的控制律

为描述李代数可控性秩条件, 需要定义李代数上的李括号运算和一系列集合 李括号运算定义为  $[A, B] = AB - BA$ ;  $A, B \in \mathbf{G}$  而定义集合组如下:

$$C_0 = \{A_1, \dots, A_m\},$$

$$C_1 = C_0 \cup \{B \mid B = [B_1, B_0]\},$$

$$B_i = \{A_1, \dots, A_m\}, i = 0, \dots, 1,$$

$$\vdots$$

$$C_k = C_{k-1} \cup \{B \mid B = [B_k, [B_{k-1}, [\dots, [B_1, B_0] \dots]]]\},$$

$$B_i = \{A_1, \dots, A_m\}, i = 0, \dots, k.$$

下面介绍李代数可控性秩条件

**定理 1** (李代数可控性秩条件)<sup>[5]</sup>

如果  $G$  是一个连通的李群,  $\mathbf{G}$  是与  $G$  对应的李代数, 若  $\mathbf{G} = \text{span}(C_k)$ , 则系统(4)可控, 即问题 P 的解存在, 最小的  $k$  值称为系统(4)的李括号重数

对单轮系统使用定理 1 检验可得  $[A_1, A_2] = A_3, C_1 = \{A_1, A_2, A_3\}, \mathbf{G} = \text{span}(C_1)$ . 因此, 式(3)表示的单轮系统的控制律是存在的, 且李括号重数为 1.

## 4 平均方法

根据李代数可控性秩条件可以确保问题 P 的解存在, 但该定理没给出控制律的求解方法 Leonard 提出的李群平均方法使该问题得到解决, 并提出了构造性可控性, 即寻找一个控制规则来得到所预定的运动 其主要手段是采用小幅周期时变控制和平均理论

为运用平均算法解决问题, 首先要了解李群系

统(4) 在控制作用下状态轨迹的求解方法 下面的引理将给出李群上系统求解的一种方法

引理 1 (Wei-Norman 引理)<sup>[6]</sup>

令  $X(t)$  是方程(4) 的解,  $X(0) = I$ , 则  $\exists t_0 > 0$ , 使得对  $|t| < t_0$ ,  $X(t)$  可表示为

$$X(t) = \prod_{i=1}^n \exp(g_i(t)A_i). \quad (5)$$

Wei-Norman 参数  $g = (g_1, \dots, g_n)^T$  满足

$$\dot{g} = M(g)u(|t| < t_0), \quad (6)$$

且  $g(0) = 0, M(g)$  为  $g$  的实值解析矩阵函数

当  $g$  很小时,

$$M(g) = I + \tilde{\xi}(g) + O(g^2),$$

$$\tilde{\xi}_{ij}(g) = \sum_{k=j+1}^n g_k \Gamma_{kj}^i \quad (7)$$

实际上, 通过式(6) 很难求出 Wei-Norman 参数和控制量之间的解析式, 因而使用式(5) 不易求得系统的解 在这种情况下, Leonard 提出使用平均解  $g^{(p)}(t), X^{(p)}(t), p = 2, 3$ , 来求  $g(t)$  和  $X(t)$ . 下面的二阶平均定理给出了求解平均解  $g^{(2)}(t)$  和  $X^{(2)}(t)$  的方法

定理 2 二阶平均定理(面积规则)<sup>[4]</sup>

考虑李群  $G$  上的系统满足方程(4), 对应的李代数为  $\mathfrak{G}$  假设  $U(t) \in \mathfrak{G}$  且在时间上以  $T$  为周期, 并对  $t \in [0, \infty)$  有直到三阶的微分,  $U_{av} = 0$  令  $D = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid |x| < r\} \subset S$  ( $r$  尽可能地取大). 假设  $X(0) = X_0 \in Q$ , 且  $g(t)$  是式(6) 的解,  $g(0) = g_0 = \Psi^{-1}(X_0) = O(\epsilon)$ . 令  $g_0^{(2)} = (g_{10}^{(2)}, \dots, g_{n0}^{(2)})^T$ , 并定义以下变量:

