

文章编号: 1001-0920(2005)07-0798-05

## 伺服系统中抑制非线性扰动的有限维重复控制方法

李翠艳, 庄显义

(哈尔滨工业大学 控制科学与工程系, 哈尔滨 150001)

**摘 要:** 针对一类具有严重非线性扰动的伺服系统, 提出一种有限维重复控制方法以实现高精度的信号跟踪。所考虑的扰动与系统输出间存在未知非线性关系, 仅设其满足连续里普希斯条件, 便可处理大多数实际情况。应用不动点原理, 给出了所提出方法有效的充分条件, 该条件也是应用基于系统周期不变性的学习控制方法的必要条件。在稳定的闭环系统中, 利用  $H$  阶有限维重复控制器, 可实现参考信号前  $H$  次谐波的渐近跟踪。仿真结果证明了方法的有效性。

**关键词:** 高精度跟踪; 输出相关非线性扰动; 有限维重复控制器

**中图分类号:** TP273

**文献标识码:** A

## Rejection of Nonlinear Disturbances in Servo Systems with Finite-dimensional Repetitive Control

LI Cui-yan, ZHUANG Xian-yi

(Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China  
Correspondent: LI Cui-yan, Email: lilicyan@263.net)

**Abstract:** A finite-dimensional repetitive control method is presented for the high accuracy tracking in servo systems subject to a class of significant nonlinear disturbances. The disturbance has unknown dependency on system output with continuous Lipschitz condition. A sufficient condition is derived by using the fix point theorem. This condition is also necessary for learning control methods utilizing the period invariance property of the system. With the  $H$ -order finite-dimensional repetitive controller included in the stable closed loop, asymptotic tracking of the reference signal up to the  $H$ -th harmonics can be achieved. The simulation results show the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** High accuracy tracking; Output-dependent nonlinear disturbance; Finite-dimensional repetitive controller

### 1 引 言

在伺服系统中, 经常需要实现对周期外激励信号的高精度跟踪。例如, 工业机器人在执行重复性操作时机械手臂的轨迹控制<sup>[1,2]</sup>。在这类伺服系统中, 由于机械结构上的非对称性或驱动机构的不完善, 经常会引入一类与系统输出相关的非线性扰动, 这类扰动通常难以处理且可能严重影响跟踪精度。通过改善机械结构或提高制造工艺来消除以上扰动, 通常代价昂贵, 甚至是不可能的。因此, 有必要寻求一种简单、有效、低成本的扰动补偿控制方法。

在线性系统中, 重复控制方法对于周期信号的跟踪或干扰抑制是十分有效的<sup>[3,4]</sup>, 但对于非线性系统, 重复控制的研究结果还很有限。实际上, 由于重复控制器中含有时滞正反馈回路, 使得非线性重复控制系统的性能难以保证。为此, 可以在应用重复控制方法前采用一些线性化技术<sup>[5,6]</sup>, 但这大大增加了系统设计和实现的复杂性。

基于降阶近似内模的思想, 本文提出一种有限维重复控制方法, 并将其应用于具有未知非线性输出相关扰动的伺服系统。对于扰动信号, 仅设其满足

收稿日期: 2004-08-23; 修回日期: 2004-11-11

作者简介: 李翠艳(1974—), 女, 黑龙江萝北人, 博士生, 从事学习控制、重复控制等研究; 庄显义(1935—), 男, 黑龙江五常人, 教授, 博士生导师, 从事工业过程控制、智能控制等研究。

连续里普希斯条件, 这可以处理大多数实际情况 推导了有限维重复控制方法的应用条件, 这些条件是其他基于系统周期不变性的学习控制方法得以应用的基础 理论分析和仿真结果表明, 利用提出的  $H$  阶有限维重复控制器, 可以完全消除稳态误差的前  $H$  次谐波, 同时系统也获得了良好的暂态响应特性

## 2 问题描述

首先给出文中的符号和定义:  $R/R_+/Z_+$  分别表示实数/非负实数/非负整数;  $|x|, x \in R$  表示  $x$  的绝对值;  $L^2$  为所有定义在  $R_+$  上平方可积的实函数所形成的线性空间; 函数  $g: R_+ \rightarrow R$  的范数取其 2 范数, 即  $\|g\|_2 = \left( \int_0^\infty |g(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2}$ ; 称  $g(\bullet)$  为  $L^2$  函数, 即  $\int_0^\infty |g(\tau)|^2 d\tau < \infty$ ; 记  $C[a, b]: R \rightarrow R, a, b \in R$  为  $[a, b]$  上连续函数; 定义  $L_T$  为满足

$$f(t+T) = f(t),$$

$$\|f\|_T = \left[ \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \right]^{1/2} < \infty$$

