

文章编号: 1001-0920(2005)06-0698-04

## 基于尺度乘积与小波收缩相结合的去噪方法

郭显久<sup>1,2</sup>, 王伟<sup>1</sup>

(1. 大连理工大学 信息与控制研究中心, 辽宁 大连 116024; 2 大连水产学院 信息工程学院, 辽宁 大连 116023)

**摘要:** 提出一种将相邻尺度的小波系数乘积与小波阈值收缩相结合的信号去噪方法。该方法采用小波系数乘积的直方图方法提取小波系数, 用该方法去噪既能很好地保持信号突变点的原有特性, 又具有较强的去噪能力。数值仿真表明, 与小波阈值收缩方法相比, 该方法在信噪比和均方差指标上都有明显的提高, 并能很好地保持信号的形状。

**关键词:** 信号去噪; 尺度乘积; 小波收缩; 二进制小波变换

中图分类号: TP301.6

文献标识码: A

## Denoising method based on combining multi-scale product with wavelet shrinkage

GUO Xian-jiu<sup>1,2</sup>, WANG Wei<sup>1</sup>

(1. Research Center of Information and Control, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China; 2 School of Information Engineering, Dalian Fisheries University, Dalian 116023, China Correspondent: GUO Xian-jiu, E-mail: gxj@dlu.edu.cn)

**Abstract:** A new denoising method based on combining multi-scale product with wavelet shrinkage is presented. The wavelet coefficients used in the method are extracted by histogram of adjacent wavelet coefficients product. The new denoising method not only preserves signal's original features, but also has stronger ability to remove noise. The numerical experiments show that the proposed method can significantly raise SNR, decrease MSE and preserve the shape of signal better than the original wavelet shrinkage method.

**Key words:** signal denoising; multi-scale product; wavelet shrinkage; dyadic wavelet transform

### 1 引言

从含有噪声的信号恢复其原始信号, 且在恢复过程中尽量保持信号的重要特征(如边缘、拐角等)不变, 这在信号处理中仍是一个具有挑战性的问题。小波变换因其具有良好的局部特性, 在信号去噪中被广泛应用。在利用小波变换去噪时一般采用 Donoho 和 Johnstone<sup>[1,2]</sup> 提出的小波收缩方法, 该方法对含有高斯噪声的平稳信号效果较好, 而对非平稳信号的去噪效果并不理想。该方法的基本原理是: 首先对信号进行小波变换, 然后对小波系数进行阈值收缩, 最后进行小波逆变换。

近年来针对小波收缩方法的研究主要集中在阈

值的确定上。文献[3]介绍了多种不同的阈值确定方法, 但这些方法大多是从 Donoho 和 Johnstone 给出的方法发展而来的。在用小波阈值去噪时, 由于对含有噪声信号的多尺度小波分解, 在去除噪声的同时, 也对信号的突出部分(边缘、拐角等)的重要特征信息进行了模糊, 因为这部分信息通常也具有高频特性。文献[4, 5]提出的小波域的去噪算法, 虽然在去噪的同时能够较好地保留图像的重要特征, 但算法复杂。文献[6]给出了小波域中尺度乘积的边缘检测方法, 虽然该方法能在含有高斯白噪声的信号中有效提取信号的边缘, 但不能完全应用于信号去噪。本文结合尺度乘积能够有效提取信号边缘与小波阈值

收稿日期: 2004-10-19; 修回日期: 2005-02-16

基金项目: 辽宁省高等学校学科拔尖人才基金项目(2003-54)。

作者简介: 郭显久(1963—), 男, 辽宁黑山人, 副教授, 博士生, 从事数字图像处理与模式识别等研究; 王伟(1955—), 男, 辽宁盖县人, 教授, 博士生导师, 从事智能控制等研究。