$$\bar{w}_k(t) = \epsilon^2 \frac{1}{T} \sum_{i,j=1; i < j}^m A_{rea_{ij}}(T) \Gamma_{ij}^k + g_{k0}^{(2)},$$

$$g_k^{(2)}(t) = \tilde{u}_k(t) + \bar{w}_k(t),$$

$$X^{(2)}(t) = \prod_{i=1}^n \exp(g_i^{(2)}(t)A_i).$$

如果以下条件成立, 则  $X^{(2)}(t)$  可作为  $X(t)$  的二阶平均近似: 若  $g_0 - g_0^{(2)} = O(\epsilon^2)$ , 且  $g^{(2)}(t)$

$D, \forall t \in [0, b/\epsilon], b > 0$ , 则  $\tilde{d}(X(t), X^{(2)}(t)) = O(\epsilon^2), \forall t \in [0, b/\epsilon]$

在定理 2 中, 需要解释以下几个集合量:  $U_{av}$  是指  $U(t)$  在一个周期中的平均值;  $\tilde{u}_k(t)$  是  $u_k(t)$  的积分;  $A_{rea_{ij}}(T)$  是  $\tilde{u}_i(t)$  和  $\tilde{u}_j(t)$  围成曲线之间的面积

有了具体求解二阶平均解的公式后, 下面的构造性可控性算法就给出了保证一些系统的平均解所能达到的精度

定理 3 构造性的可控性算法<sup>[4]</sup>

假设方程(4) 描述的系统是在连续李群  $G$  上的

$p - 1$  重李括号系统,  $p = 2, 3$ , 则可通过  $X^{(p)}(t)$  解决可控性问题  $P$ , 并达到精度  $O(\epsilon^p)$ .

通过上面的二阶平均定理和构造性可控性算法可获得系统的近似响应 下面给出采用二阶平均算法构造控制量来解决控制问题  $P$  的步骤 二阶平均算法需要使用两个模块, 分别满足不同几何量的要求

模块 1

已知:  $c_k (k = 1, \dots, m), T, \omega$  及当前时间  $t_0$ , 令  $t_1 = t_0 + T/2$

目标: 求得  $u_k(t), k = 1, \dots, m, t \in [t_0, t_1]$ ,  $u_k(t)$  是连续函数, 且  $\tilde{u}_k(t_1) = c_k, \bar{u}_k(t_1) = \bar{u}_k(t_0) = 0$

控制信号:

$$u_k(t) = \frac{1}{2} c_k \omega \sin(\omega(t - t_0)), t_0 \leq t \leq t_1$$

模块 2

已知:  $c_{ij} (i = 1, \dots, m - 1; j = i + 1, \dots, m), T, \omega, M$  及当前时间  $t_0$ , 令  $t_1 = t_0 + (M + 1)T$ .

目标: 求得连续且均值为零的控制信号  $u_i(t)$  和  $u_j(t), j = i + 1, \dots, m, t \in [t_0, t_1]$ , 使得

$$A_{rea_{ij}}(t_1) = c_{ij},$$

$$\bar{u}_i(t_0) = \bar{u}_i(t_1) = \bar{u}_j(t_0) = \bar{u}_j(t_1) = 0$$

控制信号: 令

$$\alpha_i = \left( \sum_{j=i+1}^m \frac{c_{ij}^2}{\pi^2 M^2} \right)^{1/4},$$

$$\alpha_j = \frac{c_{ij}}{\alpha_i M}, j = i + 1, \dots, m.$$

可取控制信号为连续的分段函数, 即

$$\begin{cases} \bar{u}_i(t) = \alpha_i \omega \sin(\omega(t - t_0)), \\ \bar{u}_j(t) = 0, \\ t_0 \leq t \leq t_0 + T/4 = s_1; \\ \bar{u}_i(t) = \alpha_i \omega \cos(\omega(t - s_1)), \\ \bar{u}_j(t) = \alpha_j \omega \sin(\omega(t - s_1)), \\ s_1 \leq t \leq s_1 + MT = s_2; \\ \bar{u}_i(t) = \alpha_i \omega \cos(\omega(t - s_2)), \\ \bar{u}_j(t) = 0, \\ s_2 \leq t \leq s_2 + 3T/4 = t_1. \end{cases}$$