的所有可测函数  $f: R_+ \rightarrow R$  的集合, 称  $\|\cdot\|_T$  为  $L_T$  范数, 即均方根范数; 定义截断算子  $P_L$  为

$$P_L g(t) = \begin{cases} g(t), & t \leq L; \\ 0, & t > L; \end{cases}$$

并记  $g_L(t) = P_L g(t)$ ; 稳定传函  $G(s)$  的无穷范数为

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in R_+} |G(j\omega)|$$

考虑图 1 所示的具有非线性输出反馈的伺服系统,  $r(t), e(t), d(t)$  和  $y(t)$  分别为参考输入、误差、干扰和输出信号,  $R(s), E(s), D(s)$  和  $Y(s)$  分别表示相应的拉氏变换,  $r(t) \in L_T; G_{rc}(s)$  是镇定控制器,  $P(s)$  为包含电机和负载动态特性的被控对象, 设  $P(s)$  是稳定和最小相位的;  $G_{rc}(s)$  为有限维重复控制器 连续函数  $F: R \rightarrow R$  描述了扰动  $d(t)$  和输出  $y(t)$  之间的未知非线性关系, 即

$$d(t) = F(y(t)). \quad (1)$$

图 1 所示的非线性反馈结构适用于很多实际情况 例如,  $F(\bullet)$  可以描述由不对称负载结构和重力作用引起的负载变化, 或是由于电机本身结构不完善而产生的力矩波动等

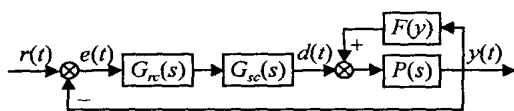


图 1 非线性输出反馈伺服系统

不失一般性, 设  $F(\bullet)$  满足连续里普希斯条件, 即对于  $\forall y_1, y_2 \in R, \exists \mu > 0$ , 使得

$$|F(y_1) - F(y_2)| < \mu |y_1 - y_2| \quad (2)$$

设  $F(\bullet) \neq 0$ , 则图 1 所示系统退化为线性系统, 称其为原始非线性系统的线性子系统

这里要讨论的控制任务是, 当输入信号  $r(t) \in L_T$  时, 设计控制器  $G_{rc}(s)$  以消除系统的稳态误差

## 3 稳定性条件

下面给出图 1 所示非线性系统的稳定性条件

定理 1 假设图 1 所示非线性系统满足:

A 1: 该系统的线性子系统渐近稳定, 即

$$G_{yr}(s) = \frac{G_{rc}(s)G_{sc}(s)P(s)}{1 + G_{rc}(s)G_{sc}(s)P(s)}$$

稳定;

A 2:  $G_{sc}(s)$  和  $P(s)$  在虚轴上没有零点;

A 3:  $F(\bullet)$  满足连续里普希斯条件, 即不等式 (2) 成立, 且有  $F(0) = 0$ ;

则系统是  $L^2$  稳定的, 若

$$\mu \|G_{yd}(s)\|_\infty < 1 \quad (3)$$

其中

$$G_{yd}(s) = \frac{P(s)}{1 + G_{rc}(s)G_{sc}(s)P(s)}$$

证明 对图 1 所示的非线性系统, 可求得

$$Y(s) = R(s)G_{yr}(s) + D(s)G_{yd}(s), \quad (4)$$

则图 1 可等效转化为图 2 考虑到假设 A 1 和 A 2, 式 (4) 右边第 1 项渐近稳定, 故只需证明图 2 中正反馈回路的稳定性 由假设 A 3, 对于  $\forall y(t) \in L^2$ , 有

$$d(t) = F(y(t)) < \mu y(t), \quad (5a)$$

$$e_d(t) < G_{yd}(s) d(t). \quad (5b)$$

若条件 (3) 成立, 即在 2 范数意义下, 图 2 中反馈回路的回路增益  $\mu \|G_{yd}(s)\|_\infty < 1$ , 则根据小增益定理可知回路  $L^2$  稳定, 故图 1 所示系统  $L^2$  稳定