收缩可使信号有限平滑的特点, 提出了尺度乘积与小波收缩相结合的去噪方法

## 2 小波阈值收缩的去噪方法

该方法(详细内容见文献[1, 2])在最小均方误差意义下是有效的, 并且可以达到较好的视觉效果。其主要理论依据是: 属于Besov空间的信号在小波域内其能量主要集中于有限的几个系数中, 而噪声能量却分布于整个小波域内。因此经小波变换分解后信号的小波系数要大于噪声的小波系数, 通过采用阈值的方法可将信号的小波系数保留, 而大部分噪声的小波系数减少至零。文献[1, 2]给出的硬阈值函数和软阈值函数可分别描述为

$$d_{j,i} = \begin{cases} d_{j,i}, & |d_{j,i}| > \lambda \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

$$d_{j,i} = \begin{cases} d_{j,i} - \lambda, & d_{j,i} > \lambda \\ 0, & |d_{j,i}| < \lambda \\ d_{j,i} + \lambda, & d_{j,i} < -\lambda \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $d_{j,i}$  为第  $j$  尺度下的第  $i$  个小波系数, 阈值  $\lambda = \tilde{\sigma} \sqrt{2 \log N}$ 。其中:  $N$  为信号的采样个数,  $\tilde{\sigma}$  为信号的标准偏差估计值。 $\tilde{\sigma}$  的估计一般有 3 种方法: 1) 令  $\tilde{\sigma} = 1$ ; 2) 取首次分解的小波系数的中值估计算子; 3) 各级取各级的小波系数的中值估计算子。中值估计算子为  $\tilde{\sigma} = \text{Med}(|\cdot|) / 0.6745$ ,  $\text{Med}(\cdot)$  表示取小波系数绝对值的中值。本文采用第 3 种方法对每尺度小波系数进行阈值处理

利用小波阈值收缩的方法去噪分为 3 步:

1) 对观测信号  $y = x + \epsilon$  ( $x$  为原始信号,  $\epsilon$  为高斯白噪声) 应用离散小波变换, 得出各尺度小波系数  $d_j$  ( $j = 0, 1, \dots, J - 1$ ),  $J$  为小波分解尺度数;

2) 应用阈值函数处理各尺度小波系数的估计值;

3) 在各尺度小波系数估计值的基础上应用离散小波逆变换, 得到信号  $x$  的估计值  $\tilde{x}$ 。

## 3 尺度乘积与阈值收缩相结合的去噪方法

### 3.1 离散二进制小波变换

本文采用离散二进制小波变换<sup>[7]</sup>对信号进行小波分解。离散二进制小波变换与离散小波变换具有相同的算法结构, 所不同的是二进制小波变换的滤波器是通过对离散小波变换的滤波器相邻系数间插入  $2^j - 1$  个“0”得到的, 在每次小波分解时并没有向下抽样。本文之所以采用离散二进制小波变换有两点原因: 一是对信号的每次小波分解都产生与原始信号相同的小波系数和尺度系数, 因此能够实现相邻尺度下的小波系数的乘积; 二是对于小波系数去噪而言, 由于信号重建效果对于单个小波系数依

赖性很强, 这使得实际选取小波阈值变得很困难。原因是在正交小波变换域内, 信号的表达不存在冗余; 与此相反, 在二进制小波变换域内, 信号的表达非常冗余, 部分小波系数的扰动不会带来重构信号的严重失真。对信号进行二进制小波变换, 并用  $d_j^k$  表示尺度为  $j$  时的小波系数(即信号在第  $j$  尺度小波分解时产生的高频分量)。对一维信号  $k = 1$ ,  $d_j^1$  表示小波系数向量; 对二维信号  $k = 1, 2, 3$ ,  $d_j^k$  分别表示行、列和对角方向上的小波系数矩阵。

### 3.2 相邻尺度小波系数乘积

信号和噪声在数学上有着不同的奇异特性<sup>[8]</sup>, 在对信号进行离散二进制小波变换时, 信号突变点处的小波系数的幅值明显增大, 而噪声小波系数的幅值将随着尺度的增加迅速减小。因此, 相邻尺度的小波系数乘积将使突变点处的结果更加明显, 并使噪声的结果大幅度减小<sup>[6]</sup>。小波变换的两相邻尺度小波系数乘积的定义为

$$p_j^k = d_j^k \cdot d_{j+1}^k, \\ k = 1 \text{ or } k = 1, 2, 3, \\ j = 0, 1, \dots, J - 1 \quad (3)$$