需要指出的是, 在这里几何量  $A_{rea_{ij}}(t)$  是一个时变的线性累加值, 与固定值  $A_{rea_{ij}}(T)$  不同

描述完两个重要模块, 下面给出整个控制量的构造流程(这两个模块中的已知量  $c_k$  和  $c_{ij}$  是通过流程中的初始化步骤求出的):

1) 初始化: 定义

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^{m+1} & \dots & \Gamma_{lm}^{m+1} & \Gamma_{23}^{m+1} & \dots & \Gamma_{(m-1)m}^{m+1} \\ \Gamma_{12}^{m+2} & \dots & \Gamma_{lm}^{m+2} & \Gamma_{23}^{m+2} & \dots & \Gamma_{(m-1)m}^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_{12}^n & \dots & \Gamma_{lm}^n & \Gamma_{23}^n & \dots & \Gamma_{(m-1)m}^n \end{bmatrix},$$

$$\Gamma^* = \Gamma^T (\Gamma \Gamma^T)^{-1}, \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{13} \\ \vdots \\ c_{(m-1)m} \end{bmatrix} = \Gamma^* \begin{bmatrix} g_{f(m+1)} \\ g_{f(m+2)} \\ \vdots \\ g_{fn} \end{bmatrix},$$

$$c_k = g_{fk} - \sum_{i,j=1; i < j}^m c_{ij} \Gamma_{ij}^k, k = 1, \dots, m;$$

$\bar{S} = \{i | c_{ij} = 0, \text{且 } j > i\}$ ,  $r$  是  $\bar{S}$  中元素的个数; 取  $M$  为正整数, 且  $M \gg 1/\pi\epsilon, T$  为控制信号的周期,

$$T = \frac{t_f}{r(M+1) + 1/2}, \omega = \frac{2\pi}{T};$$

- 2)  $i = 0$ ;
- 3)  $i = i + 1$ ;
- 4) 若  $i \notin \bar{S}$ , 则转到 5);
- 5) 以  $c_{ij} (j = i + 1, \dots, m)$  为输入参数, 应用模块 2 求得控制量;
- 6) 若  $i < m - 1$ , 则转到 2);
- 7) 以  $c_k (k = 1, \dots, m)$  为输入参数, 应用模块 1 求得控制量

### 5 轮系统姿态控制的应用

第 2 节描述的单轮系统在  $SE(2)$  群上的数学模型, 在两输入的情况下是一个单重李括号系统, 采用二阶平均算法便可进行控制并达到精度  $O(\epsilon^2)$ . 单轮系统的数学模型如式(3) 描述, 其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

根据问题 P 的描述, 要使系统从初始 0 时刻的  $X_i$  变化到终止  $t_f$  时刻的  $X_f$ . 通过一一映射可用 Wei-Noman 参数表示初始值和终止值为

$$\Phi^{-1}(X_i) = g_i = (g_{i1}, \dots, g_{im})^T,$$

$$\Phi^{-1}(X_f) = g_f = (g_{f1}, \dots, g_{fn})^T.$$

在单轮系统的应用中, 分别取  $g_i = (0, 0, 0)^T, g_f = (0, 1, 0, 1, 0, 1)^T, t_f = 10, \epsilon = 0.1, n = 3, m = 2, \Gamma = \Gamma^* = 1, c_{12} = g_3, c_1 = g_1, c_2 = g_2, \bar{S} = \{1\}, r = 1, M = 5$

采用二阶平均算法进行求解时, 首先通过模块 2 求出第 1 个阶段的控制信号, 使  $c_{12}$  的条件得到满足; 然后通过模块 1 求解第 2 个阶段的控制信号, 以满足  $c_1$  和  $c_2$  的条件