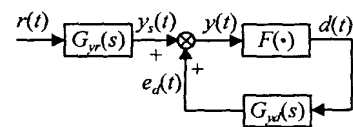


图 2 图 1 的等价系统

讨论 1 上述定理中, 不失一般性设  $F(0) = 0$  事实上, 有限维重复控制器  $G_{rc}(s)$  中包含积分环节, 系统的稳态误差将不受常值扰动  $d(t)$  的影响

## 4 周期稳态误差

下述定理表明, 图 1 所示非线性系统中, 若输入  $r(t)$  为周期信号, 则系统的稳态误差具有相同的周期特性

定理 2 令  $H_1, H_2$  分别为由  $G_{er}(s)$  和  $G_{ed}(s)$  定义的线性映射, 其中

$$G_{er}(s) = \frac{1}{1 + G_{rc}(s)G_{sc}(s)P(s)}, \quad G_{ed}(s) = G_{yd}(s).$$

设定理 1 成立且  $r(t) \in L_T$ , 则图 1 所示非线性系统

的稳态误差  $e^{ss}(t) \in L_T$ .

证明 图1中非线性系统的误差响应满足

$$e(t) = H_1 \circ r(t) - H_2 \circ d(t) = H_1 \circ r(t) - H_2 \circ F(r(t) - e(t)), \quad (6)$$

其中  $\circ$  表示映射的作用关系 式(6)右端定义了映射

$$\Phi: C[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty), \\ e(t) = \Phi \circ e(t).$$

对于  $\forall x, y \in C[0, \infty)$ , 有

$$\Phi \circ y_L(t) - \Phi \circ x_L(t) = H_2 \circ F(r(t) - x_L(t)) - H_2 \circ F(r(t) - y_L(t)) < \mu G_{yd}(s) \|x_L(t) - y_L(t)\|. \quad (7)$$

若定理1成立,  $\Phi$  是  $L^2$  上的压缩映射 由不动点原理,  $e_c(t)$  唯一确定且可通过迭代求解; 考虑到  $L$  的任意性, 则可通过如下迭代序列  $\{e_k(t)\}$  求解  $e(t)$ , 即

$$\begin{cases} e_0(t) = \tilde{e}(t), \\ e_{k+1}(t) = \Phi \circ e_k(t). \end{cases} \quad (8)$$

其中, 迭代初值  $\tilde{e}(t) = H_1 \circ r(t)$  是图1所示非线性系统的线性子系统的误差响应 则有

$$e(t) = \lim_k e_k(t). \quad (9)$$

因此, 系统的稳态误差  $e^{ss}(t)$  满足

$$e^{ss}(t) = \lim_t e(t). \quad (10)$$

注意到  $\tilde{e}(t) \in L_T$ , 并观察序列  $\{e_k(t)\}$ , 易得

$$d_0(t) = F(r(t) - e_0(t)) = F(r(t) - \tilde{e}(t)) \in L_T.$$

由线性系统性质知

$$e_1(t) = \Phi \circ e_0(t) = H_1 \circ r(t) - H_2 \circ d_0(t)$$

是  $T$  周期函数, 即  $e_1(t) \in L_T$ . 同理  $e_k(t) \in L_T$ , 从而有  $e(t) \in L_T$ . 当  $t \rightarrow \infty$  时, 有  $e^{ss}(t) \in L_T$ . 定理2得证

**讨论2** 输入输出信号具有同周期性是稳定线性系统的基本性质, 但对于非线性系统, 这一性质需要重新考虑 周期稳态误差的存在性是有限维重复控制方法应用于图1所示非线性系统的必要条件, 也是其他基于系统周期不变性的控制方法得以应用的基础 例如, 定理2条件也可用于文献[7]的学习控制方法中, 使其可与其他类型的主控制器一起工作, 实现多个控制目标

## 5 有限维重复控制器

在重复控制方法中, 稳定闭环系统引入了形如

$$M_I = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \quad (11)$$

的外激励周期信号的完全内模  $M_I$  在虚轴上的无穷多个极点使系统可对任意周期为  $T$  的周期信号实现渐近跟踪或抑制 但由于系统的稳定性很难保证, 一