式中: “ $\cdot$ ”表示两个向量或矩阵的点积运算,  $d_j^k$  和  $d_{j+1}^k$  分别是第  $j$  尺度和第  $j+1$  尺度的小波系数向量(一维)或矩阵(二维)。

图 1 给出了被高斯白噪声所干扰 Blocks 信号的前 3 个尺度小波分解及相邻尺度小波系数乘积结果。由图可见, 信号边缘位置的小波系数表现出较大的幅值, 并向下一尺度传递, 而噪声的系数逐减。如果是高斯白噪声, 可以证明有一半噪声小波系数不能传递到下一尺度<sup>[8]</sup>。因此, 相邻尺度小波系数乘积可减少噪声, 但需要注意的是, 随着尺度的增加, 信号的光滑度越来越大, 相邻尺度乘积不但不能突出信号的边缘, 反而会使边缘位置移位; 当进行信号重构时, 会使信号变得模糊, 影响信号的去噪效果。本文利用前 3 个尺度乘积结果确定前 2 个尺度的小波系数估计值。

### 3.3 用尺度乘积结果提取信号突变点处的小波系数

由于相邻尺度小波系数乘积结果使信号奇异点处的小波系数幅值与噪声的小波系数幅值区别非常明显, 为此本文利用相邻尺度小波系数乘积结果的直方图来确定参与乘积尺度中的小波系数。该方法非常简单, 仿真实验也表明是非常有效的。

图 2 给出了相邻尺度小波系数乘积结果绝对值的统计直方图, 横坐标为小波系数乘积结果的绝对值, 纵坐标为某个值区间上的小波系数的个数。所谓值区间就是将小波系数乘积的绝对值从零到最大值