图 2 和图 3 分别给出了所求出的控制信号以及在其作用下单轮系统在二维平面上的运动轨迹, 其中, 图 2 是控制信号  $u_1(t)$  和  $u_2(t)$  随时间变化的情

况. 在时间段  $[0, t_1]$  中, 控制信号是通过模块 2 求出的; 而在  $[t_1, t_f]$  中, 模块 1 发挥作用. 控制量是逐段连续的. 图 3 给出了单轮系统中心在控制量的作用下, 在  $xy$  平面坐标系中的运动轨迹. 通过小幅周期正弦控制信号, 可将单轮以较高精度从初始点  $(0, 0)$  的位置, 以螺旋上升的移动方式移动到期望的终点  $(0.1, 0.1)$  的位置. 从图 3 中可以看出, 虽然单轮系统的运动路径不是最优的, 但小幅周期正弦控制量使得系统每一次的转角量都不大, 满足小幅控制的要求.

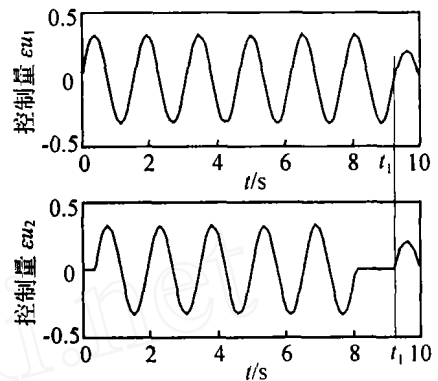


图 2 求解出的控制信号

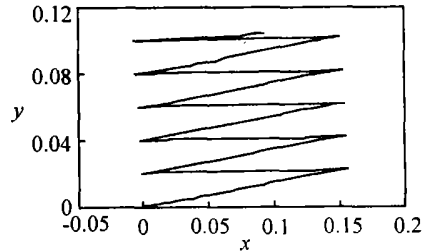


图 3 单轮中心在平面上的运动轨迹

作为对比, 图 4 给出了 Wei-Noman 精确参数以及采用平均算法获得的参数变化轨迹, 其中, 实线为系统的 Wei-Noman 精确参数在控制输入  $u_1(t)$  和  $u_2(t)$  作用下的变化情况; 虚线为采用平均公式计算出来的 Wei-Noman 参数变化情况. 从图 4 可以看出, 由于控制量直接作用在  $g_1(t)$  和  $g_2(t)$  相应的李代数的基上, 由平均公式计算出的 Wei-Noman 参数轨迹与 Wei-Noman 的精确参数轨迹完全重合. 因为  $g_3(t)$  是欠驱动的, 它只能通过  $u_1$  和  $u_2$  的联合作用来加以控制, 所以由平均公式计算出的是精确参数的平均值, 但其精度可确保在  $O(\epsilon^2)$  内. 另外, 从应用中可以看出, Wei-Noman 参数  $g_1 = \theta, (g_2, g_3)^T$  的物理意义为单轮的中心在原点与惯性系原点重合, 轴的方向与单轮方向平行的坐标系  $(s_1, s_2)$  中的坐标.

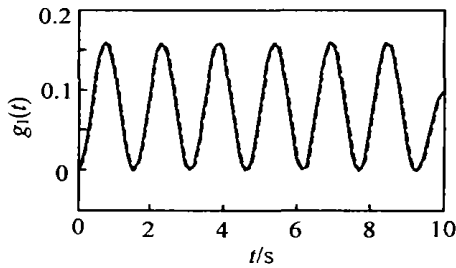
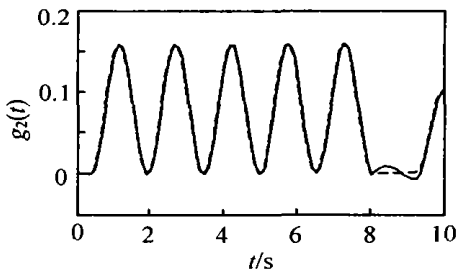
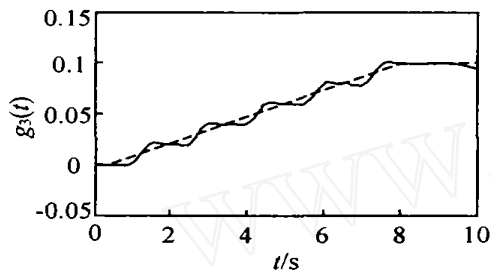
(a)  $g_1$  的轨迹(b)  $g_2$  的轨迹(c)  $g_3$  的轨迹