般必须在时延环节前引入一个低通滤波器, 即取近似内模

$$M_{IA} = \frac{1}{1 - q(s)e^{-Ts}} \quad (12)$$

低通滤波器滤掉了高频虚极点, 影响系统性能的只有低通滤波器带宽内的有限个近似虚极点

另一方面, 大多数实际信号的功率都集中在低频带 因此只需在闭环系统中放置包含重复频率主要谐波成分的近似内模, 即可实现周期性外激励信号的高精度跟踪或抑制 由于只采用有限个谐波模型, 使得系统易于镇定 基于以上概念, 引入  $H$  阶有限维内模

$$M_F = \frac{1}{s \prod_{i=1}^H \frac{(s + i\omega)^2}{s^2 + (i\omega)^2}} \quad (13)$$

其中:  $\omega = 2\pi/T$ ,  $H \in \mathbb{Z}_+$ .  $M_F$  在重复频率  $i\omega$  ( $i \in H$ ) 处有无穷大增益 依据内模原理, 跟踪误差不会有  $H$  阶和低于  $H$  阶的谐波成分, 即可实现周期参考信号或干扰信号前  $H$  次谐波成分的稳态无差跟踪或抑制

根据定理2, 稳态误差  $e^{ss}(t) \in L_T$ . 定义  $e_{IH}^{ss}(t)$  为  $e^{ss}(t)$  的前  $H$  阶傅立叶展开, 即

$$e_{IH}^{ss}(t) = a_0 + \sum_{i=1}^H a_i \sin(i\omega t + \varphi_i). \quad (14)$$

其中  $a_0, a_i, \varphi_i \in \mathbb{R}$ .

由等式(6)和迭代序列(8)易知, 图1所描述的非线性干扰  $d(t) = F(y(t))$  也是  $T$  周期函数, 即  $d(t) \in L_T$ .

特别地, 对于系统的稳态误差给出下列定理:

**定理3** 设对图1所示非线性系统, 定理2成立, 则当  $C_{rc}(s)$  中包含形如式(13)的  $H$  阶有限维内模  $M_F$  且系统稳定时, 系统的稳态误差不可能含有阶次小于或等于  $H$  的谐波成分, 即  $e_{IH}^{ss}(t) = 0$

**证明** 反证法 由定理2知, 图1所示非线性系统的稳态误差是周期函数且有界 同样可知, 闭环系统的所有解也是有界的 现假设跟踪误差中含有阶次为  $i$  ( $i \leq H$ ) 的谐波成分, 则可以看到, 由于在频率  $i\omega$  处极点的存在, 有限维重复控制器的输出信号将随着时间增加而不断增长, 直至无界 这与假设矛盾 由此, 定理3得证

**讨论3** 若  $G_{rc}(s)$  包含  $H$  阶有限维内模, 则称其为  $H$  阶有限维重复控制器(FDRC). 由定理3可知, 阶次为  $H$  的FDRC能够完全消除稳态误差信号中前  $H$  次的谐波成分 对于连续周期信号, 其傅立叶系数至少平方收敛到0 通过合理选择阶次  $H$ , 可以充分减小系统的稳态误差以满足系统要求

关于  $G_{rc}(s)$  设计, 这里给出一种频域设计方法,

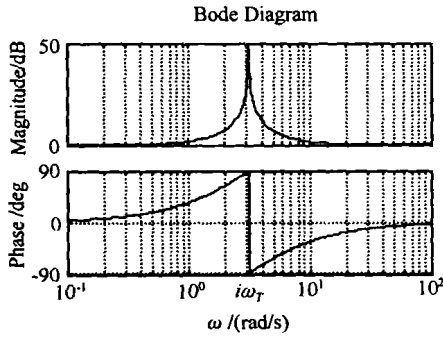


图 3  $M_{Fi}$  的频率响应

使所得 FDRC 可以在不改动系统其他参数的情况下“插入”原始系统中。图 3 所示为单一谐波频率内模

$$M_{Fi}(j\omega) = \frac{(s + i\omega)^2}{s^2 + (i\omega)^2} \Big|_{s=j\omega}, \quad i = Z_+ \quad (15)$$

的频率特性。可以看到, 若  $\omega \gg i\omega_r$ ,  $|M_{Fi}(j\omega)| \approx 1$ , 则  $M_{Fi}(j\omega) \approx 0$ 。令  $G_{rc}(s)$  为

$$G_{rc}(s) = \prod_{i=1}^H \frac{\alpha T_i s + 1}{T_i s + 1} \cdot \frac{(s + i\omega)^2}{s^2 + (i\omega)^2} \quad (16)$$