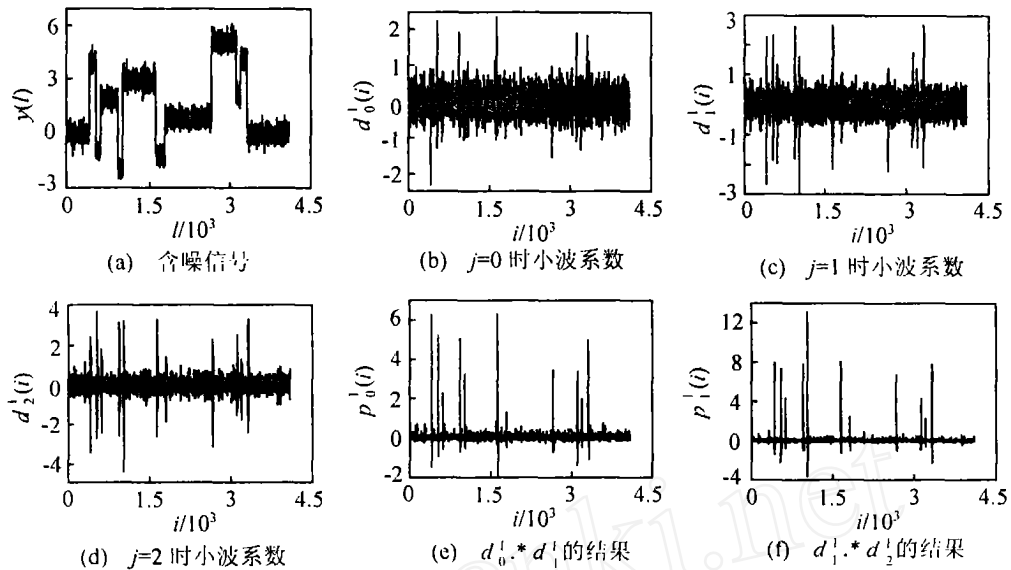


图1 加噪的 Blocks 信号小波分解及相邻尺度乘积

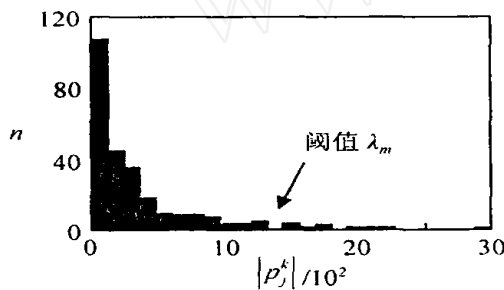


图2 相邻尺度小波系数乘积直方图

分成若干个小区间, 值区间的个数一般根据信号的采样点数来决定。如果采样点数多, 可以多划分值区间, 相反则少划分。设信号采样点数为  $n$ , 本文将横坐标划分成  $n/10$  个值区间。

从图2可以清楚地看出, 统计直方图能很好地将乘积结果的绝对值所对应的小波个数区分出来, 即在某些值区间内小波个数为零。为此在图2中选择小波系数的个数为0处的对应幅值作为尺度乘积结果的阈值  $\lambda_m$ 。利用  $\lambda_m$  对相邻尺度小波乘积结果做如下处理: 首先定义向量或矩阵  $w_j^k = 0$  (一维信号时  $w_j^k$  为向量, 二维时  $w_j^k$  为矩阵), 其元素的个数与信号的采样点数相等, 然后按下式给向量或矩阵赋值:

$$w_{j,i}^k = 1, |p_{j,i}^k| > \lambda_m, k = 1 \text{ or } k = 1, 2, 3, \quad (4)$$

式中  $p_{j,i}^k$  为第  $j$  与  $j+1$  尺度的第  $i$  个小波系数的乘积。通过(4)的运算, 可得到一个新向量或矩阵  $w_j^k$ 。在该向量或矩阵中, 将所有的小波系数乘积绝对值大于  $\lambda_m$  的元素置1, 其他元素为0。利用统计直方图确定阈值  $\lambda_m$ , 具有一定的自适应性的特点。下面利用  $w_j^k$  来提取信号突变点处的小波系数。

设  $j=0$  和  $j=1$  小波系数的向量或矩阵为  $d_0^k$

和  $d_1^k$ ,  $w_0^k$  是尺度0与尺度1乘积后由式(4)得到的结果,  $w_1^k$  是尺度1与尺度2乘积后由式(4)得到的结果, 则可通过下面两个算式提取信号突变点处的重构小波系数的估计值:

$$d_0^k = d_0^k * w_0^k, k = 1 \text{ or } k = 1, 2, 3; \quad (5)$$

$$d_1^k = d_1^k * w_1^k, k = 1 \text{ or } k = 1, 2, 3 \quad (6)$$

### 3.4 其他尺度小波系数的处理

信号突变处前2个尺度的小波系数通过式(5)和(6)被提取出来, 小波分解的更高尺度虽然也包含信号突变处的小波系数, 但这些系数可能被过渡平滑造成位置改变, 所以不能将它们看成重要突变处的小波系数。为在信号重构时, 达到该平滑则平滑, 该突变则突变的效果, 本文对其他尺度的小波系数采用式(1)的硬阈值函数算法提取小波系数。

通过上述处理便可得到重构信号所需的全部小波系数估计值, 再结合尺度系数利用离散二进制小波的逆变换即可得到去噪后的信号。

## 4 仿真实验

通过对含有高斯白噪声的  $1 \times 4096$  Blocks 信号 ( $\sigma = 0.3$ ) 和  $256 \times 256$  Lena 图像 ( $\sigma = 15$ ) 进行数值仿真, 并将本文算法去噪结果与 Donoho 和 Johnstone 的硬阈值和软阈值方法进行了比较。小波采用的是 Daubechies (8) 小波, 对信号进行小波分解的尺度数为4。本文算法的数值仿真程序是利用 Matlab 6.0 编写的, 硬阈值和软阈值去噪程序采用 WaveLab 802 中的程序。衡量算法好坏的指标采用均方差 (MSE) 和信噪比 (SNR), 本文按文献 [9] 给出的定义计算 MSE 和 SNR。因为软阈值去噪的效果不如硬阈值的好, 所以对图像仿真只给出了本文