图 4 参数变化轨迹

## 6 结 语

本文针对空间运动体的李群系统, 通过采用李

群平均算法对其运动方程求解的Wei-Nomman 参数进行了有效的近似, 从而获得了小幅周期变化控制信号, 实现了状态驱动的目标。本文所用控制策略的另一个重要意义在于: 这种小幅周期变化控制信号, 正是微观领域中具有相同李群数学结构的一类量子力学系统——自旋  $1/2$  粒子系统所需要的作为微扰的控制信号。

## 参考文献(References)

- [1] Brockett R W. System theory on group manifolds and coset spaces[J]. *SIAM J of Control*, 1972, 10(2): 265-284
- [2] Jurjevic V, Sussman H J. Control systems on Lie groups[J]. *J of Differential Equations*, 1972, (12): 313-329
- [3] Leonard N E, Krishnaprasad P S. Averaging for attitude control and motion planning[A]. *Proc 32nd IEEE Conf Decision Control* [C]. San Antonio, 1993: 1919-1924
- [4] Leonard N E. Motion control of drift-free, left-invariant systems on Lie groups[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(9): 1539-1554
- [5] Sachkov Y L. Controllability of invariant systems on Lie groups and Homogeneous spaces [J]. *J Math Science*, 2000, 100(4): 2355-2421
- [6] Wei J, Nomman E. On global representations of the solutions of linear differential equations as a product of exponentials [J]. *Proc of the Amer Math Soc*, 1964, (15): 327-334

(上接第 688 页)

## 参考文献(References)

- [1] Middleton R H, Goodwin G C. *Digital Control and Estimation: A Unified Approach* [M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1990
- [2] 金井喜美雄, 堀宪之. *计算机控制入门:  $\delta$ 算子的应用* [M]. 张平, 译. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1996
- [3] 张端金, 王忠勇, 吴捷. 系统控制和信号处理中的Delta算子方法[J]. *控制与决策*, 2003, 18(4): 385-391  
(Zhang D J, Wang Z Y, Wu J. Survey on system control and signal processing using the delta operator [J]. *Control and Decision*, 2003, 18(4): 385-391.)
- [4] Chan C Y. Discrete adaptive sliding mode control of a state-space system with a bounded disturbance [J]. *Automatica*, 1998, 34(12): 1631-1635
- [5] 高为炳. *变结构控制的理论及设计方法* [M]. 北京: 科学出版社, 1996
- [6] 张科, 周凤岐. 不确定多变量系统的全程滑模变结构控制方案设计[J]. *控制理论与应用*, 1999, 16(2): 221-224  
(Zhang K, Zhou F Q. Design of global sliding model variable structure control for uncertain multivariable linear systems [J]. *Control Theory and Applications*, 1999, 16(2): 221-224.)
- [7] 米阳, 李文林, 井元伟, 等. 线性多变量离散系统全程滑模变结构控制[J]. *控制与决策*, 2003, 18(4): 460-463  
(Mi Y, Li W L, Jing Y W, et al. Global sliding mode control for uncertain discrete time systems [J]. *Control and Decision*, 2003, 18(4): 460-463.)
- [8] Choi H H. A new method for variable structure control system design: A linear matrix inequality approach [J]. *Automatica*, 1997, 33(11): 2089-2092
- [9] Choi H H. On the uncertain variable structure systems with bounded controllers [J]. *J of the Franklin Institute*, 2003, 340: 135-146