设计过程分两步: 首先, 令  $G_{rc}(s) = 1$ , 设计镇定控制器  $G_{sc}(s)$  使其满足定理 1 中的稳定性条件和其他性能指标; 然后, 设系统开环剪切频率为  $\omega$ , 选择  $\alpha, T_i$  使得  $G_{rc}(j\omega) = 1$ , 即所得的 FDRC 在  $\omega$  处对原始系统的幅值和相位没有影响。因此, 若  $G_{rc}(s) = 1$  时系统稳定, 则加入 FDRC 后闭环系统稳定。这样,  $G_{rc}(s)$  可作为插入式扰动补偿器。

### 6 仿真结果

将有限维重复控制器应用于图 4 所示的单自由度机械手的轨迹跟踪控制, 以证明其有效性。系统中的非线性扰动  $F(y) = 1.16 \sin(y)$ ,  $N \cdot m$ , 是由重力引起的扰动力矩。稳定控制器  $G_{sc}(s)$  选为简单的 PD 控制器, 即  $G_{sc}(s) = 10 + s$ , 名义对象  $P(s)$  为

$$P(s) = \frac{1/0.00138}{s^2}$$

周期参考信号为

$$r(t) = \sin(2\pi t) \text{ rad}$$

设计 2 阶有限维重复控制器

$$G_{rc}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{(s + 2\pi)^2}{s^2 + (2\pi)^2} \cdot \frac{(s + 4\pi)^2}{s^2 + (4\pi)^2}$$

图 5 为采用 PD 控制器、PD 加有限维重复控制器以及传统的时延内模重复控制器 (TDRC) 时的系

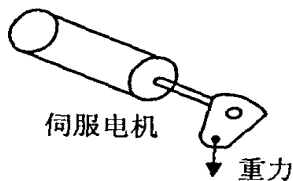
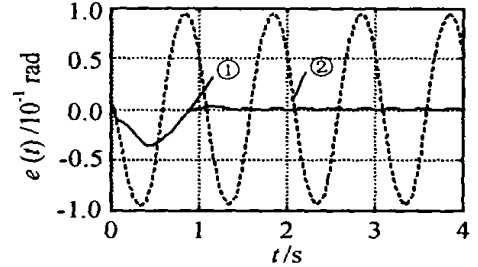
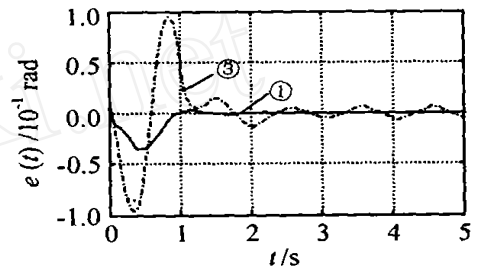


图 4 单自由度机械手

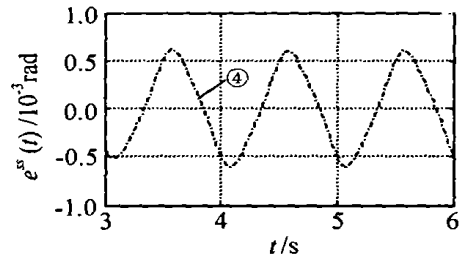
统跟踪误差和稳态误差。可以看到, 采用有限维重复控制器后, 系统跟踪误差大大降低。正如定理 3 分析的那样, 稳态误差中只含有谐波的高频成分。与传统的重复控制器相比, 有限维重复控制器稳态跟踪精度高、收敛速度快、暂态响应特性优良。



(a) 跟踪误差  $e(t)$



PD+FDRC PD TDRC



(b) 稳态误差  $e^{ss}(t)$

TDRC PD+FDRC

图 5 跟踪误差  $e(t)$  与稳态误差  $e^{ss}(t)$

### 7 结 语

本文提出了一种有限维重复控制方法, 以实现一类非线性系统中周期信号的高精度跟踪。理论分析和仿真结果表明, 采用适当阶次的有限维重复控制器, 可以得到很高的跟踪精度以及良好的暂态特性。由文献 [8, 9] 可知, 对于一些具有与输出相关的非线性扰动的恒速率控制系统, 这种有限维重复控