算法与硬阈值去噪方法的比较, 仿真结果见表 1 和图 3, 图 4

表 1 不同算法去噪的 MSE 和 SNR 结果

	Blocks 信号		Lena 图像	
	SNR	MSE	SNR	MSE
含噪声信号	18.25	0.0866	17.04	399.84
本文算法	29.75	0.0078	22.82	105.60
硬阈值算法	25.47	0.0172	21.65	138.06
软阈值算法	20.06	0.0635		

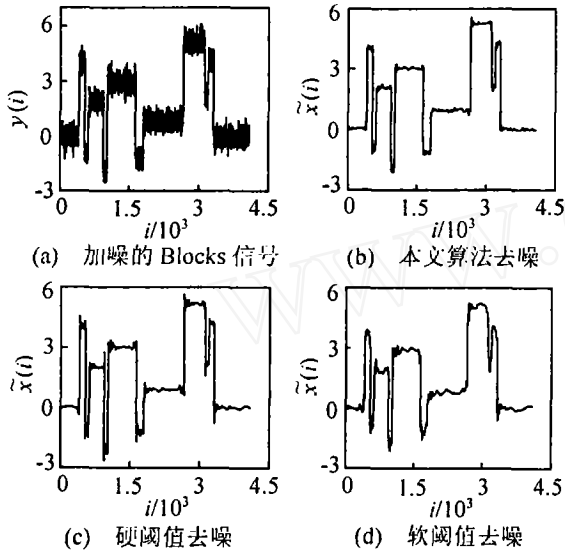


图 3 加噪的 Blocks 信号数值仿真



图 4 加噪的 Lena 图像数值仿真

## 5 结 论

从表 1 中的信噪比和均方差结果可以看出, 采用本文去噪方法, 对有突变点的信号去噪能力强于硬阈值和软阈值去噪方法。从图 3 和图 4 来看, 本文去噪方法在有效去除噪声的同时, 能较好地保留信号突变点处的特征, 其总体效果要优于硬阈值和软阈值的去噪效果, 因此本文方法更适用于对非平稳信号的去噪。另外, 本文方法还具有算法简单, 阈值选取具有一定的自适应性等特点。

## 参考文献 (References)

- [1] Donoho D L. Denoising by soft-thresholding[J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 1995, 41(3): 613-627.
- [2] Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage[J]. *Biometrika*, 1994, 81(3): 425-455.
- [3] 谢杰成, 张大力, 徐文立. 小波图像去噪综述[J]. *中国图像图形学报*, 2002, 7(3): 209-217.  
(Xie J C, Zhang D L, Xu W L. Overview on wavelet denoising[J]. *J of Image and Graphics*, 2002, 7(3): 209-217.)
- [4] 柳薇, 马争鸣. 基于边缘检测的图象小波阈值去噪方法[J]. *中国图像图形学报*, 2002, 7(8): 788-793.  
(Liu W, Ma Z M. Wavelet image threshold denoising based on edge detection[J]. *J of Image and Graphics*, 2002, 7(8): 788-793.)
- [5] 张小飞, 徐大专, 齐泽锋. 基于模极大值小波域的去噪算法研究[J]. *数据采集与处理*, 2003, 18(3): 315-318.  
(Zhang X F, Xu D Z, Qi Z F. Denoising algorithm based on modulus maximum wavelet field[J]. *J of Data Acquisition & Processing*, 2003, 18(3): 315-318.)
- [6] Zhang L, Bao P. Edge detection by scale multiplication in wavelet domain[J]. *Pattern Recognition Letters*, 2002, 23(14): 1771-1784.
- [7] Mallat S. *A wavelet tour of signal processing* [M]. New York: Academic Press, 1999.
- [8] Mallat S, Zhang S. Characterization of signals from multiscale edges[J]. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1992, 14(7): 709-732.
- [9] Fodor I K, Kamath C. Denoising through wavelet shrinkage: An empirical study[J]. *J of Electronic Imaging*, 2003, 12(1): 151-160.