制器同样具有良好的控制效果,且很容易利用模拟元件或数字处理器来实现,性能高、成本低,具有较高的实用价值

### 参考文献(References)

- [1] Cosner C, Anwar G, Tomizuka M. Plug in Repetitive Control for Industrial Robotic Manipulators[A]. *Proc IEEE Int Conf Robotics and Automation* [C]. Cincinnati, 1990, 3: 1970-1975
- [2] Lucibello P, Panziera S. Cyclic Control of Linear Systems with Application to a Flexible Arm [J]. *IEE Proc Control Theory and Applications*, 1998, 145(1): 19-24
- [3] Inoue T, Nakano M, Iwai S. High Accuracy Control of Servomechanism for Repeated Contouring[A]. *Proc of the 10th Annual Symp Incremental Motion Control System and Devices*[C]. Chicago, 1981: 285-292
- [4] Hara S, Yamamoto Y, Omata T, et al. Repetitive Control System: A New Type Servo System for Periodic Exogenous Signals [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1988, 33(7): 659-668
- [5] Hikita H, Yamashita M, Kubota Y. Repetitive Control for a Class of Nonlinear Systems [J]. *JSM E Int J Series C*, 1993, 36(4): 430-434
- [6] Alleyne A, Pomykalski M. Control of a Class of Nonlinear Systems Subject to Periodic Exogenous Signals [J]. *IEEE Trans on Control Systems Technology*, 2000, 8(2): 279-287.
- [7] Kim Y H, Han S H, Cho S I, et al. Learning Approach to Control of Servomotors under Disturbance Torque Dependent on Time and States [J]. *IEE Proc-Control Theory Applications*, 1998, 145(3): 251-258
- [8] 张东纯, 曾鸣, 苏宝库. 精密速率系统中位置周期扰动的动态补偿——一种有限维重复控制方法[J]. *宇航学报*, 2003, 24(1): 57-60  
(Zhang D C, Zeng M, Su B K. Dynamic Compensation of Position-dependent Periodic Disturbances in Precision Velocity Control Systems - A Finite-dimensional Repetitive Control Approach [J]. *J of Astronautics*, 2003, 24(1): 57-60)
- [9] 张东纯, 曾鸣, 苏宝库. 高精度速率控制系统的有限维重复控制方法[J]. *仪器仪表学报*, 2002, 23(3): 412-414  
(Zhang D C, Zeng M, Su B K. Finite-dimensional Repetitive Control Method for High Precision Velocity Control System [J]. *Chinese J of Scientific Instrument*, 2002, 23(3): 412-414)
- [7] Ramirez-Beltran N D, Jackson H. Application of Neural Networks to Chemical Process Control [J]. *Computers and Industrial Engineering*, 1999, 37(1-2): 387-390
- [8] Frederick H R. Knowledge-based Expert Systems [J]. *Computer*, 1984, 17(10): 263-273
- [9] 徐常胜, 周兆英, 刘思行, 等. 基于神经网络和专家系统的故障诊断[J]. *控制与决策*, 1995, 10(4): 342-346  
(Xu C S, Zhou Z Y, Liu S X, et al. Fault Diagnosis Based on Neural Network and Expert System [J]. *Control and Decision*, 1995, 10(4): 342-346)
- [10] Warnes M R, Glassley J, Montague G A, et al. On Data-based Modeling Techniques for Fermentation Process [J]. *Processes Biochemistry*, 1996, 31(2): 147-155
- [11] Kurtanek Z. Modeling and Control by Artificial Neural Networks in Biotechnology [J]. *Computers and Chemical Engineering*, 1994, 18(S): 627-631
- [12] 杨东伟, 陈雪波. 焙烧过程球团透气性的软测量[J]. *系统仿真学报*, 2001, 13(增刊 8): 191-193  
(Yang D W, Chen X B. The Soft-Sensing on Diathemancy of Pellet in Bake Process [J]. *J of System Simulation*, 2001, 13(S8): 191-193)
- [13] 张晓东, 柴振新. 酒钢 100m<sup>3</sup> 竖炉的发展与生产实践 [J]. *金属矿山*, 2000, 3: 32-33  
(Zhang X D, Chai Z X. Development and Production Practice of 100m<sup>3</sup> Shaft Furnaces in Jiuquan Steel Co [J]. *Metal Mine*, 2000, 3: 32-33)

(上接第 797 页)